第2版

シュッツ 相対論入門

ハードカバー版

江里口良治・二間瀬敏史　共訳

Bernard Schutz

A First Course in General Relativity

Second Edition

丸善株式会社

A First Course in General Relativity

Second Edition

by

Bernard F. Schutz

第2版のまえがき

本書の第1版と今回の第2版の出版までの23年の間に，一般相対論の研究は目ざましい発展をとげた．数学的に強固な基盤の上に，初版が出た1985年には想像することすらできなかった応用が広がったのである．一般相対論は専門的な理論物理学の周辺的存在から中心的領域へと重みを増し，卒業するまでには少なくとも一般相対論の基礎を学ぼうとする学部学生が増えてきている．

初版は時間とともに古びてきて，ブラックホールの天体物理学，重力波の観測，そして宇宙論といった領域では最先端からかけ離れた内容になってしまったにもかかわらず，初版の読者は不満を述べることもなかった．学生諸氏は一般相対論の数学的基礎を学ぶため初版を使用し続けてくれた．今回の大幅な改訂によって，本書がバランスのとれたものになり，読者にとって，古典重力の研究の現状についての系統的で一貫した入門書の役割を担ってくれることが，著者の願いである．

第8章まではほとんど変更を加えていない．参考文献として最近の論文等に触れ，数節に関しては内容を充実させたが，一般相対論の数学的基礎に対する幾何学的な解説は時間の経過とともに古びるということはなかった．対照的に，天体物理分野を扱っている残りの4章は，最先端の研究を取り入れて拡充し，場合によっては全面的に書き直した．

重力波を扱っている第9章では，LIGOや計画中の宇宙空間での観測装置のLISAのような干渉計を用いる観測装置を詳細に解説している．また，重力波源候補に関する議論をし，観測からわかると考えられる事柄を述べた．この分

野は現在も急速に発展しており，重力波の直接観測がされる日も間近であろう．第9章の目的は，重力波の観測が意味することを理解するのに必要な枠組を示すことにある．

第10章では，球対称星の説明は変える必要がなかったが，中性子星の本当の姿についての説明を追加した．中性子星は，パルサーとして観測されており，また重力波源としても重要な存在だからである．

ブラックホールに関する第11章では，ブラックホールの天体物理学的な観測による証拠を詳しく述べた．それは恒星質量ブラックホールと，驚くべきことにたいていの銀河に中心部分に発見されてきている超大質量ブラックホールである．ホーキング輻射についても，少しだけ追加した．

宇宙論に関する第12章は全面的に書き直した．初版では宇宙項はほとんど扱わなかった．それは，宇宙膨張が減速しているという仮定にもとづいたその当時の潮流に従ったためである．宇宙膨張の減速は正確に測られたものではなかったけれども．現在では，種々の観測が矛盾なく，宇宙膨張が加速していることを示している．このことはおそらく今日の理論物理学における最大の問題であり，宇宙論の問題としてだけでなく素粒子物理学の基礎的な理論にも大きな影響を与えるものであろう．第12章はこの観点にたって構成し直し，宇宙項入りの膨張宇宙の数学的なモデルを説明し，天文学者がどのようにして宇宙の運動を観測しているかを詳述し，宇宙の構成要素がビッグバン以来どのように進化してきたかを述べた．インフレーション，ダークマターそしてダークエネルギーが宇宙の構造，ひいてはわれわれ人類の存在に影響しているのである．この章では，これらの事柄について天文学者が理解してきたことのうちのほんのわずかにしかふれられなかった．しかしながら，それによって読者がさらに学びたいと思うだけの十分な内容になっていることを期待したい．

必要と思われる章には演習問題を追加したが，第2版では印刷の形で解答を示すことは止めにした．演習問題の解答は本書に対応するウェブ上に掲載されている*．

本書で扱っているのは古典的な一般相対論である．ホーキング輻射の解説を

*訳注：日本語版では，旧版の問題が第2版でも使用されている場合，旧版にあった解答を巻末に掲載した．ケンブリッジ大学出版局のウェブにアクセスすることが容易ではないからである．

除くと，量子効果に関する説明はない．量子重力は現在の理論物理学の中で精力的に研究されている分野であるが，重力を量子化しようと考える学生に対して明確な方向性を示せるだけのレベルには達していない．おそらく，本書の第 3 版が出版されるころまでには，重力の量子化の章を加えることができるようになるであろうが．

この第 2 版を出版するにあたって援助していただいた多数の方々に感謝したい．何人かの方からは，初版のミスプリントや間違いの指摘があった．特に，Frode Appel，Robert D'Alessandro，J.A.D. Ewart，Steve Fulling，二間瀬敏史，Ted Jacobson，Gerald Quinlan，B. Sathyaprakash に感謝しておきたい．まだ本書に残っているかもしれない間違いの原因が私であるのはいうまでもない．ケンブリッジ大学出版局の編集者である Rufus Neal, Simon Capelin, Lindsay Barnes にも彼らの辛抱強さと激励に感謝の意を表したい．そして，本書の改訂に費やした何時間，何日，何週間にわたる間，妻の Sian からの温かい応対に助けられたことを特筆しておきたい．

初版のまえがき

本書は，私が 1975 年から 1980 年にかけて，学部学生を対象に行った講義ノートから発展してきたものである．このときの経験から，私は学部学生が一般相対論を学ぶのは，学部レベルの電磁気学や量子力学を学ぶよりも決して難しくないと確信した．一般相対論の研究対象は主に天文学から刺激を受けて，過去 20 年間に爆発的に広がった．このことは理論のより深く完全な理解をもたらしたばかりでなく，より明確で物理的な理解の仕方があることをも教えてくれた．相対論は今や物理や天文学の主流となり，いくらかの相対論の訓練がなければ，どんな理論物理学者も広範な教育を受けたとは見なされない．相対論についての過去の忌まわしい評判［インタビュアー：“エディントン教授，世界中でたったの 3 人しかアインシュタインの理論を理解していないというのは本当ですか?”　エディントン：(アインシュタインと私以外の) 3 人目とは誰のことですか?］が，たぶん今日でも一般相対論が理論物理学者に，より広く教えられるのを阻んでいる主な原因だろう．この本の目的は一般相対論を学部学生にとって適切なレベルで教えることにある．基礎的な物理概念とそれらの実験の意味するところを理解し，より進んだ教科書に取り組む十分な準備ができることを期待している．

この目的のため，最少限の予備知識と，取り扱う内容をいい加減なものにしないという矛盾した要求を同時に満たすように努めたつもりである．本書は多くの入門書と違って，読者が電磁気学の特殊相対論的な定式化，電磁波の理論，そして流体力学を習っていることを前提とはしていない．必要な流体力学は，

本書の関連する章で学ぶことができる．電磁波になじんでいないという前提の結果，重力波の解説はていねいに行った．たとえば波動方程式は第一歩から始める．どんな予備知識が必要かは以下で説明しよう．

内容の取扱いをいい加減なものにしないという指導原理は，かなり主観的なもので，はっきりということはできない．微分幾何学を単に曲面との類似にとどめるのではなく，かなり完全な説明をしたつもりである．しかしメトリックをもたない多様体やリー微分，ファイバーバンドルなど，学部のレベルでは必ずしも必要でないものは省いている[1)]．線形化した理論ではなく，近似なしの非線形の場の方程式を導入しているが，平面と球対称の場合にしか，それを解いていない．その他は，カー解を引用して，その性質をいろいろとしらべている．重力波は主に線形近似で取り扱ったが，波のエネルギーと輻射の反作用を導くために，線形理論から少し進んだ議論をした．またおのおののトピックについては読者がもう一度最初から始めずに，より進んだ取扱いに進めるように基礎的なことを十分補っている．

本書の 8 章までは，多くの本と同様に次のような順序で理論を導入している．特殊相対論の要約，ユークリッド空間とミンコフスキー空間での曲線座標系でのテンソル解析，曲った多様体の幾何学，曲った時空での物理，そして最後が場の方程式である．残りの 4 章は，現代天文学にとって重要ないくつかのトピックを扱っている．これからの 10 年間は，重力波の観測が天文学の最も重要な発展の一つとなるので，重力波の章はこのレベルの本としてはふつうよりもかなり詳しいものになっている．球対称の星の章では，通常扱われるもののほか，Buchdahl によって発見された，圧縮性をもつ物質の内部解を紹介した．ブラックホールについての長い章では，かなり詳しく事象の地平面の物理的な性質をクルスカル座標を用いて議論し，回転している（カー）ブラックホールについてしらべ，そしてブラックホールによる量子力学的な輻射の放出であるホーキング効果の簡単な議論をした．最後の宇宙論の章では一様，等方なメトリックを導き，観測と宇宙の進化について手短に説明した．付録として，この本で必要な線形代数の要約と練習問題のいくつかについてヒントと解答を与えてある．

---

1)　したがって，ここでの取扱いは私の本 *Geometrical Methods of Mathematical Physics* (Cambridge University Press, 1980*b*)［家正則，二間瀬敏史ほか訳，“物理学における幾何学的方法”（吉岡書店，1987)］とは少し趣を異にしている．

ほとんどすべての教科書が伝統的に扱っている分野のうち，一般相対論の実験的検証と一般相対論以外の重力理論にはふれなかった．実験の接触点は，それが出てくるたびに説明したが，系統的な議論は一冊の本 (Will, 1981)[2] を要するし，今日の物理学者は 10 年，20 年前よりもはるかに一般相対論の正しさを確信しており，他の重力理論についての広範な議論は，現代の重力理論の入門的教科書では場違いのように思われるからだ．

本書の読者は次のことをすでに習ったものとする．ローレンツ変換と相対論的力学を含む特殊相対論，ユークリッド空間でのベクトル解析，常微分方程式と簡単な偏微分方程式，熱力学と静止流体力学，ニュートンの重力理論（簡単な星の構造を知っていることは有用ではあるが不可欠ではない)，そして光子とは何かくらいを知るのに十分な程度の量子力学．

用語や記法は，基本的には Misner らの本 (*Gravitation*, W.H.Freeman, 1973) に従った．この本は次に読む教科書の一つといってよい．物理的観点や分野の展開はどうしてもこの本に影響を受けざるをえない．というのは，この本についての著者の一人 Thorne が私の師であり，またこの本が現在最も標準的な教科書になっているからである．しかし本書はもっと広い層の読者にもわかりやすいように努めたので，スタイルや教え方はだいぶ違うものになっている．

本書は教科書として全体を一年間で順番に学べるようになっているが，半年間のコースに縮めることも可能である．その場合は限られた部分にすべきだろう．たとえば，すでに電磁波を学んだ学生に対してなら，1 章から 3 章のいくらかと 4，7，10 章のほとんどをとばして，重力波とブラックホールを教えるのもよいだろう．また特殊相対論と流体力学を学んでいる学生には，最初の 4 章と 9，11 章を手早く済ませ，星の構造，宇宙論にまで進めるだろう．もちろん大学院なら半年のコースですべて学ぶことができるだろう．

各章の最後に，いくつかの練習問題をつけた．これはほとんど自明のもの（本文でとばしたステップを埋めたり，新しく導入した数学に慣れるための計算である）から，本文の議論を拡張したかなり難しい問題まで含んでいる．このうちのいくつかは，プログラム付電卓あるいはコンピューターが必要である．練習問題のいくつかを実際に解くことの重要性を強く指摘しておきたい．はじめの何章

2)　この古典的教科書の第 2 版は Will (1993).

かの簡単なものやほどほどに難しいものは特に大事で，それらを解かなければ後の章の理解は深まらないだろう．相対論の概念的な枠組には非常に興味をもつが，問題を解くことを切り離すのは間違いであり，危険なことである．適度に難しい問題を解けない学生は，理論の諸概念も本当には理解できない．本書には一般に学生が全部解くには多すぎる問題をのせている．その数は章によっては 30 以上もあるので，教師がその中から取捨選択しなければならないだろう．問題をたくさんのせた本として，Lightman らの *Problem Book in Relativity and Gravitation* (Princeton University Press, 1975) がある．

本書の執筆にあたって多くの人から直接・間接的に援助を受けた．特にカーディフ大学の学部学生に感謝したい．初期の講義ノートの不十分さをがまんし，相対論に対して彼らの示した熱意によって本書は刊行できたのである．さらに，原稿のたび重なるタイプに関して Suzanne Ball, Jane Owen, Margaret Vallender, Pranoat Priesmeyer と Shirly Kemp に感謝しておきたい．

B.F.Schutz, 1984

日本語版へのまえがき

"A First Course in General Relativity" の第 2 版が日本の読者に利用できるようになることを知り，とてもうれしく思います．第 1 版とその日本語訳が出版されて以来，この教科書で扱う項目は大きく増え，また変りました．X 線衛星，宇宙望遠鏡，地上からの以前よりはるかに高感度の観測装置などによる豊富なデータの蓄積は，宇宙における一般相対論の役割についてのわれわれの考え方を変えました．今や私たちは，巨大ブラックホールが銀河形成に際してつくられ，そしてそのことが銀河内での星形成の様相，ひいては私たち自身の存在に大きな影響をもつことを知っています．そしてまた私たちは，宇宙が膨張しているばかりか，アインシュタイン方程式を通して反重力作用をもつ "暗黒エネルギー" とよばれる不思議な何物かによって加速されていることを知っています．さらには宇宙を観測するまったく新しい方法としての重力波天文学の確立へとつながる重力波の最初の直接検出が間近に迫っていることを知っています．私はこの新しい版で読者および学生諸氏に，私たちの宇宙についてのこの新しい見方の基礎を与えるように努めました．

この素晴らしい日本語訳に対して翻訳者である二間瀬教授と江里口教授に，翻訳の機会と英語版第 2 版のいくつかのミスプリントを訂正する機会を与えてくれた丸善に深い感謝の意を表します．

2010 年 10 月　ドイツ，ポツダムにて

Bernard Schutz

訳者まえがき

この本の第1版がケンブリッジ大学出版会から出版されたのは，1985年のことである．出版後すぐに，特殊相対性理論から一般相対性理論までが現代的にかつていねいに書かれた入門的教科書として世界中で多くの学生に読まれ，また多くの大学で教科書に使われ，不動の位置を築いた．私（二間瀬）はSchutz教授の元学生ということから親しくさせていただいており，その縁から第1版の日本語訳を江里口さんと行い，1988年に丸善から出版された．幸い日本語訳も多くの学生，教員の方々に利用してもらい好評を得た．私自身も前任地の弘前大学での授業で教科書として利用し，大変勉強になった．

その後，Schutz教授はポツダム近郊にあるマックス・プランク重力研究所，通称アルバート・アインシュタイン研究所の所長となり，特に重力波望遠鏡の建設に尽力し多忙な毎日を送られていたが，3年ほど前に「特に重力波や宇宙論の分野で進展が著しいので，改訂版を書いている」という話を直接うかがった．そしてその改訂版は，同じくケンブリッジ大学出版会から2009年に出版され，Schutz教授が仙台に来られたおりに進呈していただいた．改訂版に目を通してみると基本的な構成は第1版と同じであり，相変わらず基本的なところからていねいにそして明瞭に書かれているばかりか，ところどころにより教育的配慮がなされ，また最近の発展によって得られた成果が盛り込まれてあった．特にSchutz教授が気にしておられた重力波や宇宙論に関する部分は大きく改訂されていた．相対論の教科書は数多く出版されてきたが，それでもこの本は入門書としての価値を失っていないと確信した．そこで，第1版を共同で翻訳

した江里口さんと第2版の翻訳について相談し，丸善に伝えたところ，快く了承が得られ翻訳ができることになった次第である．

原著第1版の刊行からこれまでに四半世紀の歳月が流れ，その間に宇宙論は精密科学として大きく変貌し，またアメリカ，ヨーロッパ，そして日本で試験的な重力波望遠鏡ができ，近い将来，本格的な重力波望遠鏡が稼働し重力波観測が現実のものとなることが明らかになっている．個人的なことを書かせていただくと，この間，私（二間瀬）も弘前大学理学部物理学科（当時）から東北大学大学院理学研究科天文学専攻に移り，研究の軸足をより天文学的な重力レンズや観測的宇宙論に移してきた．しかし今や私たちは，宇宙をみる新しい目としての重力波天文学の誕生を目撃しており，私自身も重力波の研究に再び興味をひかれている．このような時期に重力波天文学の生みの親の一人ともいうべきSchutz教授による相対性理論の教科書を翻訳できたことは，訳者である私たちにとっても誠にうれしい限りである．

2010年9月　アルバート・アインシュタイン研究所にて

二間瀬　敏史

目　　次

1
特殊相対論

1.1 特殊相対論の基本原理

入門的な学部学生のレベル（本書の読者に要求されるレベル）で特殊相対論を教える場合，通常，物理学者がはじめてそれを理解したのと基本的に同じ方法がとられる．それはローレンツ変換（1.9 節参照）にもとづく代数的なアプローチである．そのような基礎的なレベルでは，ローレンツ変換を使って，ある観測者の測定値から別の観測者による測定値をどのように導くかとか，時間の遅れ，ローレンツ収縮などの驚くべき現象を理解させ，質量がエネルギーに変る簡単な計算が教えられる．

この代数的な観点が別の見方に変っていくのは，Einstein が理論を提唱してから 4 年もたたないうちであった[1]．Minkowski は (t, x, y, z) を単にある四次元空間（この空間を今後，時空とよぶ）の四つの座標値と見なすと非常に見通しがよくなることを指摘した．これが 1914 年から 1916 年にかけ一般相対論へと結びついていった幾何学的観点のはじまりであった．この観点をすべてに先がけて学ばなければならない．

以下に学ぶように特殊相対論は次の二つの基本的な仮説から導き出される．

(1) **相対性原理** (Galileo)：どんな実験も観測者の絶対速度を測ることはで

1) Einstein の最初の論文は 1905 年に出版され，Minkowski の時空に対する幾何学的議論は 1908 年になされた．Einstein と Minkowski の論文の英訳は A. Einstein, H.A. Lorentz, H. Minkowski and H. Weyl, The Principle of Relativity (Dover) で読むことができる．

きない．ある観測者によって行われたどんな実験の結果も，その実験に関与しない別の観測者との相対速度に依存しない．

(2) **光速の不変性** (Einstein)：加速運動をしていない任意の観測者に対する光速は，その観測者と光源の相対速度に関係なく $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ という値をとる．この仮説の意味を明確にしよう．同じ光子の速度を測っている 2 人の加速運動をしていない観測者は，お互いの運動状態に関係なく，どちらも $3 \times 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ という値を測定する．

上に示したように相対性原理は近代の概念ではなく，一様な運動状態にある物体は外部からの影響がなければ，その状態のままでいるというガリレオの仮説にまでさかのぼる．この原理はニュートンの第二法則に完全に具現されている．その法則は加速度のみを含み，速度は含んでいない．実際，$\boldsymbol{V}$ を任意の**一定**の速度として

$$\boldsymbol{v}(t) \to \boldsymbol{v}'(t) = \boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{V}$$

という変換に対して，ニュートンの法則は不変になっている．ある観測者からみた速度 $\boldsymbol{v}(t)$ は，その観測者に対して相対速度 $\boldsymbol{V}$ をもった別の観測者からみると，$\boldsymbol{v}'(t)$ になる．これをガリレオの速度の合成則という．

ニュートンの法則がガリレオの速度の合成則に対して**不変**であるというような言い方は相対論ではしばしば用いるので，その意味を正確にしておこう．外力のないとき物体は速度一定の運動をするというニュートンの第一法則は，上の速度の変換によって影響を受けない．なぜなら $\boldsymbol{v}(t)$ を一定，たとえば，$\boldsymbol{v}_0$ とすると，新しい速度 $\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{V}$ も一定になるからである．ニュートンの第二法則

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$$

も影響を受けない．なぜなら

$$\boldsymbol{a}' = \mathrm{d}\boldsymbol{v}'/\mathrm{d}t = \mathrm{d}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{V})/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{a}$$

したがって，ガリレオの速度の合成則に加えて，$\boldsymbol{F}$ と m が不変，すなわちどの観測者から測っても変らないとすれば，第二法則も両方の観測者にとって成り立つことがわかる．第一の物体から第二の物体に働く力は，第二の物体から第一の物体に働く力と大きさは等しく，向きは反対であるというニュートンの第

三法則は，力がガリレイ変換に対して不変だとすれば，明らかに観測者が変っても影響を受けない．

このように絶対速度は存在しない．それなら絶対加速度は存在するのだろうか？ Newton は存在するという．たとえば，完全にスムーズな線路[2] を走っている電車の食堂車のなかでスープを飲んでいるとしよう．もし電車が一定の速度で走っていれば，スープの表面は水平のままで，電車の速度がいくらかはまったくわからない．しかし電車の速度が変るときには，スープの表面が傾き，それによって加速度の大きさと方向がわかるだろう[3]．

したがって，加速度運動をしていない観測者という一群の特別な観測者を考えるのが，都合がよく有用でもある．それらをまとめて**慣性観測者**とよぶ．そのおのおのはお互いに対して一定の速度で運動している．この慣性観測者が特殊相対論における基本的な概念である．今後 “観測者” という言葉は，慣性観測者を意味する．

光速度不変の仮説こそが，相対論への Einstein による本質的で大きな寄与であった．$\boldsymbol{v}$ が大きさ c をもつときには，$\boldsymbol{V}$ のいかんにかかわらず，$\boldsymbol{v}'$ も大きさ c をもつとすることによって，ガリレオの速度の合成則を捨ててしまった．この仮説を支持する当時の根拠はマイケルソンとモーレーの実験であったが，Einstein 自身がその実験の影響を受けていたかどうかは明らかではない．直観に反する特殊相対論の予言はすべてこの仮説からきている．それらの予言は，実験によって何度も確かめられている．実際，特殊相対論ほど確実な実験的基盤をもっている物理法則はないというべきだろう．毎日，世界中の巨大な加速器のなかで，粒子はほとんど光速にまで加速され，特殊相対論の正しさが実証されている．

相対性の概念は古いものであるが，ふつうアインシュタインの理論を “相対論” とよんでいる．“特殊” という形容は，一般相対論と名づけられたアインシュタインの重力理論と区別するために用いられる．一般相対論では，慣性観測者のみならず加速運動をしている観測者の観点からも物理が取り扱われ，その意味で相対論のより一般的な形になっている．しかし，この二つの理論の本当の違いは，特殊相対論が重力場のないときにだけ適用されるのに対して，一般相

---

2)　物理学者は，よくこのような現実とかけ離れた理想化を行う．

3)　この点についての議論は Williams (1968) の本のなかの Newton の “Principia” の抜粋を見よ．

対論はそれを重力場自身にまで拡張したことである[4]．前世代の物理学者が，この二つの理論にもっと適切な名前をつけてくれたらよかったのだが．

1.2　慣性観測者の定義

一人の"観測者"というのは，単に双眼鏡をもった人ではなく，実際には莫大な情報収集系である．人間的な要素を定義からまったく取り除いて，次のようにいうこともできる．すなわち，観測者とは時空をおおう単なる座標系であって，どんな事象をもその位置 (x, y, z) と時間 t を記録することによって観測する．この座標系が次の三つの性質を満たすとき，**慣性的**であるとよばれる：

(1)　点 P_1（その座標 x_1, y_1, z_1）と点 P_2（その座標 x_2, y_2, z_2）の間の距離は時間によらない．

(2)　すべての点に附随していて，時間座標 t の値をきざむ無数の時計は時間合せができ，まったく同じ割合で進む．

(3)　$t =$ 一定のどの時間の空間の幾何学もユークリッド幾何学である．

この定義では観測者が，加速運動をしているか，いないかについて何もいっていないことに注意してほしい．そのことはあとで，でてくる．加速運動をしていない観測者だけが，自分の時計を他の時計に同時化できることがあとでわかる．われわれにとって慣性観測者の幾何学な定義から始めるほうが好ましい．このような観測者が存在できるかどうかを決めるのは，実験によってである．"質のよい" 世界では，これらのすべての性質が満たされると期待してもよいが，そのうちのどれもが，いつも実現可能とは限らない．一般には，後に重力場内ではそのような座標系をつくることができないことがわかる．それだからこそ，そのような情況で一般相対論が要求されるのである．話を急がず，今のところは重力場がなく，上の三つの性質を満たす座標系が**つくれる**ものとしよう．（われわれのまわりの重力場は非常に弱く，実際には問題にならない．）かなり空想

4)　重力場が特殊相対論にとって，厄介な問題をもたらすことは容易にわかる．地球を回る軌道にある宇宙船のなかで飛行士がスープ皿をもっているとする．スープの表面は宇宙船を軌道にとどめている"重力"に反応して傾くだろうか?　また違った軌道にある 2 人の宇宙飛行士はお互いに対して加速度をもっているが，どちらも加速度を感じない．このような問題のため，重力は特別扱いしなければならず，5 章までその解決を待たなければならない．そのときまで"力"という言葉は重力以外のものを指すことにする．

的ではあるが，この座標系を，たくさんの固い棒で空間を格子状に満たし，各格子点に時計がくっついているものとしよう．たとえば，GPS 衛星とその信号の受信者たちからなる座標系はすべての時計が同期しているものとして扱うことができる．時計が高い密度で分布していると仮定すると，対象とする事象の各点に時計があると考えてよく，事象の起った時刻を遅れなく記録することができる．次にこの座標系をどのように用いて観測するかを定義しよう．

慣性観測者が行うある**事象の観測**とは，それが起った場所の座標値 x, y, z と，その時にそこにある時計によって示された時刻 t を，その事象にふりあてる操作のことである．その時刻とは，座標系の原点 $(0,0,0)$ にいる物理学者がはじめてその事象が起ったことを知ったときに，彼の腕時計の示す時刻 t ではない．**目でみる**観測がこの種のものであって，いくつかの事象が同時にみえるとき，目はそれらが同時に**起った**と見なす．一方，いくつかの事象が起ったとき，おのおのの一番近くにある時計がさす時刻が同じとき慣性観測者はそれらを同時と見なす．この違いは重要であり，心にとめておかねばならない．ときどき“観測者が…をみる”という言い方をするが，それは“測定する”ということを簡単にいっただけであって，目で見たとはっきり書かない限り，それは決して**目でみる**観測のことではない．

慣性観測者は**慣性基準系**ともよばれ，またしばしば単に“基準系”と略称される．

1.3　新しい単位系

光速度 c は，非常に基本的な役割を果すので，今後 c の値が 1 になるような単位系を採用する．われわれのようなのろまな生物にとっては，技術者が用いる SI 単位系（国際単位系）[m（メートル），s（秒），kg（キログラム）] で十分である．しかし相対論でその基本定数 c が，3×10^8 という莫大な値となる SI 単位系を使うのはばかげている．SI 単位系は歴史的な所産であって，メートルとか秒とかに何の原理的意味もない．これは単に人間が使うのに便利なだけである．そこで新しい時間の単位として，メートルを採用しよう．時間の 1 メートルとは，光が 1 メートル走るのに要する時間である．（たぶん別の方法がよ

りなじみ深いだろう．1 光年という距離の単位とは光が 1 年間に走る距離である.）この単位系での光の速さは

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{\text{その時間間隔の間に光が走る距離}}{\text{与えられた時間間隔}} \\
&= \frac{1\,\mathrm{m}}{\text{光が }1\,\mathrm{m}\text{ 走るのにかかる時間}} \\
&= \frac{1\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}} = 1
\end{aligned}
$$

したがって，いつも時間をメートルで測るなら，c は 1 という値をとるばかりでなく，無次元量でさえある．SI 単位系から，この“自然”単位系に移るには，次のどの関係を用いてもよい．

$$
\begin{aligned}
&3 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 1 \\
&1\,\mathrm{s} = 3 \times 10^8\,\mathrm{m} \\
&1\,\mathrm{m} = \frac{1}{3 \times 10^8}\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

SI 単位系には，基本的な三つの単位 m，s，kg からつくられるジュールとかニュートンのような多くの単位がある．上の関係を使って，s を m に変えることにより，それらの単位は非常に簡単化される．エネルギーと運動量は kg，加速度は $\mathrm{m^{-1}}$，力は $\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$ などである．これらの練習をくり返せば，現代のほとんどの物理学者なみに新しい単位系が自然にみえてくるようになるだろう．

1.4 時　空　図

特殊相対論を幾何学的に学ぶうえで重要なことは，時空図をマスターすることである．この章の残りで，1.1 節での二つの仮説から，時空図を使って特殊相対論を導こう．時空図は初心者が特殊相対論を学ぶさいに，陥りやすい誤りを，防ぐのにきわめて有効な方法である．図 1.1 に時空の二次元断面 t-x 面と，いくつかの基本的概念を示した．この空間[5] の一点は，x と t がある決った値を

5) ここで“空間”という言葉を，ふつうよりももっと一般的な意味で用いる．ユークリッド的な距離が，物理的な意味をもつようなユークリッド空間を意味せず，むしろ（格子のような離散的な点の集合ではない）連続的な点の集合という意味である．これは 5 章で定義される“多様体”の最初の例である．

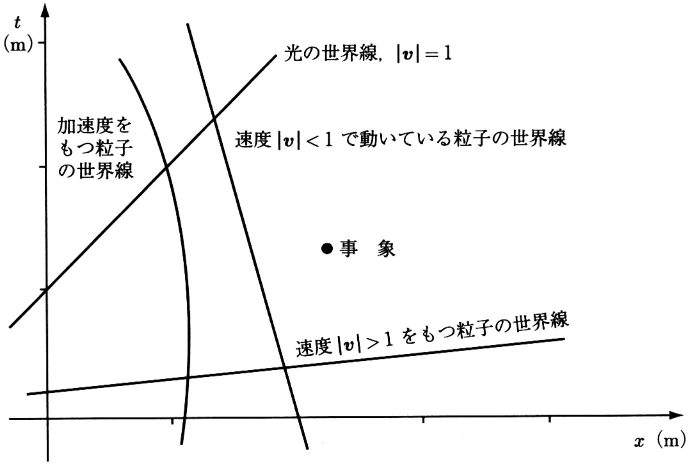


図 1.1 自然単位系での時空図

とった点であり，**事象**とよばれる．曲線は，$x = x(t)$ なる関係式を与え，違った時間である粒子の位置を示している．これをその粒子の**世界線**という．その傾きは粒子の速度と次の関係にある．

$$傾き = \mathrm{d}t/\mathrm{d}x = 1/v$$

光線（光子）は，この図ではつねに傾き 45° の直線となることに注意せよ．

今後，次の規則を用いることにする．

(1) **事象**は草書の大文字 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{P}$ などで表す．ただし $\mathscr{O}$ は観測者を表す．

(2) **座標**は (t, x, y, z) と書く．任意の 4 数の組，たとえば $(5, -3, 2, 10^{16})$ はその座標が $t = 5, x = -3, y = 2, z = 10^{16}$ をもつ事象を表す．いつも時間 t を一番最初に書き，すべての座標はメートルで測る．

(3) (t, x, y, z) をおのおのの成分を区別せず全体として用いることが便利なことも多い．そのときは (x^0, x^1, x^2, x^3) という**別の書き方**をする．上付の添字はべきではなく，単なるラベルである．したがって $(x^3)^2$ は第三の座標（z 座標）の 2 乗を表す．x の 3 乗の 2 乗ではない．**一般**に座標 x^0, x^1, x^2, x^3 を x^α と書く．**ギリシャ文字**の添字（α, β, μ, ν など）は (0,1,2,3) から値をとるものとする．α に特定の値が与えられていないとき，x^α は四つの座標のどれも表す．

(4)　t と (x, y, z) を区別したい場合もある．空間座標だけを表すためにはローマ字を用いる．**ローマ字**の添字（a, b, i, j, k, l など）は $(1, 2, 3)$ から値をとるとする．i に特定の値が与えられていないとき，x^i は三つの空間座標の**どれをも**表す．このギリシャ文字とローマ字の用法は，すべての物理学者に共通したものではない．ある本では $(0, 1, 2, 3)$ に対してローマ字を，$(1, 2, 3)$ に対してギリシャ文字を使ってある．別の本では $a, b, c, \cdots$ を $(0, 1, 2, 3)$ に，i, j, k を $(1, 2, 3)$ に用いている．他の本を読むときには，つねにこの用法を確かめておかねばならない．

1.5　別の観測者による座標系

どんな観測者も単なる時空の座標系であり，すべての観測者が（同じ時空の）同じ事象をみるわけだから，別の観測者からみた時空図上で，ある観測者の座標を描くことができるはずである．このためには特殊相対論の仮説を使わなければならない．

今，座標 $\bar{t}$，$\bar{x}$ をもったある観測者 $\overline{\mathscr{O}}$ が，座標 t，x をもった別の観測者 $\mathscr{O}$ に対して，x 方向に速度 $\boldsymbol{v}$ で動いているとする．$\mathscr{O}$ の描く時空図では，$\bar{t}$ 軸と $\bar{x}$ 軸はどこだろうか?

$\bar{t}$ 軸：これは $\bar{x} = 0$（$\bar{y} = \bar{z} = 0$ でもあるが，ここではそれらを無視する）をもった事象の軌跡であり，$\overline{\mathscr{O}}$ の空間座標の原点の軌跡である．これは $\overline{\mathscr{O}}$ の世界線で図 1.2 に示されたようにみえる．

$\bar{x}$ 軸：これを描くためには $\bar{t} = 0$ の事象，すなわち，$\overline{\mathscr{O}}$ が $\bar{t} = \bar{x} = 0$ の事象と同時であるとみる事象の軌跡を決めなければならない．

まず図 1.3 に示した $\overline{\mathscr{O}}$ の時空図で考える．$\bar{x}$ 軸上の事象は，すべて次の性質をもつ．たとえば，$\bar{t} = -a$ で $\bar{x} = 0$ の事象から放出された光は，$\bar{x}$ 軸の $\bar{x} = a$ に到着する（この事象を $\mathscr{P}$ とよぶ）．もしその光がそこで反射されると，$\bar{t} = a$ で $\bar{x} = 0$ にもどってくる（この事象を $\mathscr{R}$ とよぶ）．したがって任意の a に対して，$\bar{t} = -a$ から出た光が，そこで反射して $\bar{t}$ 軸に $+a$ でもどってくるような事象の軌跡として，$\bar{x}$ 軸が**定義される**．このことを $\mathscr{O}$ の時空図でみたのが図 1.4 である．

すでに図 1.2 で，どこに $\bar{t}$ 軸があるかは知っている．図 1.4 に放出と到着の事

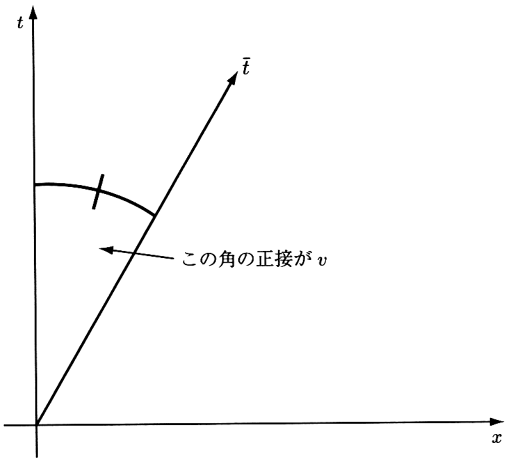


図 1.2　速度 v をもつ系の時間軸

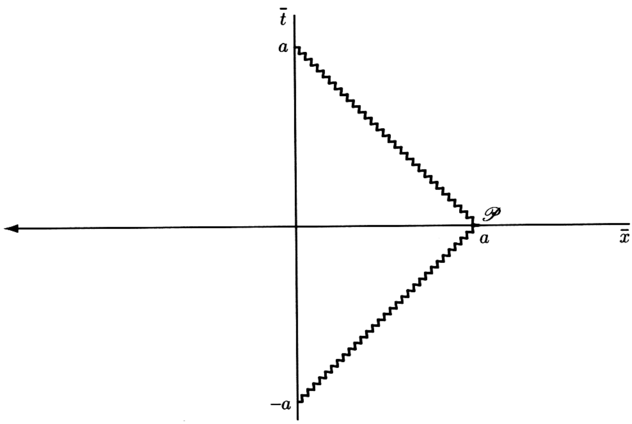


図 1.3　$\overline{\mathscr{O}}$ からみた $\mathscr{P}$ で反射された光

象，$\bar{t}=-a$ と $\bar{t}=a$ が示してある．a は任意だから負の $\bar{t}$ 軸に沿って事象 $\mathscr{E}$ をどこに置こうが問題ではない．したがって，t 軸に対する $\bar{t}$ 軸の目盛づけには，今のところ何の仮定も必要ない．ここで問題になるのは，$\bar{t}$ 軸上の事象 $\mathscr{R}$ が，原点から事象 $\mathscr{E}$ と同じ距離にあるということだけである．次に図 1.3 と同じよ

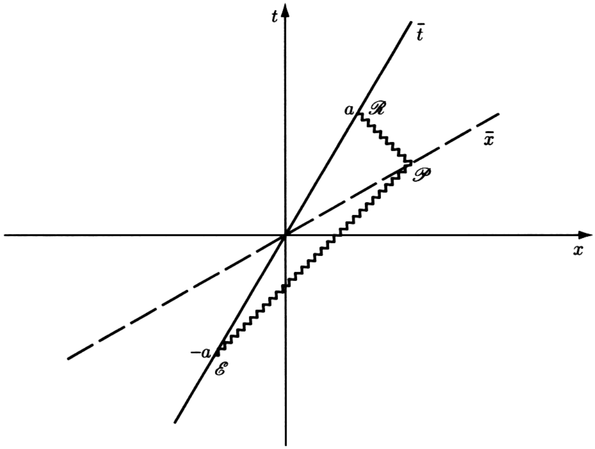


図 1.4　$\mathcal{O}$ からみた図 1.3 の状況

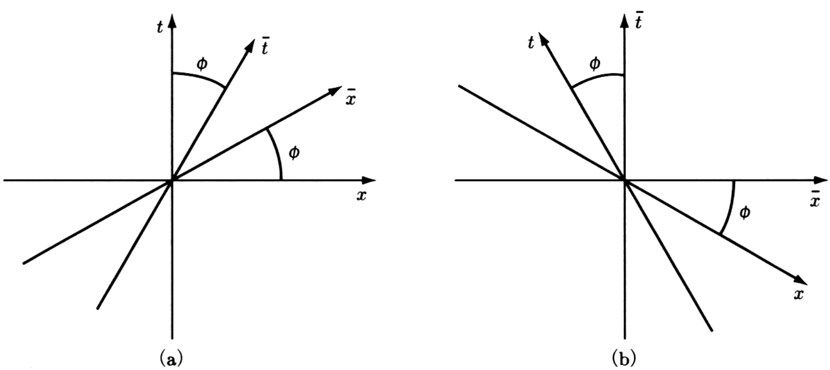


図 1.5　$\mathcal{O}$（左）と $\overline{\mathcal{O}}$（右）からみた時空図

うに，$\mathscr{E}$ から出て，この図で 45° の傾きをもった直線上を走る光の世界線を描く．それの反射光は $\mathscr{R}$ に届くから，その世界線は，$\mathscr{R}$ を通る −45° の傾きをもった直線となる．この二つの世界線の交点が反射が起る事象 $\mathscr{P}$ である．これから図 1.4 での $\mathscr{P}$ の軌跡がわかる．原点とそれを結ぶ線（破線）が，$\bar{x}$ 軸である．それは x 軸と一致しない．この図と前の図を比べると，一致しない理由がわかる．$\bar{t}$ と t 軸が一致しないにもかかわらず，どちらの図でも光は傾き ±45°

の直線上を走るからである．これは**すべての**観測者に対して光の速度は，1（したがって傾き $=1$）であるという特殊相対論の第2の仮説の具現化である．この仮説をこのような幾何学的構成に適用すると，$\overline{\mathcal{O}}$ にとって同時な事象（彼の $\bar{x}$ 軸，$\bar{t}=0$）は，$\mathcal{O}$ にとっては同時でない（x 軸，$t=0$ に平行でない）ことがただちにわかる．こうして絶対的な**同時の概念は崩壊**せざるをえなくなる．

図 1.5 は，同じ物理的情況を表している．左の図は，$\mathcal{O}$ の時空図で，そこでは $\overline{\mathcal{O}}$ が右方向に動いている．一方，右図はこれを $\overline{\mathcal{O}}$ からみた図で，そこでは $\mathcal{O}$ は左に動く．四つの角はすべて，$\tan^{-1}|\boldsymbol{v}|$ に等しい．ここで $\boldsymbol{v}$ は，$\mathcal{O}$ と $\overline{\mathcal{O}}$ の相対速度である．

1.6 間隔の不変性

もちろん $\overline{\mathcal{O}}$ の座標の設定が，これで完全に終ったわけではない．$\overline{\mathcal{O}}$ の座標軸がどこにあるかはわかったが，それに沿っての長さのスケールについては何もわかっていない．間隔の不変性を証明することによって，この長さのスケールを見つけよう．これはたぶん，特殊相対論の最も重要な定理であろう．

図 1.4 の $\mathcal{E}$ と $\mathcal{P}$ のような一つの光の世界線上の2点を考える．ある系 $\mathcal{O}$ での $\mathcal{E}$ と $\mathcal{P}$ の座標の値の差 $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ は，光の速さが1だから $(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2-(\Delta t)^2=0$ という関係を満たす．しかし光速度の不変性から，$\overline{\mathcal{O}}$ の座標での同じ2点間の差 $(\Delta\bar{t}, \Delta\bar{x}, \Delta\bar{y}, \Delta\bar{z})$ も $(\Delta\bar{x})^2+(\Delta\bar{y})^2+(\Delta\bar{z})^2-(\Delta\bar{t})^2=0$ を満たす．ここで座標の値が，$(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ だけ離れた**任意の**二つの（必ずしも一つの光の世界線上にない）事象間の**間隔**を次のように**定義**する[6)]．

◆ $$\Delta s^2 = -(\Delta t)^2+(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2 \tag{1.1}$$

このように定義すると，$\mathcal{O}$ の座標で二つの事象に対し $\Delta s^2=0$ なら，$\overline{\mathcal{O}}$ の座標で同じ二つの事象に対しても $\Delta\bar{s}^2=0$ となる．このことは二つの系の間にどんな関係があることを意味するのだろうか？ この問に答えるため，$\mathcal{O}$ と $\overline{\mathcal{O}}$

6) この式をみるのがはじめての読者は，Δs^2 という記法を Δs という量の2乗ではなく，一つの記号と見なすべきだ．Δs^2 は，正にも負にもなりうるので，この平方根をとるのは都合が悪い．しかし他の本では $\Delta s=\sqrt{\Delta s^2}$ に対して“間隔”という言葉を使い，Δs^2 を“二乗間隔”とよんでいる．また Δs^2 は $\Delta(s^2)$ を意味するのではないことに注意せよ．

の座標の関係は**線形**であり，それらの原点は一致していると仮定しよう．（すなわち事象 $t=x=y=z=0$ と事象 $\bar{t}=\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=0$ が一致する．）すると $\Delta\bar{s}^2$ の表現

$$\Delta\bar{s}^2 = -(\Delta\bar{t})^2 + (\Delta\bar{x})^2 + (\Delta\bar{y})^2 + (\Delta\bar{z})^2$$

で数値 $(\Delta\bar{t}, \Delta\bar{x}, \Delta\bar{y}, \Delta\bar{z})$ は，これらに対応する棒線のついていない量の線形結合となる．これは $\Delta\bar{s}^2$ が棒線のついていない座標の増分の**二次関数**であることを意味する．したがって $\Delta\bar{s}^2$ を次のように書くことができる．

$$\Delta\bar{s}^2 = \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3} M_{\alpha\beta}(\Delta x^\alpha)(\Delta x^\beta) \tag{1.2}$$

ここで $\{M_{\alpha\beta}; \alpha, \beta = 0, \cdots, 3\}$ はある数の集合であり，それは二つの系の相対速度 $\boldsymbol{v}$ の関数である．$\alpha \neq \beta$ のとき和 $M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}$ だけが式 (1.2) に現れるから，すべての α と β に対して $M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}$ と仮定できることに注意せよ．ここでまた $\Delta s^2 = 0$ としよう．すると式 (1.1) から

$$\Delta t = \Delta r, \qquad \Delta r = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]^{1/2}$$

（ここで簡単のため $\Delta t > 0$ とした．）これを式 (1.2) に入れると

$$\Delta\bar{s}^2 = M_{00}(\Delta r)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{3} M_{0i}\Delta x^i\right)\Delta r + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} M_{ij}\Delta x^i \Delta x^j \tag{1.3}$$

$\Delta s^2 = 0$ のとき $\Delta\bar{s}^2$ も 0 にならなければならず，それは任意の $\{\Delta x^i, i = 1, 2, 3\}$ に対して成立することから，次のことが容易にわかる（1.14 節の練習問題 8 参照）．

$$M_{0i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.4a}$$

$$M_{ij} = -(M_{00})\delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1.4b}$$

ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタとよばれ，次のように定義される．

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases} \tag{1.4c}$$

これと式 (1.2) から

$$\Delta\bar{s}^2 = M_{00}[(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2]$$

となることが結論される．もし

$$\phi(\boldsymbol{v}) = -M_{00}$$

として関数 ϕ を定義すると次の定理を証明したことになる．**光速度の不変性により，別々の観測者によって計算される二つの事象の間の間隔 $\Delta\bar{s}^2$ と Δs^2 は次の関係を満足する．**

$$\Delta\bar{s}^2 = \phi(\boldsymbol{v})\Delta s^2 \tag{1.5}$$

次に実際に $\phi(\boldsymbol{v}) = 1$ であることを示す．これは間隔が観測者によらないということである．この証明は二つの部分からなる．まず ϕ が $|\boldsymbol{v}|$ だけによることを示す．$\overline{\mathscr{O}}$ の $\mathscr{O}$ に対する速度 $\boldsymbol{v}$ に直交するような棒を考える．その棒が，$\mathscr{O}$ で静止しており，y 軸に沿っているとする．$\mathscr{O}$ の時空図（図 1.6）上にその棒の両端の世界線と，その間の領域を斜線で示した．この棒の長さの 2 乗が，$\mathscr{O}$ で同時に棒の両端で起る二つの事象 $\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ の間の間隔であることは容易にわかる．これはそれらの事象に対し $(\Delta x)_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = (\Delta z)_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = (\Delta t)_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = 0$ だからである．ここで最初の部分の証明の鍵となる，事象 $\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ が $\overline{\mathscr{O}}$ からみても同

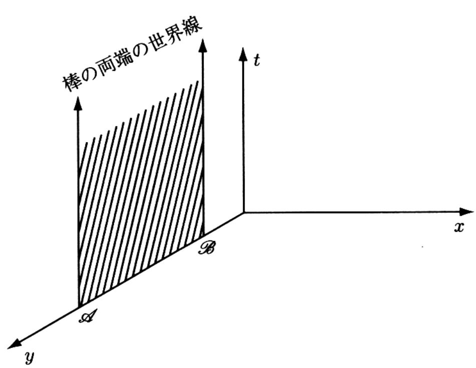


図 1.6 $\mathscr{O}$ で y 軸に沿って静止している棒

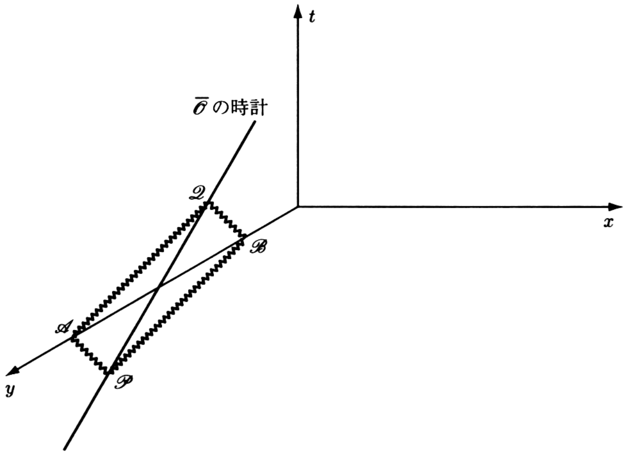


図 1.7　系 $\mathscr{O}$ に対して x 方向に動いている系 $\overline{\mathscr{O}}$ の時計

時であることを示す．その理由は図 1.7 に示した方法で最も簡単にみることができる．この図は図 1.6 と同じであるが，$\overline{\mathscr{O}}$ のもつ時計の世界線が描いてある．この線は y 軸に垂直であり，t-x 面に平行，すなわち図 1.5 (a) に示した $\bar{t}$ 軸に平行になっている．

この時計が，事象 $\mathscr{P}$ で光を発射して，それが事象 $\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ に届いたとする．(すべての時計がこうできるわけではないから，y 軸を $t=0$ に通り，そのような光線を出すことのできる時計を選ぶ.) 図から (図を立体的にみることができれば) $\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ で反射した光線は，$\overline{\mathscr{O}}$ の時計に同じ事象 $\mathscr{Q}$ で戻ってくることがわかる．したがって，$\overline{\mathscr{O}}$ からみて，二つの事象は同時に起る．(これは，x 軸を決めたのと同じ方法である.) しかしもし $\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ が，$\overline{\mathscr{O}}$ で同時ならば，$\overline{\mathscr{O}}$ でのそれらの間の間隔は，$\overline{\mathscr{O}}$ でのその長さの 2 乗でもある．その結果

$$(\overline{\mathscr{O}}\text{ での棒の長さ})^2 = \phi(\boldsymbol{v})(\mathscr{O}\text{ での棒の長さ})^2$$

一方，棒の長さは速度の**方向**にはよらない．なぜなら棒は速度に直交しており，どんな特定の運動の方向も存在しない (相対性原理) からである．したがって証明の最初の部分が導かれた．

$$\phi(\boldsymbol{v}) = \phi(|\boldsymbol{v}|) \tag{1.6}$$

第二のステップはもっと簡単である．相対性原理を使って $\phi(|\boldsymbol{v}|) = 1$ を示す．三つの系 $\mathcal{O}, \overline{\mathcal{O}}, \overline{\overline{\mathcal{O}}}$ を考える．系 $\overline{\overline{\mathcal{O}}}$ は $\overline{\mathcal{O}}$ に対して x 軸の負の方向に速度 $\boldsymbol{v}$ で運動しているとする．$\overline{\overline{\mathcal{O}}}$ は $\mathcal{O}$ と同一であることは明らかであるが，しばらくの間，別の名前をつけておく．式 (1.5) と式 (1.6) から

$$\left.\begin{aligned}\Delta\overline{\overline{s}}^2 &= \phi(v)\Delta\overline{s}^2 \\ \Delta\overline{s}^2 &= \phi(v)\Delta s^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta\overline{\overline{s}}^2 = [\phi(v)]^2\Delta s^2$$

しかし $\mathcal{O}$ と $\overline{\overline{\mathcal{O}}}$ は同一だから $\Delta\overline{\overline{s}}^2$ と Δs^2 は等しい．したがって

$$\phi(v) = \pm 1$$

証明の最初の部分から棒の長さの 2 乗は正でなければならないので，プラス符号を選ぶ．こうして次の基本定理が得られた．**任意の二つの事象の間隔は，どの慣性観測者が計算しても一致する．**

$$\blacklozenge \qquad \Delta\overline{s}^2 = \Delta s^2 \tag{1.7}$$

この証明の最初の部分から，**二つの系の相対速度に直交する棒の長さは，どちらの系で測っても同じであること**が導かれる．また図 1.7 の方法から，関連した次の結果が導かれることをいっておく価値がある．**ある系で同時な二つの事象は，それらを結ぶ線に直交する方向に動いているすべての系でも同時である．**

Δs^2 は二つの事象だけの性質であり，観測者の性質ではないから，事象どうしの関係を分類するのに使うことができる．もし Δs^2 が正ならば（したがって空間部分の増分が Δt よりも大きい)，二つの事象は**空間的に離れている**という．また Δs^2 が負ならば，**時間的に離れている**という．Δs^2 がゼロ（したがって二つの事象は同じ光の世界線上にある）のとき，それらの事象は**光的**あるいは**ヌル的に離れている**という．

任意の特定の事象 $\mathscr{A}$ から光的に離れている事象は $\mathscr{A}$ を頂点とする円錐上にのる．図 1.8 にこの円錐を示した．これを $\mathscr{A}$ の**光円錐**とよぶ．光円錐の中のすべての事象は $\mathscr{A}$ から時間的に離れており，その外にある事象は空間的に離れている．したがって光円錐の中のすべての事象は，至るところ時間的な方向に動いている世界線によって $\mathscr{A}$ から到達することができる．何ものも光速以上に

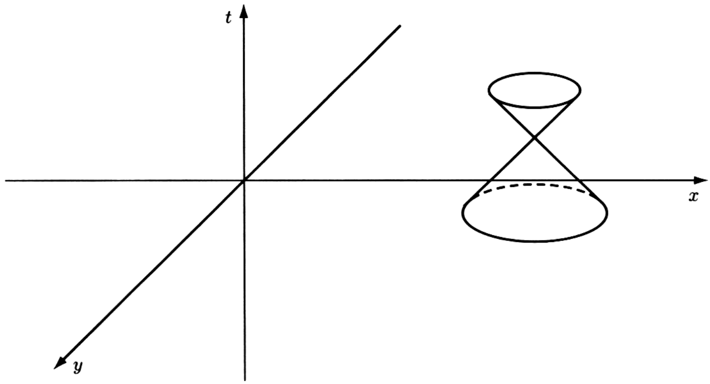


図 1.8　ある事象の光円錐．次元 z は描かれていない．

は動けないことがあとでわかるから，物理的な物体のすべての世界線は時間的な方向に動く．こうして光円錐のなかの事象には $\mathscr{A}$ から物理的な物体が到達することができるが，その外ではそうはならない．このため“未来”あるいは“前方”光円錐の中の事象のことを頂点の**絶対未来**，“過去”あるいは“後方”光円錐の中の事象を**絶対過去**という．これに対して光円錐の外側の事象を**絶対的な非因果的領域**とよぶ．したがって光円錐上の事象は絶対過去と絶対未来の境界である．こうして特殊相対論では“時間”と“空間”はある意味ではお互いに変換しあうが，“過去”と“未来”とをある不変的な意味で問題にできることを理解しなければならない．Galileo や Newton にとっては，過去とは現在“以前”のすべてであった．時空全体は過去と未来の和であり，その境界が“現在”であった．特殊相対論では過去は過去光円錐に含まれる領域だけであり，時空は不変的に **3 分割**される．つまり“非因果的領域”という概念がつけ加わる．さらにどの観測者もどの事象がある与えられた事象の過去，未来，非因果的領域になるかについては（間隔が不変なので）一致するが，別々の事象は**違った**過去と未来をもつ．どの二つの事象も部分的には重なることもあるが，同一の過去と未来をもつことはない．この事情を図 1.9 に示す．

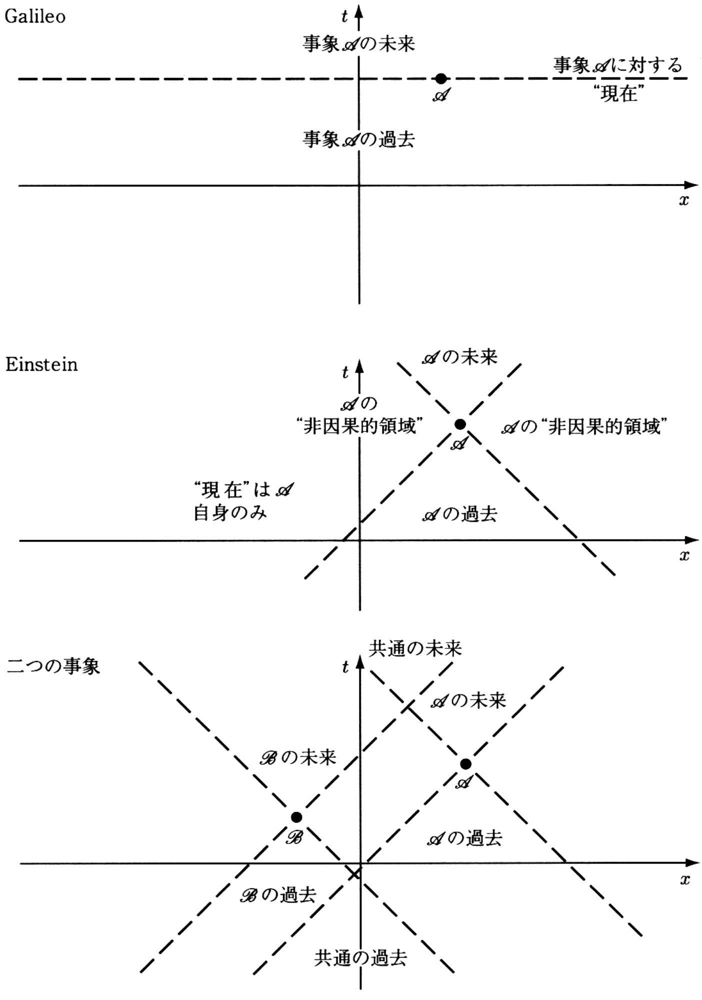


図 1.9 古い時空概念と新しい時空概念

1.7 不変双曲線

これで $\mathcal{O}$ の時空図，図 1.5 での，$\overline{\mathcal{O}}$ の座標軸の目盛づけができる．t-x 面だけを考えよう．次の方程式をもった曲線を考える．

$$-t^2 + x^2 = a^2$$

ここで a は実定数である．これは $\mathcal{O}$ の時空図で双曲線であり，原点からの間隔が，a^2 であるすべての事象を通る．間隔の不変性からそれらの事象は，$\overline{\mathcal{O}}$ の原点からも間隔 a^2 をもち，したがって曲線 $-\bar{t}^2 + \bar{x}^2 = a^2$ 上にのる．これは原点から空間的に離れた双曲線である．同様に次の曲線

$$-t^2 + x^2 = -b^2$$

にのる事象はすべて原点から時間的な間隔 $-b^2$ をもち，また曲線 $-\bar{t}^2 + \bar{x}^2 = -b^2$ 上にものる．これらの双曲線を図 1.10 に描いた．それらはすべて，原点を通る光の経路である，傾き ± 1 の直線に漸近的に近づいていく．3 次元の図（図 1.8 のように y 軸を加えた図）では，双曲線を t 軸のまわりに回転した面は漸近的に光円錐に近づく．

次に $\overline{\mathcal{O}}$ の軸の目盛づけをしよう．図 1.11 で $\mathcal{O}$ と $\overline{\mathcal{O}}$ の軸と原点から時間的間隔 -1 の不変双曲線が描いてある．事象 $\mathscr{A}$ は，t 軸上にあり，したがって $x = 0$ である．双曲線の方程式は

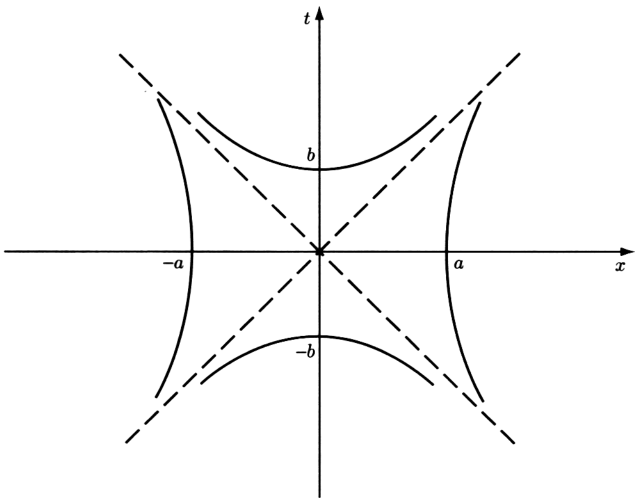


図 1.10　$a > b$ のときの不変双曲線

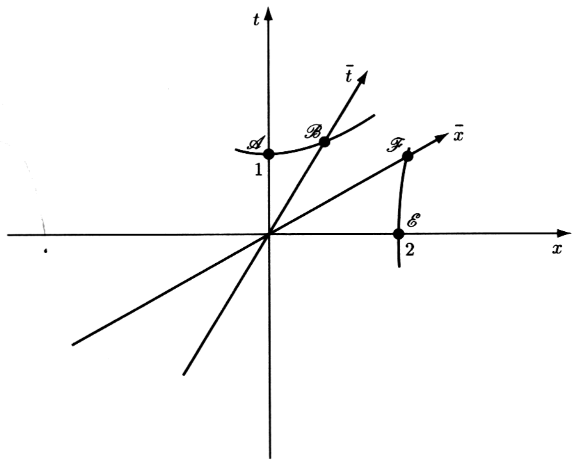


図 1.11 事象 $\mathscr{A}$ と $\mathscr{E}$ を通る双曲線を用いた $\bar{x}$ 軸と $\bar{t}$ 軸の目盛づけ

$$-t^2 + x^2 = -1$$

だから，事象 $\mathscr{A}$ で $t = 1$ となる．同様に事象 $\mathscr{B}$ は $\bar{t}$ 軸上にあるから，$\bar{x} = 0$ であり，双曲線の方程式は

$$-\bar{t}^2 + \bar{x}^2 = -1$$

でもあるから，事象 $\mathscr{B}$ で $\bar{t} = 1$ となる．したがって双曲線を用いて，$\bar{t}$ 軸が目盛づけられた．同様に，不変双曲線

$$-t^2 + x^2 = 4$$

を考えると，事象 $\mathscr{E}$ は座標 $t = 0$，$x = 2$ をもち，事象 $\mathscr{F}$ は $\bar{t} = 0$，$\bar{x} = 2$ をもつ．この種の双曲線は，$\overline{\mathscr{O}}$ の空間軸を目盛づける．

事象 $\mathscr{B}$ は，事象 $\mathscr{A}$ よりも原点から遠くにあるようにみえることに注意せよ．このことはユークリッド幾何学にもとづく幾何学的直観を使うことが，不適当であることを示している．ここでの重要な物理量はユークリッド的な長さ $(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$ ではなく間隔 $-(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$ である．相対論を学ぶ読者は，Δs^2 を時空の“距離”の物理的物差しとして使うことに慣れ，これにもとづいた

直観をもたなければならない．このことはもちろん日常の経験と矛盾するものではない．日常経験では“空間”（たとえば $t=0$ の時空の断面）はユークリッド空間である．$\Delta t=0$ をもつ（観測者 $\mathscr{O}$ にとって同時な）事象に対して，間

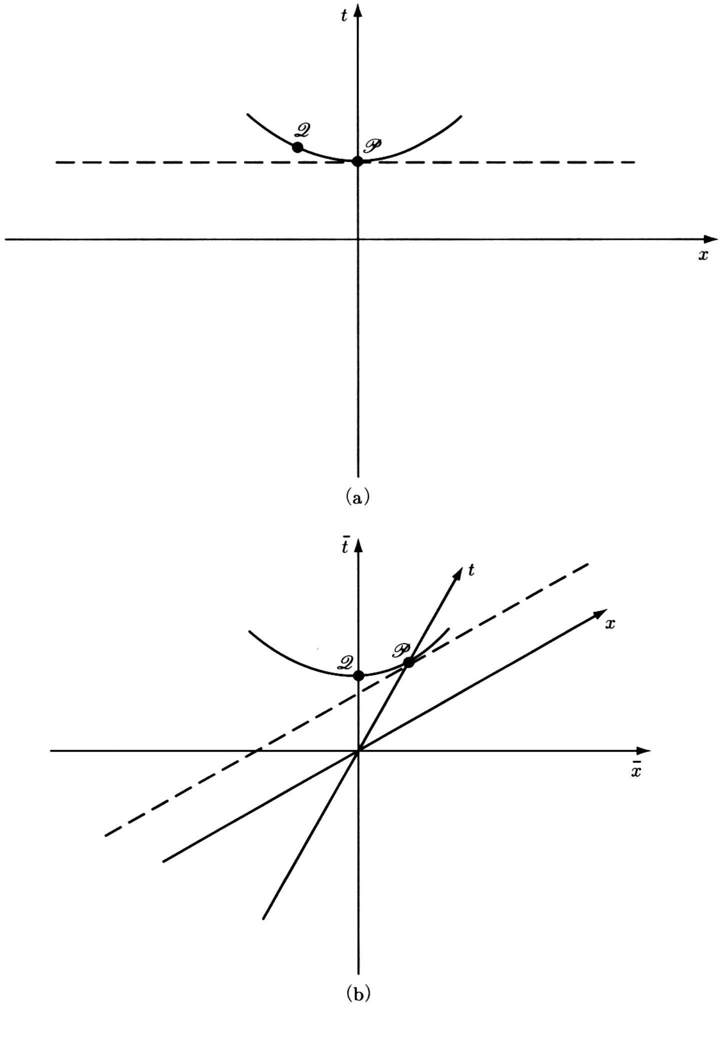


図 1.12　(a) $\mathscr{O}$ の同時刻の線は，$\mathscr{P}$ での双曲線の接線である．(b) $\overline{\mathscr{O}}$ からみた同じ接線．

隔は

$$\Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

であり，これはまさにユークリッド的距離である．特殊相対論の新しい性質は時間が距離の計算に入りうる，また入らねばならないということである．別々の観測者はそれぞれ違った事象の集合を同時と見なすから（図 1.5），"空間" を一意的に定義することはできない．しかし，時間的な変化は，Δs^2 の中で空間部分とは反対の符号をもつから，時間と空間には依然として区別がある．

次節でこの双曲線を使って時間の遅れとローレンツ収縮を導くが，そのために単純なことではあるが，非常に重要な双曲線の接線の性質を指摘しておく必要がある．

図 1.12 (a) に一つの双曲線と，$x = 0$ でのその接線を描いた．明らかにその接線は，$t =$ 一定の同時の直線である．図 1.12 (b) では同じ曲線を，$\mathcal{O}$ に対して左向きに動いている観測者の観点から描いた．事象 $\mathcal{P}$ は右側に移っている．これはローレンツ変換を適切に選ぶことにより双曲線上のどの位置にも移すことができるからである．この図から任意の事象 $\mathcal{P}$ での双曲線の接線は，その時間軸が $\mathcal{P}$ と原点を結ぶ直線であるようなローレンツ系での同時の線であることがわかる．もしこの系が速度 $\boldsymbol{v}$ をもつなら，その接線の傾きは $\pm 1/|\boldsymbol{v}|$ である．

1.8 重 要 な 結 果

時間の遅れ　図 1.11 とそれにもとづいた計算から $\bar{t}$ 軸上を運動している時計が $\mathcal{B}$ に着いたとき，$\bar{t} = 1$ という読みを示すが，事象 $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}$ では座標 $t = 1/\sqrt{1 - v^2}$ をもつ．したがって $\mathcal{O}$ にとってはその時計はゆっくりと進んでいるようにみえる：

$$(\Delta t)_{\text{measured in } \mathcal{O}} = \frac{(\Delta \bar{t})_{\text{measured in } \bar{\mathcal{O}}}}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{1.8}$$

$\Delta \bar{t}$ は原点から $\mathcal{B}$ への世界線上を動く単一の時計によって実際に測られる時間であり，一方 Δt は $\mathcal{O}$ からみて原点と事象 $\mathcal{B}$ で静止している二つの時計の読みの差であることに注意せよ．このことについてはあとでもう一度考える．

今は事象 $\mathscr{B}$ と原点の間の固有時間を，その両方の事象を実際に通過する時計によって刻まれた時間として定義する．これは直接観測可能な量であり，間隔と密接な関係をもっている．その時計が系 $\overline{\mathscr{O}}$ で静止しているとすると，固有時間 $\Delta\tau$ は座標時間 $\Delta\bar{t}$ と同じである．すると時計は $\overline{\mathscr{O}}$ で静止しているのだから $\Delta\bar{x} = \Delta\bar{y} = \Delta\bar{z} = 0$ であり，したがって

$$\Delta s^2 = -\Delta\bar{t}^2 = -\Delta\tau^2 \tag{1.9}$$

このように**固有時間とは単に間隔にマイナスをつけたものの平方根にすぎない．**間隔を $\mathscr{O}$ の座標での量で書くと次のようになる．

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= [(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2]^{1/2} \\ &= \Delta t\sqrt{1-v^2}\end{aligned} \tag{1.10}$$

これはもとにもどって時間の遅れの式である．

ローレンツ収縮　図 1.13 に $\overline{\mathscr{O}}$ で静止している棒の両端の世界線を示した．$\overline{\mathscr{O}}$ でのその長さは $\Delta\bar{s}^2_{\mathscr{A}\mathscr{C}}$ の平方根であり，一方 $\mathscr{O}$ でのその長さは $\Delta s^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}}$ の平方根となる．もし事象 $\mathscr{C}$ が座標 $\bar{t}=0$, $\bar{x}=l$ ならば前とまったく同じ計算から，それは $\mathscr{O}$ で次の x 座標をもつ；

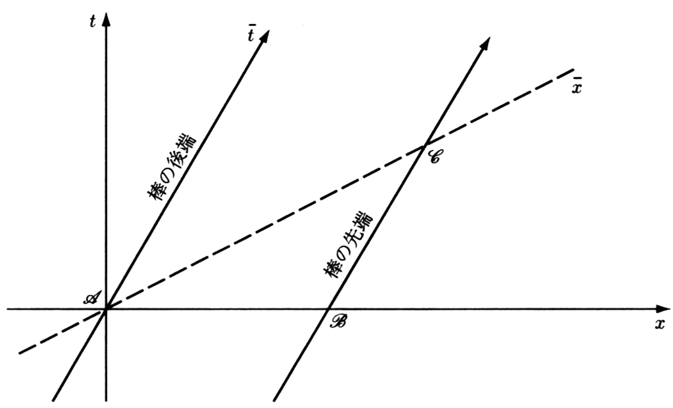


図 1.13　$\mathscr{A}\mathscr{C}$ の固有長さはその静止系での棒の長さであり，$\mathscr{A}\mathscr{B}$ の固有長さは，$\mathscr{O}$ でのその長さである．

$$x_{\mathscr{C}} = l/\sqrt{1-v^2}$$

$\bar{x}$ 軸は直線 $t = vx$ だから

$$t_{\mathscr{C}} = vl/\sqrt{1-v^2}$$

となる．直線 $\mathscr{BC}$ は t 軸に対して傾き

$$\Delta x/\Delta t = v$$

をもつから

$$\frac{x_{\mathscr{C}} - x_{\mathscr{B}}}{t_{\mathscr{C}} - t_{\mathscr{B}}} = v$$

$t_{\mathscr{B}} = 0$ のときの $x_{\mathscr{B}}$ を知りたいわけだから

$$\begin{aligned} x_{\mathscr{B}} &= x_{\mathscr{C}} - vt_{\mathscr{C}} \\ &= \frac{l}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{v^2 l}{\sqrt{1-v^2}} = l\sqrt{1-v^2} \end{aligned} \tag{1.11}$$

これがローレンツ収縮を表す式である．

慣用法　間隔 Δs^2 は特殊相対論で最も重要な数学的概念の一つであるが，その定義には普遍的な一致がみられない．多くの本で，$\Delta s^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$ と定義している．Δs^2 の不変性は，$-\Delta s^2$ の不変性を意味するから，この全体の符号は（以前に注意したローマ字とギリシャ文字の用法のような）便宜的なものである．物理的に重要なことは，この量の不変性だけで，それは $(\Delta t)^2$ と $[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]$ の間の符号の違いからきている．他の本を読むときには他の慣用法とともに，Δs^2 の符号についてもどちらを使っているか知っておかねばならない．その違いは，たとえば式 (1.9) のようなすべての種類の公式に影響する．

相対論は誤り？　特殊相対論を習いたての人や，十分に理解していない人は，しばしばこの時点で理論が首尾一貫していないのではないかと疑いをもつ．われわれはすべての観測者が同等であるという相対性原理を仮定することから出発した．それにもかかわらず，この節では，もし $\bar{\mathscr{O}}$ が $\mathscr{O}$ に対して運動していると，$\mathscr{O}$ の測った $\bar{\mathscr{O}}$ の時計は自分の時計よりもゆっくりと進んでいることが

示された．このことは，$\overline{\mathscr{O}}$ が $\mathscr{O}$ の時計を測ると自分の時計よりも速く進んでいることを意味しないだろうか？　もしそうなら，相対性原理を破ることになる．なぜなら議論を $\overline{\mathscr{O}}$ から始めると，$\mathscr{O}$ の時計が $\overline{\mathscr{O}}$ の時計よりもゆっくり進むことが容易に導かれるからである．

これが“パラドックス”として知られるものであるが，特殊相対論のすべての“パラドックス”と同様，誤った推論にもとづいている．時空図を用いて，$\overline{\mathscr{O}}$ が測っても自分の時計より $\mathscr{O}$ の時計の方が，ゆっくりと進むことを示そう．$\overline{\mathscr{O}}$ の観点から時空図を書けば明らかであるが，$\mathscr{O}$ の時空図で考えるほうがより教育的である．

別々の観測者は，ある種の実験結果については一致する．たとえば，ある人がコインをはじいて裏，表をみる場合，その結果はすべての観測者にとって同じである．同様に，二つの時計がすぐ近くにあれば，どちらの時計が他方より前の時刻を指しているかについてすべての観測者は一致する．しかし，どちらの時計がゆっくり進んでいるかという問題は，二つの時計を違った時刻で比べることによってのみ答えることができる．一つの時計が，他方に対して運動している場合，それら二つの時計は，ある一時刻でのみ，お互いにすぐ近くにある．違った時刻では，ある距離だけ離れて比べねばならず，違う観測者は違った結論を出す．これは彼らが，実際に同等でない違う実験をするからである．以下の議論において，おのおのの観測者は二つの自分の時計と，別の観測者の一つの時計を使うことをみるだろう．実験の“デザイン”のこの非対称性が，非対称的な結果を与える．

まず図 1.14 の $\mathscr{O}$ の観測を検討しよう．これは（$\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}$ へ運動する）一つの $\overline{\mathscr{O}}$ の時計の読みを，$\mathscr{O}$ の二つの時計の読みと比べている．一つは原点にあり，事象 $\mathscr{A}$ で $\overline{\mathscr{O}}$ の時計を読み，もう一つは $t=0$ に $\mathscr{F}$ にあり，$\overline{\mathscr{O}}$ の時計と $\mathscr{B}$ で出会う．この $\mathscr{O}$ の第二の時計は，第一の時計と平行に縦の破線上を動く．$\mathscr{O}$ は $\mathscr{A}$ で両方の時計が $t=0$ を指し，$\mathscr{B}$ では $\overline{\mathscr{O}}$ の時計が $\bar{t}=1$，$\mathscr{O}$ の時計がそれより後の時刻 $t=(1-v^2)^{-1/2}$ を指すという．明らかに $\overline{\mathscr{O}}$ は，$\mathscr{O}$ がみるように時計の文字盤をみることができるから，これについては一致する．しかし，$\overline{\mathscr{O}}$ の時計がゆっくり進んでいると $\mathscr{O}$ が主張するには，彼の二つの時計が同時化されていなければならない．さもないと $\mathscr{B}$ で $\overline{\mathscr{O}}$ の時計が自分の時計に比

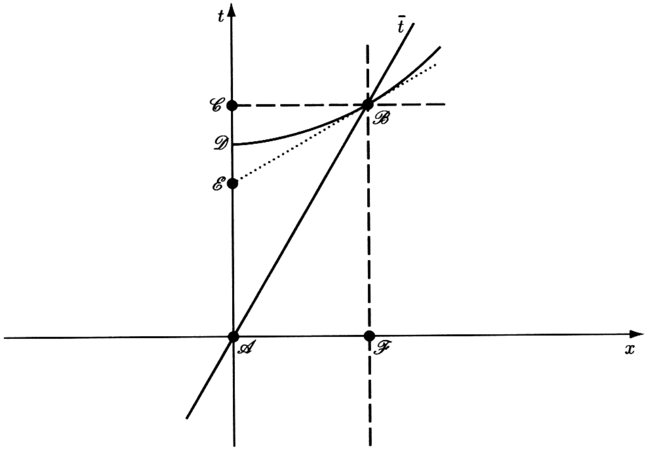


図 1.14 $\mathscr{AB}$ の固有長さは，$\overline{\mathscr{O}}$ で静止している時計によって測られた時間であり一方 $\mathscr{AE}$ の固有長さは $\mathscr{O}$ によって測られた時間である

べて遅れているという観測には何の特別な意味もない．$\mathscr{O}$ の観点からは，$\mathscr{O}$ の時計は同時化され，測定とその結論は正しい．実際にそれは $\mathscr{O}$ が正しく下しうる唯一の結論である．

しかし $\overline{\mathscr{O}}$ が，その結論を受け入れる必要はない．なぜなら彼にとって，$\mathscr{O}$ の時計は同時化されていないからである．$\mathscr{B}$ を通る点線は，$\overline{\mathscr{O}}$ が $\mathscr{B}$ と同時と見なす事象の軌跡である．事象 $\mathscr{E}$ はこの線上にあり，これは $\overline{\mathscr{O}}$ が事象 $\mathscr{B}$ と同時と見なす $\mathscr{O}$ の第一の時計の時刻である．簡単な計算から，それは $t=(1-v^2)^{1/2}$ であり，$\mathscr{O}$ の第二の時計が，$\mathscr{B}$ で指す値 $(1-v^2)^{-1/2}$ よりも以前となる．したがって $\overline{\mathscr{O}}$ にとって時計は同時化されておらず，$\overline{\mathscr{O}}$ は $\mathscr{O}$ の測定を拒否することができる．さらに $\overline{\mathscr{O}}$ が $\mathscr{O}$ の第一の時計を検討すれば，自分の時計が $\bar{t}=0$ から $\bar{t}=1$ まで（すなわち $\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}$ まで）進む間に，$\mathscr{O}$ の時計は $t=0$ から $t=(t-v^2)^{1/2}$ まで（すなわち $\mathscr{A}$ から $\mathscr{E}$ まで）しか進んでいないと結論するだろう．したがって $\overline{\mathscr{O}}$ は，$\mathscr{O}$ の時計が自分の時計に比べてゆっくり進むと見なすだろう．

こうして相対性原理に矛盾はないことが導かれる．おのおのの観測者は，他

の時計がゆっくり進むと見なす．不一致のようにみえるのは，彼らが違ったことを測定しているからである．観測者 $\mathscr{O}$ は，$\mathscr{A}\mathscr{B}$ の間隔と，$\mathscr{A}\mathscr{C}$ の間隔を比べるが，観測者 $\overline{\mathscr{O}}$ は，$\mathscr{A}\mathscr{B}$ の間隔と $\mathscr{A}\mathscr{E}$ の間隔を比べている．どの観測者もおのおのの間隔の値については一致する．しかし時計の進む割合を決めるのに，どの二つの時計を使うかについて，一致していない．この不一致は，どの事象が同時であるかについて，観測者間に一致がみられない事実に直接起因している．理解すべきことをもう一度くり返そう．同時性（時計の同時化）が，時計を比べる場合の核心である．$\mathscr{O}$ は自分の二つの時計を使って $\overline{\mathscr{O}}$ の一つの時計の進む割合を測り，一方 $\overline{\mathscr{O}}$ は自分の二つの時計を使って $\mathscr{O}$ の一つの時計を測っているのである．

この不一致は困ったことであろうか？　そうではないが，相対論を学ぶものを非常に注意深くさせる．違った観測者が時計の進む割合について，あるいは同時性について不一致であることは，単にそのような概念が不変でないことを意味するにすぎない．それらは座標系のとり方に依存した概念である．しかしこのことは，任意の観測者がそのような概念を自分だけで首尾一貫して使うことを妨げるものではない．たとえば，$\mathscr{O}$ は，$\mathscr{A}$ と $\mathscr{F}$ が同時であるといい，それらはそれらの事象が同じ t の値をもつという意味において正しい．彼にとって，それは事象の時空での位置を決める助けとなるので，有用な概念である．どんな観測者も一人ならば，彼自身にとって正しい概念を使って，首尾一貫した観測をすることができる．その概念が，別の観測者には通用しないだけである．すべての相対論のいわゆるパラドックスは，単一の観測者の推論の矛盾を含むものではなく，実際には観測者に依存する概念を観測者によらないと仮定することの矛盾からきている．

ローレンツ変換の計算に進む前に，次の 2 点について注意しておこう．まず，われわれは "時計" が何であるか定義していない．したがって上で述べたことは，どんな時を刻むものに対してもあてはまる：原子時計，腕時計，生物の 24 時間リズム，素粒子の半減期．実際にすべての時間が上に述べた効果により，"ゆっくり" 進む．もっと適切にいえば，時間の遅れは，同時性の絶対性の破綻の結果であり，時計の物理的構成には何の関係もなく，**自分の**時計だけをみている観測者には決して認識できない．観測者 $\overline{\mathscr{O}}$ は，自分のすべての時計が，心

理的な時間を含めお互いに同じ割合で進むと考える．したがって，それらすべては $\mathcal{O}$ が測れば，ゆっくり進む．このことは，あとで述べる双子の“パラドックス”をつくりだす．

第二に，われわれの観測者は，実験をするにあたってできる限りの注意を払っており，これらの効果は目の錯覚ではない．習いたての学生は，しばしば信号の伝達速度が有限であるために問題が起ると確信するが，それは誤りである．観測者は，観測者 $\overline{\mathcal{O}}$ に対しての“現在”を，1.5 節で述べたように定義する．これは最も合理的な方法である．二人の観測者がおのおの最も合理的な方法で“現在”を定義するとき，彼らは一致をみないということが問題なのである．これは光の速度の不変性の避けがたい結果である．

1.9　ローレンツ変換

次に特殊相対論の代数的性質をしらべることにより，幾何学的な推論にあまりよらないで議論をしよう．その代数的性質とはローレンツ変換とよばれ，$\overline{\mathcal{O}}$ の座標を $\mathcal{O}$ の座標でもって表す関係である．一般性を失うことなく，$\overline{\mathcal{O}}$ が $\mathcal{O}$ に対しての正の x 軸方向に速さ v で動いているような座標軸をとることができる．x 軸に垂直な方向の長さは $\mathcal{O}$ からみても $\overline{\mathcal{O}}$ からみても同じである．したがってわれわれの考える必要のある最も一般的な線形変換は次のように書ける．

$$\bar{t} = \alpha t + \beta x, \qquad \bar{y} = y$$

$$\bar{x} = \gamma t + \sigma x, \qquad \bar{z} = z$$

ここで α，β，γ，σ は v にのみ依存する．

1.5 節（図 1.4）での構成から，$\bar{t}$ 軸と $\bar{x}$ 軸が次の式を満たすことは明らかである．

$$\bar{t}\text{軸}\ (\bar{x} = 0) : vt - x = 0$$

$$\bar{x}\text{軸}\ (\bar{t} = 0) : vx - t = 0$$

この軸の式からそれぞれ次の関係が導かれる：

$$\gamma/\sigma = -v, \quad \beta/\alpha = -v$$

これから

$$\bar{t} = \alpha(t - vx)$$
$$\overline{x} = \sigma(x - vt)$$

図 1.4 からもう一つの情報を得ることができる．事象 $(\bar{t} = 0,\ \overline{x} = a)$ と $(\bar{t} = a,\ \overline{x} = 0)$ は一つの光の経路でつながっている．これから容易に $\alpha = \sigma$ が導かれる．したがって，幾何学だけから次式が得られる．

$$\bar{t} = \alpha(t - vx)$$
$$\overline{x} = \alpha(x - vt)$$

次に間隔の不変性を使う：

$$-(\Delta\bar{t})^2 + (\Delta\overline{x})^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$$

これから簡単な計算の後，次式が導かれる．

$$\alpha = \pm 1/\sqrt{1 - v^2}$$

$v = 0$ のとき，座標の反転ではなく，恒等変換にするためには，上式で + を選ばなければならない．したがって結局，完全なローレンツ変換は次のようになる：

$$\begin{aligned}
&\blacklozenge \quad \bar{t} = \frac{t}{\sqrt{1 - v^2}} - \frac{vx}{\sqrt{1 - v^2}} \\
&\blacklozenge \quad \overline{x} = \frac{-vt}{\sqrt{1 - v^2}} + \frac{x}{\sqrt{1 - v^2}} \\
&\blacklozenge \quad \overline{y} = y \\
&\blacklozenge \quad \overline{z} = z
\end{aligned} \tag{1.12}$$

これが，x 方向への速度 v のブーストとよばれるものである．

これが $\overline{\mathcal{O}}$ と $\mathcal{O}$ の座標の関係の最も簡単な形である．この形を適用するためには空間軸が特別の方向に向いていなければならない．$\mathcal{O}$ からみて $\overline{\mathcal{O}}$ は x 軸の正の方向に速度 v で動いていなければならず，$\overline{\mathcal{O}}$ の軸は対応する $\mathcal{O}$ の軸に平行でなければならない．お互いに関する空間軸の回転により式 (1.12) よりも複

雑な関係式が得られるが，式 (1.12) でもって以下の議論を進めていくことができる．

1.10 速度の合成則

ローレンツ変換は，時間の遅れやローレンツ収縮などの標準的な公式を導くのに必要なすべての情報を含んでいる．使い方の例としてガリレオの速度の合成則（1.1 節）を一般化してみよう．

いま，ある粒子が $\overline{\mathcal{O}}$ の $\bar{x}$ 軸方向に速度 W で動いている，すなわち $\Delta\bar{x}/\Delta\bar{t} = W$ とする．別の系 $\mathcal{O}$ ではその速度は $W' = \Delta x/\Delta t$ となり，Δx と Δt をローレンツ変換から求めることができる．もし $\overline{\mathcal{O}}$ が速度 v で $\mathcal{O}$ に対して動いているとすると，式 (1.12) から

$$\Delta x = (\Delta\bar{x} + v\Delta\bar{t})/\sqrt{1-v^2}$$
$$\Delta t = (\Delta\bar{t} + v\Delta\bar{x})/\sqrt{1-v^2}$$

となるから，

$$\begin{aligned} W' &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(\Delta\bar{x} + v\Delta\bar{t})/\sqrt{1-v^2}}{(\Delta\bar{t} + v\Delta\bar{x})/\sqrt{1-v^2}} \\ &= \frac{\Delta\bar{x}/\Delta\bar{t} + v}{1 + v\Delta\bar{x}/\Delta\bar{t}} = \frac{W+v}{1+Wv} \end{aligned} \tag{1.13}$$

これがアインシュタインの速度の合成則である．大事な点はもし $|W|$ と $|v|$ がともに 1 より小さければ，$|W'|$ は決して 1 を超えないということである．これをみるには，上式で $W' = 1$ とおくと

$$(1-v)(1-W) = 0$$

となる．すなわち v か W のどちらかが 1 でなければならない．したがって二つの光速以下の速度を合成すると別の光速以下の速度が得られる．さらにもし $W = 1$ なら v のいかんにかかわらず $W' = 1$ となる．これは光速の不変性の表現である．さらにもし $|W| \ll 1$, $|v| \ll 1$ なら式 (1.13) は

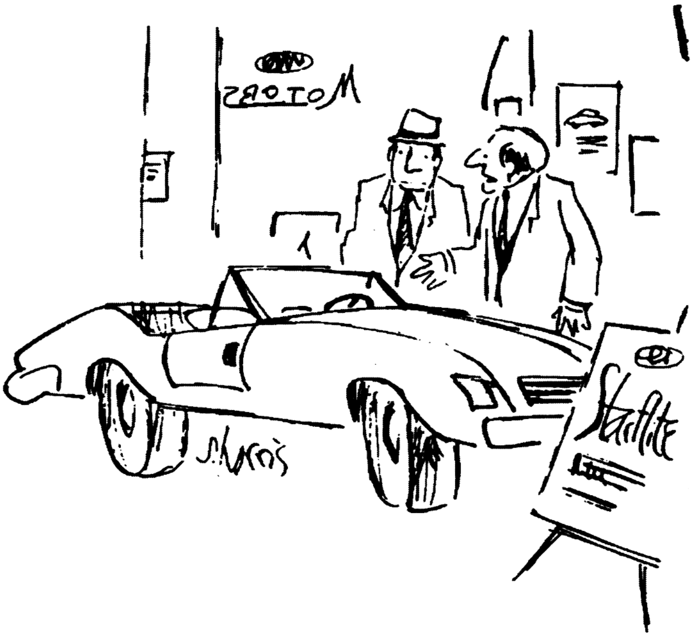
$$W' = W + v$$

となる．これはまさに速度が小さいときに成り立つべきガリレオの速度の合成則である．このことは 1.8 節での公式に対してもあてはまる．ガリレオの表現に対する相対論的“補正”は v^2 のオーダーであり，したがって小さな v に対しては無視できる．

1.11　パラドックスと物理的直観

特殊相対論の初等的な入門書では，しばしば“パラドックス”とよばれるいくつかの問題をあげて，ガリレオの相対論と特殊相対論との物理的な違いを明らかにしようとする．たとえば“双子のパラドックス”などがよく用いられる．まず特殊相対論の予言が首尾一貫していない，あるいはパラドックスにみえるようにしておいて，次に特殊相対論の基本原理を注意深く用いることによってどこにも矛盾がないことを示し，それらのパラドックスを解くわけである．パラドックスは見かけだけのもので本当ではなく，それはつねにガリレオの概念と特殊相対論の概念の混同の結果である．残念ながら不注意な学生（あるいは不注意な教師に教えられた注意深い学生）は，しばしば特殊相対論が実際にパラドックスをつくり出すと考えることがある．これはまったく馬鹿げた考えである．すべての“パラドックス”は実際には数学的に矛盾して設定された問題であり，特殊相対論は重力の効果が無視できるような情況で何回となく実験的に検証された，完全に首尾一貫した時空の描写法である．特殊相対論はあらゆる現在の物理学者が理論を構成するさいの枠組である．(パラドックスをより深く考えてみたいという学生は，本章の 1.13 節「双子の“パラドックス”分析」を参照.)

はじめて特殊相対論を学ぶ人が困難を感じ，“パラドックス”に実際以上の価値を置く心理的な理由は，われわれが光速近くの速度の経験をまったくもたないからである（図 1.15 参照)．その唯一の矯正法は特殊相対論の問題を解いて，その“反直観的”な予言を注意深く検討することである．相対論での直観をみがく最もよい方法の一つは特殊相対論の幾何学的な描像（ミンコフスキー空間，座標軸に対するローレンツ変換の効果，時間の遅れとかローレンツ収縮などの“描像”）に完全に慣れてしまうことである．この幾何学的描像は，これからべ



“最高速度 時速 300 km ですぜ．光の速さの 3 600 000 分の 1 ですがね．”

図 1.15 光の速さはわれわれの日常経験とかけはなれている!（S. Harris の許可を得て転載．© ScienceCartoonsPlus.com）

クトル解析やテンソル解析を学んでいくさいに心のどこかにとめておかねばならない．幾何学的描像は一般相対論を学ぶとき再び，全面におしたてられることになろう．

1.12 文　　献

特殊相対論のよい入門書はたくさんあるが，ここでの取扱いの指針になり，はるかに詳しく読みごたえのある本として Taylor と Wheeler (1966) がある．別の初等的ではあってもよく読まれるものは Mermin (1989) であり，古典ともいえるのが French (1968) である．理論の基礎をより深く議論している本としては Arzeliès (1966)，Bohm (1965)，Dixon (1978)，Geroch (1978) をみよ．

パラドックスは Arzeliès (1966)，Marder (1971)，Terletskii (1968) に詳しい議論がある．Einstein の科学上の伝記としては Pais (1982) をみよ．

この教科書での特殊相対論に対する興味は，主にそれが一般相対論の特殊で簡単な場合であり，あとで必要になる数学を展開することができるという点である．しかし特殊相対論それ自身は電磁気学や量子論など物理の他のすべての基本的な理論の基礎であり，したがってそれに対応してここで与えたよりもはるかに多くの研究がなされている．古典的な議論は Synge (1965)，Schrödinger (1950)，Møller (1972) にあり，現代的な扱いは Rindler (1991)，Schwarz と Schwarz (2004) や Woodhouse (2003) にみられる．

特殊相対論の原論文のいくつかは Kilmister (1970) の中に収められている．

1.13 付録：双子の"パラドックス"分析

> **[問　題]**　ダイアナ* は地球に双子の妹アルテミス* を残して光速の $24/25 = 0.96$ の速さで，彼女の時間で 2.2×10^8 秒（~7 年）ロケットに乗ってまっしぐらに進む．次に瞬時にして（大胆にも莫大な重力加速度をものともせず）ロケットを反転し同じ速さで地球に戻る．双子が再会したときどちらの方が年をとっているか？　時空図が非常に役に立つ．

[略解] 図 1.16 を参照せよ．ダイアナは直線 $\mathscr{P}\mathscr{B}$ 上を動く．彼女の系ではアルテミスの事象 $\mathscr{A}$ は事象 $\mathscr{B}$ と同時であり，したがってアルテミスは実際ゆっくりと年をとる．しかしダイアナが方向転換するやいなや，彼女は慣性基準系を変える．今度は $\mathscr{B}$ をアルテミスの事象 $\mathscr{C}$ と同時と見なす．実際上，ダイアナは，一瞬の間にアルテミスが信じられぬほど急速に年をとったとみる．この一瞬は，今までダイアナが観測してきたゆっくりさを補ってあまりある．数値的にはダイアナの 14 歳に対してアルテミスは 50 歳，年をとる．

[詳解] "一瞬の間にダイアナはアルテミスが信じられぬほど急速に年をとったとみる" という言い方では満足しない，あるいはそういった言い方の背後にどんな物理がひそんでいるかを知りたい読者のために，このことをもっと詳しく議論しよう．そのさい "ダイアナがみる" というのは実際にはすべての相対論的な観測者がもっている物差しと時計とデータバンクを使って "ダイアナが観測する" という意味であることに注意

---

*訳注：　ダイアナはローマ神話での月の女神．アルテミスはギリシャ神話での月の女神．

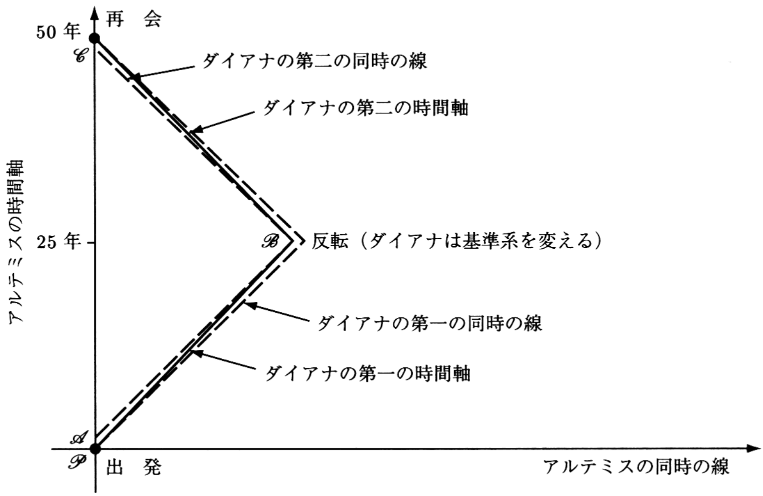


図 1.16 時空図における理想化された双子の “パラドックス”

する．

ダイアナは次のような方法で観測を行うことができる．地球から発射したと同時に，$v = 0.96$ で地球から離れていくような慣性系 $\overline{\mathscr{O}}$ に飛び乗る．この慣性系に乗るやいなや彼女はすべての時計を，地球から発射したときをゼロとして同時化する．さらに彼女のすべての時計に大学院の学生をつける．そして地球を通過する時計に乗ったすべての学生に，通過時の地球上の時計を読み，記録させる．彼女自身の時計で 7 年後に慣性系 $\overline{\mathscr{O}}$ から，今度は地球に向かって $v = 0.96$（もちろん地球の系で測って）で運動している慣性系 $\overline{\overline{\mathscr{O}}}$ に飛び移る．この系に移ったとき，時計に再び学生をつけてすべての時計を，方向を変えたときが彼女の時計の示す $\overline{\overline{t}} = 7$ 年となるように同時化する．(すべての時計はお互いにすでに同時化されている．彼女はただ時間の原点を調節するだけでよい.）さらに $\overline{\overline{t}} = 7$ 年から彼女が地球に着くまでに地球を通過するすべての学生に，通過時に地球上の時計を読み，記録させる．

ダイアナは 14 歳年をとって地球に帰ってくる．時間の遅れのことを少しばかり知っているので，彼女はアルテミスが自分より少なく年をとっているものと思っていた．ところが，驚いたことにアルテミスは 36 歳も年上の白髪のお婆さんになっていた．ダイアナは驚きを隠してデータをしらべるためコンピューター室へ飛んでいった．まず行きの時計に乗った学生からの報告を読んだ．それによると確かにアルテミスは非常

にゆっくりと年をとっているようにみえる．ダイアナの時間で $\bar{t}=7$ 年に，地球を通過した学生は地球の時間が 2 年にほんの少し足りないことを報告していた．次に帰りの学生の報告をしらべてみた．すると $\bar{\bar{t}}=7$ 年のとき地球を通過した学生は地球の時計が 48 年以上を指していると報告していた．同じ時刻に一人の学生が 2 年，別の学生が 48 年とみるようなことが可能だろうか？　ダイアナは最近の学生教育の水準の低下を嘆きながらコンピューター室を立ち去った．

しかし，われわれはダイアナの犯した間違いを知っている．上の二人の学生は地球を同時に通過したのではない．彼らの時計の読みは同じ値を示すが，彼らはまったく違った事象 $\mathscr{A}$ と $\mathscr{C}$ で地球に遭遇する．ダイアナははじめの系の学生たちに，第二の系の $\bar{\bar{t}}=7$ 年の学生が地球を通過するのをみるまで時計の読みを続けるように頼んでおくべきだった．そのとき彼らは $\bar{t}=171$ 年と記した報告を送っただろうが，それが問題になるだろうか？　時間とは単に座標にすぎない．座標系がすべての事象を覆っていることを確実にしておかねばならない．

ダイアナはまずい座標系を用いたのである．行きの系で $\bar{t}=7$ 年以前の情報だけ，帰りの系では $\bar{\bar{t}}=7$ 年以降の情報だけを要求することにより，彼女は自分の座標系の覆う領域から三角形 $\mathscr{ABC}$ の内部全体を取り除いてしまった [図 1.17 (a)]．したがって彼女が見つけることのできない多くのことが起ったとしても驚くにあたらない．もし彼女が最初の系の学生たちに $\bar{t}=171$ 年まで情報を集めさせていたら，彼女はその

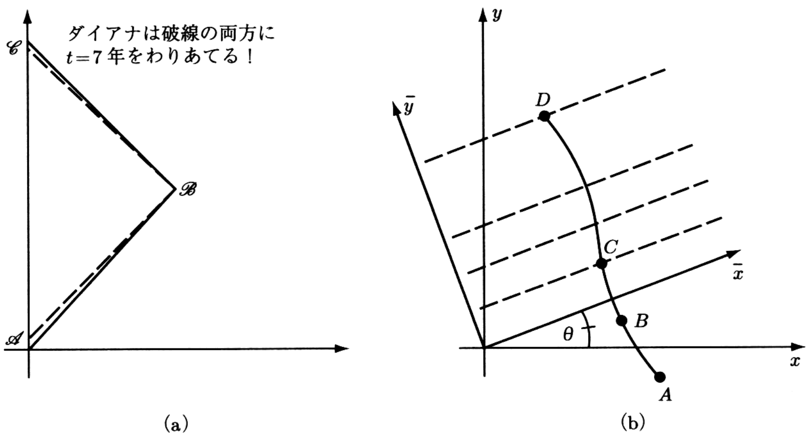


図 1.17　ダイアナの行った系の変換は，ユークリッド幾何での座標の回転と類似している

三角形の内部を覆うことができたのである．

平面での回転による類似例をつくることができる［図 1.17 (b)］．曲線 $ABCD$ の長さを測ることを考えてみよう．ただしその測定の途中で，たとえば x-y 系で A から B まで測ったあとで，座標系が回転させられるとする．その後，$\overline{x}$-$\overline{y}$ 系に回転したとすると，B から測定を再び始めなければならない．たとえば，もともとの B の座標は $y=2$ だったのが新しい系では $\overline{y}=-5$ となっているかもしれない．もしその曲線の長さを，$\overline{y}=2$ をもった点（もとの系で測定し終えた y の値と同じ $\overline{y}$ の値をもつ点）から測るなら，図の点 C から始めることになり，実際の長さよりはるかに短い距離を得ることになる．

誰も平面上の測定ではこんな間違いを犯さない．しかし双子のパラドックスに出会うと，これと同じ間違いを多くの人が犯すのである．これは時間を単に座標と見なすことへのわれわれの拒絶意識からきている．われわれは誰に対してもその運動にまったく無関係で至るところ同じである普遍的な時間を考えることに慣れきっている．しかし時間は誰にとっても同じではなく，それを座標として扱わねばならず，一つの座標が時空の全領域を覆っていることを確かにしておかねばならない．

時空の全領域を覆っていない座標は一般相対論において多くの問題を引き起す．重力崩壊やブラックホールを扱うさい，ブラックホールの外側の時空に対する通常の座標がブラックホールの中まではとどかないことをみるだろう．このためブラックホールに落ち込む粒子は有限の距離を行くのに無限の座標時間を要する．これはまったく座標系のせいにすぎない．粒子は有限の固有時間で“外側”の座標によって覆われていない領域に落ち込んでいく．ブラックホールの外側と内側を満足に覆える座標は 1950 年中頃まで発見されなかった．

1.14 練 習 問 題

1 以下の量を $c=1$ の単位系に変換し，すべてを m と kg で表せ．

(a) 解答例：10 J．SI 単位系では $10\,\mathrm{J}=10\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}}$．$c=1$ だから $1\,\mathrm{s}=3\times10^8\,\mathrm{m}$，したがって $1\,\mathrm{s}^{-2}=(9\times10^{16})^{-1}\,\mathrm{m}^{-2}$．これから $10\,\mathrm{J}=10\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}(9\times10^{16})^{-1}\,\mathrm{m}^{-2}=1.1\times10^{-16}\,\mathrm{kg}$．あるいは c を変換因子として次のように用いる．

$$1=3\times10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

$$1=(3\times10^8)^{-1}\,\mathrm{m^{-1}{\cdot}s}$$

$$10\,\mathrm{J}=10\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}}=10\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}}\times(1)^2$$

$$= 10\,\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2} \times (3\times 10^8)^{-2}\,\text{s}^2\cdot\text{m}^{-2}$$
$$= 1.1 \times 10^{-16}\,\text{kg}$$

式から秒を消すために，c の何乗を掛けても，それで割ってもかまわない．(b) 100 W の電力，(c) 換算プランク定数 $\hbar = 1.05\times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$（$\hbar$ はプランク定数 h を使って $\hbar = h/2\pi$ で定義される），(d) 車の速度 $v = 30\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，(e) 車の運動量 $3\times 10^4\,\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，(f) 1 気圧 $= 10^5\,\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$，(g) 水の密度 $10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$，(h) 光度 $10^6\,\text{J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-2}$．

2　次の量を自然単位 ($c = 1$) から SI 単位に変えよ．

(a) 速度 $v = 10^{-2}$，(b) 圧力 $10^{19}\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$，(c) 時間 $t = 10^{18}\,\text{m}$，(d) エネルギー密度 $u = 1\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$，(e) 加速度 $10\,\text{m}^{-1}$．

3　観測者 $\mathcal{O}$ の時空の x 軸と t 軸を描いて，次に以下のものをその時空図上に描け．

(a) $x = 1\,\text{m}$ での $\mathcal{O}$ の時計の世界線．

(b) $t = 0$ のとき，$x = 0.5\,\text{m}$ で速度 $v = 0.1$ で運動している粒子の世界線．

(c) $\mathcal{O}$ に対して正の x の軸方向に速度 $v = 0.5$ で動いている観測者 $\overline{\mathcal{O}}$ の $\bar{t}$ 軸と $\bar{x}$ 軸，ただしその原点 ($\bar{t} = \bar{x} = 0$) は $\mathcal{O}$ と一致するとする．

(d) 原点から間隔 Δs^2 が $-1\,\text{m}^2$ の事象の軌跡．

(e) 原点から間隔 Δs^2 が $+1\,\text{m}^2$ の事象の軌跡．

(f) $\bar{x}$ 軸と $\bar{t}$ 軸に沿って 1 m 間隔の目盛り．

(g) 原点からの間隔が 0 の事象の軌跡．

(h) 時刻 $t = 2\,\text{m}$（$\mathcal{O}$ からみて同時）に起ったすべての事象の軌跡．

(i) 時刻 $\bar{t} = 2\,\text{m}$（$\overline{\mathcal{O}}$ からみて同時）に起ったすべての事象の軌跡．

(j) $\bar{t} = 0$, $\bar{x} = 0.5\,\text{m}$ で起った事象．

(k) $\bar{x} = 1\,\text{m}$ の事象の軌跡．

(l) $t = -1$, $x = 0\,\text{m}$ で負の x 方向に放出され，$\bar{x} = -1\,\text{m}$ に置かれた鏡で跳ね返り，$x = 0.75\,\text{m}$ に置かれた検出装置に吸収された光子の世界線．

4　次の和の各項を書き下し，(x^0, x^1, x^2, x^3) に対して (t, x, y, z) を代入せよ．

(a) $\sum_{\alpha=0}^{3} V_\alpha \Delta x^\alpha$，ここで $\{V_\alpha, \alpha = 0, \cdots, 3\}$ は 4 個の任意の数の集り．

(b) $\sum_{i=1}^{3} (\Delta x^i)^2$

5　(a) 観測者 $\mathcal{O}$ の時空図を用いて $\mathcal{O}$ によってなされた次の実験を記述せよ．速度 $v = 0.5$ をもった二つの粒子が $t = -2$ で $x = 0$ から一つは正の x 方向に，他方は負の x 方向に発射された．それらは $x = \pm 2\,\text{m}$ に置かれた検出装置にぶつかった．時間の 0.5 m 後に検出装置は速度 $v = 0.75$ で $x = 0$ に信号を送り返した．

(b) 信号は同時に $x=0$ に戻ってきた．（描いた時空図でこのことが成り立っていることを確かめておくこと．）二つの検出装置が $x=0$ から同じ距離にあることはわかっているから，このことから実験者はそれらの検出装置が実際に信号を同時に送ったことを結論する．この結論がなぜ正しいか説明せよ．

(c) 第二の観測者 $\overline{\mathcal{O}}$ が，$\mathcal{O}$ に対して負の x 方向に速度 $v=0.75$ で動いている．$\overline{\mathcal{O}}$ の時空図を描き，その中に $\mathcal{O}$ によってなされた実験を書け．$\overline{\mathcal{O}}$ は検出装置が同時に信号を送ったと結論するだろうか？ もしそうでないなら，どちらの信号が先に送られたか？

(d) $\mathcal{O}$ と $\overline{\mathcal{O}}$ の両方の座標を使って，検出装置が信号を発射した事象間の間隔 Δs^2 を計算せよ．

6 式 (1.2) が $\alpha\neq\beta$ のとき，$M_{\alpha\beta}$ と $M_{\beta\alpha}$ を別々にではなく，$M_{\alpha\beta}+M_{\beta\alpha}$ の形でのみ含むことを示せ．このことから一般性を失うことなく $M_{\alpha\beta}=M_{\beta\alpha}$ と置けることを示せ．

7 式 (1.2) を導いた議論で，$\overline{\mathcal{O}}$ の座標が次のような $\mathcal{O}$ の座標の線形結合で与えられていると仮定する：

$$\bar{t}=\alpha t+\beta x,\qquad \bar{x}=\mu t+\nu x,\qquad \bar{y}=ay,\qquad \bar{z}=bz$$

ここで，α, β, μ, ν, a, b は $\overline{\mathcal{O}}$ の $\mathcal{O}$ に対する速度 $\boldsymbol{v}$ の関数ではありうるが，座標に依存しない．式 (1.2) の数 $\{M_{\alpha\beta},\ \alpha,\ \beta=0,\ \cdots,\ 3\}$ を α, β, μ, ν, a, b で表せ．

8 (a) 一般の $\{M_{\alpha\beta},\ \alpha,\ \beta=0,\ \cdots,\ 3\}$ に対して式 (1.2) から式 (1.3) を導け．

(b) 式 (1.3) の任意の $\{\Delta x^i\}$ に対して $\Delta\bar{s}^2=0$ だから，式 (1.3) で Δx^i を $-\Delta x^i$ に変え，その結果の式をもとの式から引いて，$i=1,\ 2,\ 3$ に対して $M_{0i}=0$ を示せ．

(c) $\Delta\bar{s}^2=0$ とした式 (1.3) を用いて式 (1.4b) を示せ．（ヒント：Δx, Δy, Δz が任意であることを使え．）

9 図 1.7 で線 $\mathcal{PQ}$ を本文中のように描いた理由を説明せよ．

10 ある系での座標 $(t,\ x,\ y,\ z)$ が以下で与えられている一組の事象について，それらの間隔を時間的，空間的あるいはヌル的に分類せよ．

(a) $(0,0,0,0)$ と $(-1,1,0,0)$

(b) $(1,1,-1,0)$ と $(-1,1,0,2)$

(c) $(6,0,1,0)$ と $(5,0,1,0)$

(d) $(-1,1,-1,1)$ と $(4,1,-1,6)$

11 双曲線 $-t^2+x^2=a^2$ と $-t^2+x^2=-b^2$ が，a と b のいかんにかかわらず，直線 $t=\pm x$ に漸近的に近づくことを示せ．

12　(a) 図 1.14 の双曲線 $\mathscr{DB}$ の接線は $\overline{\mathscr{O}}$ にとっての同時の線であるという事実を使って，時間間隔 $\mathscr{AE}$ は $\overline{\mathscr{O}}$ が $\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}$ まで動くときその時計が記録する時間よりも短いことを示せ．

(b) 次の式を示せ．

$$(\Delta s^2)_{\mathscr{AC}} = (1 - v^2)(\Delta s^2)_{\mathscr{AB}}$$

(c) (b) を使って $\overline{\mathscr{O}}$ からみると $\mathscr{O}$ の時計がちょうど "正しい" 割合でゆっくり進むことを示せ．

13　パイ中間子（あるいはパイオン）とよばれる素粒子の半減期は，その崩壊を観測している観測者に対してパイオンが静止しているとき，$2.5 \times 10^{-8}\,\mathrm{s}$ である．相対性原理よりパイオンが $v = 0.999$ で運動しているとき，静止している観測者からみた半減期は $5.6 \times 10^{-7}\,\mathrm{s}$ となることを示せ．

14　$\mathscr{O}$ に対する $\overline{\mathscr{O}}$ の速度 $\boldsymbol{v}$ が小さいとする ($|\boldsymbol{v}| \ll 1$)．そのとき時間の遅れ，ローレンツ収縮，速度の合成則が，それぞれ以下の式で近似できることを示せ．

(a) $\Delta t \approx (1 + \frac{1}{2}v^2)\Delta \bar{t}$

(b) $\Delta x \approx (1 - \frac{1}{2}v^2)\Delta \bar{x}$

(c) $w' \approx w + v - wv(w + v)$ （$|w| \ll 1$ も成り立つとする）

$|\boldsymbol{v}| = w = 0.1$ のとき，これらの近似の相対誤差はいくらか?

15　$\overline{\mathscr{O}}$ の $\mathscr{O}$ に対する速度がほとんど光速とする（$|\boldsymbol{v}| = 1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$）．練習問題 14 の公式は次のようになることを示せ．

(a) $\Delta t \approx \Delta \bar{t}/\sqrt{2\varepsilon}$

(b) $\Delta x \approx \Delta \bar{x}\sqrt{2\varepsilon}$

(c) $w' \approx 1 - \varepsilon(1 - w)/(1 + w)$

$\varepsilon = 0.1$ と $w = 0.9$ のときのこれらの近似の相対誤差はいくらか?

16　ローレンツ変換式 (1.12) を用いて，(a) 時間の遅れ，(b) ローレンツ収縮の公式を導け．まず比較すべき事象のペアを見つけて，次にローレンツ変換を使って本文でのように不変双曲線を用いて問題を解け．

17　長さ 20 m の軽い棒が 15 m の長さの小屋の横に置いてある．オリンピックの陸上選手が，その棒を遠くにもっていき，そこから棒を小屋に向け $0.8c$ の速さで小屋めがけて走る．彼の友達は小屋の戸の前で立っている．若干難しいものもあるが，以下の質問のすべてに答えてみよ．

(a) 棒が近づいてくるとき，その友人が測る棒の長さはいくらか?

(b) 小屋の戸は最初開いているとする．走者と棒が完全に小屋の中に入るやいなや，

友人は戸を閉める．友人が測って，戸が閉められてからどれだけあとに棒の先端は小屋の反対側の壁にぶつかるか？ 戸を通過する事象と壁にぶつかる事象の間隔を計算せよ．その間隔は空間的か，時間的か，あるいはヌル的か？

(c) 走者の基準系では小屋と棒の長さはいくらか？

(d) 走者は棒の先端が小屋の反対側の壁にぶつかったとき，棒が完全に小屋に含まれていると信じるか？

(e) 衝突の後，棒と走者とは小屋に対して静止する．小屋の戸は棒が止る前に閉められたのだから，友人の観点では，20 m の棒が，15 m の小屋に入っていることになる．これは可能か？ 一方，走者の観点に立つと，戸が閉まる前に衝突によって棒は止る．したがって戸を閉めることはできない．棒は小屋の中に入って戸は閉まっているのか，あるいはそうでないのか？

(f) 友人の観点から時空図を描き，それを使って読者の結論を示し，正当化せよ．

18 (a) アインシュタインの速度の合成則 (1.13) は次式で定義される速度パラメーター u の概念を導入すると簡単な形をとる．

$$v = \tanh u$$

$-\infty < u < \infty$ に対し速度が許容範囲 $-1 < v < 1$ に含まれることに注意する．もし

$$v = \tanh u, \qquad w = \tanh U$$

なら式 (1.13) は次のように書けることを示せ．

$$w' = \tanh(u + U)$$

これは速度のパラメーターが線形に足し合されることを意味する．

(b) これを用いて次の問題を解け．ある星は第二の星が $v = 0.9c$ の速さで遠ざかっていることを観測する．第二の星は第三の星が同じ方向に $0.9c$ の速さで遠ざかっていると観測する．同様にして第三の星は，第四の星を，第四の星は第五の星をというようにある大きな数 N 個の星まで続くとする．第 N 番目の星の最初の星に対する速度はいくらか？ 正確な答と大きな N に対して有用な近似式を与えよ．

19 (a) 練習問題 1.18 で導入した速度パラメーターを用いて，ローレンツ変換の式 (1.12) が次の形に書けることを示せ．

$$\bar{t} = t\cosh u - x\sinh u, \qquad \bar{y} = y$$

$$\bar{x} = -t\sinh u + x\cosh u, \qquad \bar{z} = z$$

(b) 恒等式 $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ を用いて，これらの式から間隔の不変性を示せ．

(c) 時空の幾何学と通常の二次元ユークリッド幾何学との類似点をできる限り導け．ここでローレンツ変換に対応する座標変換は次のように与えられる．

$$\overline{x} = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$\overline{y} = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

間隔に対応するものは何か?　不変双曲線に対応するものは何か?

20　ローレンツ変換の式を行列の形に書け．

21　(a) 二つの事象が時間的に離れているなら，それらが同一点で起る，すなわち同じ空間座標をもつようなローレンツ系があることを示せ．

(b) 同様に二つの事象が空間的に離れているなら，それらが同時に起るようなローレンツ系があることを示せ．

2

特殊相対論におけるベクトル解析

2.1 ベクトルの定義

最初のうち，われわれはユークリッド幾何学で親しんだベクトルの概念を使用する．つまり，ベクトルとは，座標変換によって変換される座標そのものと同じ変換性をもつ成分の集りである．ベクトルの正確な定義はのちに与える．

典型的なベクトルは，位置の変位ベクトルである．そのベクトルは，一つの事象を別の事象と結ぶもので，その成分は二つの事象の座標の差で表される．

◆ $$\Delta\vec{x} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z) \tag{2.1}$$

この表現の中にはいくつかの新しい記号がある．文字の上につけた矢印はベクトルを示す．（したがって，矢印つきの $\vec{x}$ は，x 座標とは特別な関係にはない．）$\Delta\vec{x}$ の次の矢印は成分で示すことを意味し，その矢印の下の $\mathcal{O}$ はその成分が“系 $\mathcal{O}$ における”ものであることを表す．成分はつねに t，x，y，z の順序で並べる．（これは，添字にすると $0, 1, 2, 3$ の順序で表すことに対応する．）記号 $\underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow}$ はベクトルとその成分の集りの違いを強調するために使用する．ベクトル $\Delta\vec{x}$ は二つの事象を結ぶ矢印であるのに対し，成分の集りは，座標系に依存した 4 個の数の集合である．今後，ベクトル（のちには，テンソル）の概念はつねに**幾何学的対象**としての側面を強調していく予定である．つまり，特別な座標系に依拠しなくとも，定義可能で（時には）視覚化できるものなのである．別の

重要な記号は

$$\Delta\vec{x} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} \{\Delta x^{\alpha}\} \tag{2.2}$$

である．ここでは $\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3$ のすべてを表すのに $\{\Delta x^{\alpha}\}$ という記号を使用した．このベクトルの成分をほかの座標系 $\overline{\mathcal{O}}$ で考えるときには，次のように表す．

$$\Delta\vec{x} \underset{\overline{\mathcal{O}}}{\longrightarrow} \{\Delta x^{\overline{\alpha}}\}$$

つまり，新しい座標系であることを示すのに**添字**の上にバーをつけるのである．ベクトル $\Delta\vec{x}$ は**同じ**であるから，系を変えても新しい記号を導入しなくてもよい．成分のみが変化する[1)]．新しい成分 $\Delta x^{\overline{\alpha}}$ はどのように表されるであろうか？　それはローレンツ変換によって，

$$\Delta x^{\overline{0}} = \frac{\Delta x^0}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{v\Delta x^1}{\sqrt{1-v^2}}, \cdots$$

などのように求められる．この変換は線形であるので，次のように書くことができる．

$$\Delta x^{\overline{0}} = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda^{\overline{0}}{}_{\beta} \Delta x^{\beta}$$

ここで，$\{\Lambda^{\overline{0}}{}_{\beta}\}$ は，β の 0 から 3 の 4 個の値に対応する 4 個の数である．具体的に書くと

$$\Lambda^{\overline{0}}{}_0 = 1/\sqrt{1-v^2}, \qquad \Lambda^{\overline{0}}{}_1 = -v/\sqrt{1-v^2}, \qquad \Lambda^{\overline{0}}{}_2 = \Lambda^{\overline{0}}{}_3 = 0$$

となる．同様な式が $\Delta x^{\overline{1}}$ に対しても成り立ち，一般には任意の $\overline{\alpha}$ に対して

$$\Delta x^{\overline{\alpha}} = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta} \Delta x^{\beta} \tag{2.3}$$

と書ける．ここで，$\{\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}\}$ はローレンツ変換の行列を構成する 16 個の数の集りである．添字の一つを上付にし，もう一方を下付にした理由は，のちに微分幾何を学ぶときに明らかになるであろう．さしあたっては，この上下に添字を

1)　線形代数の教科書では，“弱” 変換といわれるもので，座標は変化するけれど，ベクトルは変化しないのである．

つけることにより，**アインシュタインの総和の規約**とよばれる書き方を導入する．それは，一つの添字が上付で，それと同じ添字が下付で出てくる表式では，つねにその添字のとりうる値すべてについての総和をとることにするのである．すなわち，

$$A_\alpha B^\alpha \quad \text{や} \quad T^\gamma E_{\gamma\alpha}$$

と書いたときには，次のように総和をとっているのである．

$$\sum_{\alpha=0}^{3} A_\alpha B^\alpha \quad \text{や} \quad \sum_{\gamma=0}^{3} T^\gamma E_{\gamma\alpha}$$

しかし，

$$A_\alpha B^\beta, T^\gamma E_{\beta\alpha} \quad \text{や} \quad A_\beta A_\beta$$

といった場合には，どの添字についても和をとってはいない．ローレンツ変換の式 (2.3) は，簡単に省略した形で

◆
$$\Delta x^{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_\beta \Delta x^\beta \tag{2.4}$$

と書くことができる．

式 (2.4) は，

$$\Delta x^{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_\gamma \Delta x^\gamma$$

とまったく同じであることに注意しておこう．前の式では β という，またあとの式では γ という，上下でくり返される添字は，0 から 3 までの和をとることしか意味しておらず，どんな文字を使用してもかまわないのである．このような総和を表すために使用される添字を，**ダミーの添字**といい，先に行った β を γ で置き換えるといった，ダミーの添字をつけ換えることは，テンソル代数では役立つことの多い技法である．ダミーの添字であっても，置き換えを許さないものがある．それはローマ字の添字に置き換えることである．本書ではローマ字の添字は $1, 2, 3$ の値のみをとるのに対し，ギリシャ文字は 0 をもとりうるからである．したがって，

$$\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_\beta \Delta x^\beta \quad \text{と} \quad \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_i \Delta x^i$$

という表式は同じものを表していない．実際

$$\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\Delta x^{\beta} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{0}\Delta x^{0} + \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{i}\Delta x^{i} \tag{2.5}$$

という関係がある．

式 (2.4) は，$\bar{\alpha}$ のとりうる 4 個の値に対して，4 個の異なった式を表している．ここでの $\bar{\alpha}$ のように，和をとらない添字を**フリーな添字**という．ある式に，一つ以上のフリーな添字が含まれているときには，そのフリーな添字のとりうる**すべての値に対してその式が正しい場合にのみ，意味のある式となる**．ダミーの添字と同じく，どの文字でもフリーな添字として使うことができる．したがって，式 (2.4) は

$$\Delta x^{\bar{\gamma}} = \Lambda^{\bar{\gamma}}{}_{\beta}\Delta x^{\beta}$$

と書いてもよい．$\bar{\gamma}$ は $\bar{\alpha}$ と同じ値をとりうるので，この式は式 (2.4) と同じである．フリーな添字をつけ換えるときには，すべてを残さずつけ換えなくてはならない．たとえば，式 (2.4) で

$$\Delta x^{\bar{\gamma}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\Delta x^{\beta}$$

のように添字をつけ換えることは意味がなく，このようなことはやってはならない．上の二つの表式の違いは次のところにある．最初の式では，$\bar{\gamma}$ の値として何をとっても，左辺の $\Delta x^{\bar{\gamma}}$ と右辺の $\Lambda^{\bar{\gamma}}{}_{\beta}$ は同じフリーな添字になるのに対し，二番目の式ではそのようなことがない．したがって，二番目の式は式 (2.4) と同値ではない．

一般のベクトル[2)] は，次のように定義される．ベクトルとは，ある系 $\mathcal{O}$ での数の集りであって，その数を

$$\vec{A} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (A^0, A^1, A^2, A^3) = \{A^{\alpha}\} \tag{2.6}$$

のように成分と見なしたとき，別の系 $\bar{\mathcal{O}}$ での成分が

$$A^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}A^{\beta} \tag{2.7}$$

2)　このような 4 個の成分をもったベクトルを**四元ベクトル**とよび，入門コースの物理で使用される 3 個の成分をもったベクトルと区別する．3 個の成分をもったベクトルを**三元ベクトル**という．特に断らない限り，ベクトルといったときには四元ベクトルを意味している．四元ベクトルは矢印を使って，$\vec{A}$ のように書き，三元ベクトルは太字で $\boldsymbol{A}$ のように表す．

という関係で与えられるものである．すなわち，ベクトルの成分は座標そのものと同じ変換をする．ベクトルは，ある系で4個の数[たとえば，$(10^8, -10^{-16}, 5.8368, \pi)$] を与えることで定義でき，その他のどんな系においても，その成分は一意的に決ってしまう．時空中のベクトルは，次のようなよく知られた規則に従う．$\vec{A}$ と $\vec{B}$ がベクトルで μ が数であるとき，$\vec{A}+\vec{B}$ も $\mu\vec{A}$ もベクトルであり，その成分は，

$$\left.\begin{aligned} &\vec{A}+\vec{B} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (A^0+B^0, A^1+B^1, A^2+B^2, A^3+B^3) \\ &\mu\vec{A} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (\mu A^0, \mu A^1, \mu A^2, \mu A^3) \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

となる．したがって，ベクトルは平行四辺形の合成の法則に従う．どのような4個の数でもベクトルとすることができるが，その数が無次元量でないときには，すべてが同じ次元をもたなくてはならないことに注意しよう．それらの数は，変換によって，足し合されることになるからである．

2.2 ベクトル代数

基底ベクトル　いかなる系 $\mathcal{O}$ にも，次の成分で定義される特別な4個のベクトルがある．

$$\left.\begin{aligned} &\vec{e}_0 \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (1,0,0,0) \\ &\vec{e}_1 \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (0,1,0,0) \\ &\vec{e}_2 \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (0,0,1,0) \\ &\vec{e}_3 \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (0,0,0,1) \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

この定義によって，系 $\mathcal{O}$ の基底ベクトルが定まる．同様にして，系 $\overline{\mathcal{O}}$ での基底ベクトルは

$$\vec{e}_{\bar{0}} \underset{\overline{\mathcal{O}}}{\longrightarrow} (1,0,0,0), \cdots$$

などのようになっている．異なる系での基底ベクトルだから，一般には $\vec{e}_{\bar{0}} \neq \vec{e}_0$ である．基底ベクトルの定義は

$$(\vec{e}_\alpha)^\beta = \delta^\beta_\alpha \tag{2.10}$$

と同値であること，つまり $\vec{e}_\alpha$ の β 成分はクロネッカーのデルタで表され，$\beta=\alpha$ なら 1 であり，$\beta\neq\alpha$ なら 0 であることを，読者みずから確かめていただきたい.

この基底ベクトルを使用すると，どんなベクトルでも表現できる.

$$\vec{A} \underset{\mathscr{O}}{\longrightarrow} (A^0, A^1, A^2, A^3)$$

のとき，

$$\blacklozenge \qquad \vec{A} = A^0\vec{e}_0 + A^1\vec{e}_1 + A^2\vec{e}_2 + A^3\vec{e}_3$$

すなわち

$$\blacklozenge \qquad \vec{A} = A^\alpha\vec{e}_\alpha \tag{2.11}$$

と表せる．最後の表現には総和の規約を使用している．（この規約を使用することを考えると $\vec{e}$ の添字はつねに下付に書くことに注意.）式 (2.11) の意味することは $\vec{A}$ が 4 個のベクトル $A^0\vec{e}_0, A^1\vec{e}_1, \cdots$ の線形結合で表されることである.

基底ベクトルの変換　　式 (2.11) までの議論は任意の系で成り立つのだから，系 $\overline{\mathscr{O}}$ に関しても

$$\vec{A} = A^{\overline{\alpha}}\vec{e}_{\overline{\alpha}}$$

と書ける．このことは，$\vec{A}$ が 4 個のベクトル $A^{\overline{0}}\vec{e}_{\overline{0}}, A^{\overline{1}}\vec{e}_{\overline{1}}, \cdots$ の和でも表されることを意味する．これらのベクトルは，系 $\overline{\mathscr{O}}$ の基底ベクトルに平行なのであって，系 $\mathscr{O}$ の基底ベクトルには平行ではないから，式 (2.11) にでてきた 4 個のベクトルとは違っている．しかし，それらを加え合せると同じベクトル $\vec{A}$ となるのである．$A^\alpha\vec{e}_\alpha$ という表現と $A^{\overline{\alpha}}\vec{e}_{\overline{\alpha}}$ という表現は，単なるダミーの添字のつけ換えで相互に移りうるものではないことを理解しておくことは大切である．バーのついた添字とバーのつかない添字は異なった意味をもっているので，交換ができないのである．したがって，ベクトルの組 $\{\vec{e}_{\overline{\alpha}}\}$ が $\{\vec{e}_\alpha\}$ と異なっているのと同様に $\{A^{\overline{\alpha}}\}$ は $\{A^\alpha\}$ とは異なった数字の組である．ところが，定義からすると 2 通りの和は同じで，

$$A^\alpha\vec{e}_\alpha = A^{\overline{\alpha}}\vec{e}_{\overline{\alpha}} \tag{2.12}$$

と書け，このことから重要な結論が得られる．つまり基底ベクトル $\{\vec{e}_\alpha\}$ と $\{\vec{e}_{\overline{\alpha}}\}$

とを関連づける変換則を導くことができる．式 (2.7) の $A^{\overline{\alpha}}$ を使うと，式 (2.12) は

$$\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}A^{\beta}\vec{e}_{\overline{\alpha}} = A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$$

と書ける．左辺では二つの添字について和をとっている．この和は有限項の和だから，その和の順序は問題にならない．$\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}$ も A^{β} も単なる数なので，この順序も問題にならず，したがって，

$$A^{\beta}\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}\vec{e}_{\overline{\alpha}} = A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$$

と書き直せる．さてここで β と $\overline{\alpha}$ がダミーの添字であることから，β を α と書き直し，$\overline{\alpha}$ を $\overline{\beta}$ と書き直すと

$$A^{\alpha}\Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}\vec{e}_{\overline{\beta}} = A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$$

となる．$\vec{A}$ は任意なベクトルであったから，この式はすべての $\{A^{\alpha}\}$ の組について成り立たなくてはならない．この式を

$$A^{\alpha}(\Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}\vec{e}_{\overline{\beta}} - \vec{e}_{\alpha}) = 0$$

と書くと，α の値にかかわらず

$$\Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}\vec{e}_{\overline{\beta}} - \vec{e}_{\alpha} = 0$$

が成り立つこと，すなわち

◆
$$\vec{e}_{\alpha} = \Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}\vec{e}_{\overline{\beta}} \tag{2.13}$$

が得られる．こうして基底ベクトルの変換則が求まった．それは成分の変換ではなく，系 $\mathcal{O}$ での基底 $\{\vec{e}_{\alpha}\}$ を系 $\overline{\mathcal{O}}$ での基底 $\{\vec{e}_{\overline{\alpha}}\}$ の線形結合で表現したものである．この式を式 (2.7) の成分の変換式

$$A^{\overline{\beta}} = \Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}A^{\alpha}$$

と比べてみるとその違いがわかる．

ここまでの議論では，いろいろと新しい手法を使用したので，じっくりと学習してもらいたい．総和の記号を省略したことで全体がすっきりしている．ま

た最も重要な点はダミーの添字のつけ換えで，それにより，式の中から A^α という任意に選べる量を取り出すことができた．

具体的な例　系 $\mathcal{O}$ に対して x 軸方向に速度 v で動いている系を $\overline{\mathcal{O}}$ とする．このとき行列 $[\Lambda^{\bar\beta}{}_\alpha]$ は

$$[\Lambda^{\bar\beta}{}_\alpha] = \begin{bmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であって，ここでは慣用的な記号

$$\gamma \equiv 1/\sqrt{1-v^2}$$

を使用している．たとえば，$\vec{A} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (5,0,0,2)$ であるとすると，系 $\overline{\mathcal{O}}$ での成分は

$$\begin{aligned} A^{\bar 0} &= \Lambda^{\bar 0}{}_0 A^0 + \Lambda^{\bar 0}{}_1 A^1 + \cdots \\ &= \gamma \cdot 5 + (-v\gamma) \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \\ &= 5\gamma \end{aligned}$$

となり，同様にして

$$\begin{aligned} A^{\bar 1} &= -5v\gamma \\ A^{\bar 2} &= 0 \\ A^{\bar 3} &= 2 \end{aligned}$$

である．したがって，$\vec{A} \underset{\overline{\mathcal{O}}}{\longrightarrow} (5\gamma,\ -5v\gamma,\ 0,\ 2)$ となる．

基底ベクトルについては

$$\vec{e}_\alpha = \Lambda^{\bar\beta}{}_\alpha \vec{e}_{\bar\beta}$$

すなわち

$$\begin{aligned} \vec{e}_0 &= \Lambda^{\bar 0}{}_0 \vec{e}_{\bar 0} + \Lambda^{\bar 1}{}_0 \vec{e}_{\bar 1} + \cdots \\ &= \gamma \vec{e}_{\bar 0} - v\gamma \vec{e}_{\bar 1} \end{aligned}$$

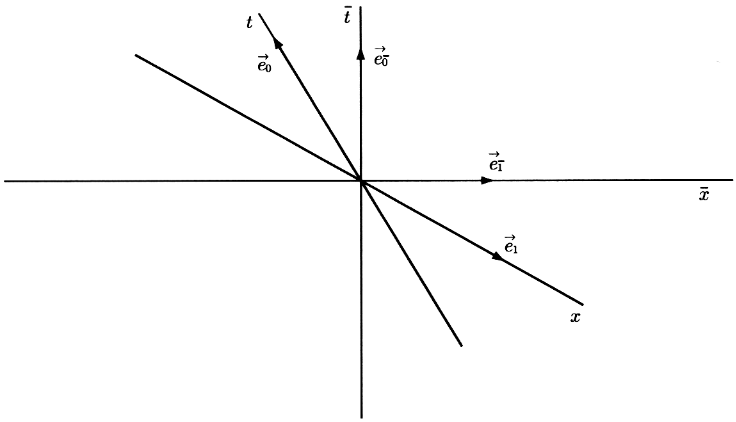


図 2.1　系 $\overline{\mathscr{O}}$ からみた系 $\overline{\mathscr{O}}$ と系 $\mathscr{O}$ での基底ベクトル

となり，同様に

$$\vec{e}_1 = -v\gamma\vec{e}_{\bar{0}} + \gamma\vec{e}_{\bar{1}}$$
$$\vec{e}_2 = \vec{e}_{\bar{2}}$$
$$\vec{e}_3 = \vec{e}_{\bar{3}}$$

である．こうして系 $\mathscr{O}$ での基底が，系 $\overline{\mathscr{O}}$ の基底を使って表されたので，その関係を系 $\mathscr{O}$ での図として示しておこう（図 2.1）．この変換は基底ベクトルの向きが，各系での座標軸の方向に一致することを保証している．図 1.5(b) と比べてみるとよい．

逆変換　ローレンツ変換 $\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\alpha}$ は二つの系の相対速度のみで決っている．しばらくの間，このことが明らかになるように

$$\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\alpha} = \Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\alpha}(\boldsymbol{v})$$

と書くことにする．こうして

$$\vec{e}_{\alpha} = \Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\alpha}(\boldsymbol{v})\vec{e}_{\bar{\beta}} \tag{2.14}$$

と表せる．$\overline{\mathscr{O}}$ での基底に，速度が $\boldsymbol{v}$ のときの変換をほどこすと $\mathscr{O}$ の基底にな

るのであれば，速度として，$-\boldsymbol{v}$ をとったものは，逆の変換になるべきである．したがって，

$$\vec{e}_{\overline{\mu}} = \Lambda^{\nu}{}_{\overline{\mu}}(-\boldsymbol{v})\vec{e}_{\nu} \tag{2.15}$$

が得られる．この式では，前の式との混同を避けるため $\overline{\mu}$ と ν という添字を使った．いうまでもなく，バーは系 $\overline{\mathscr{O}}$ をさしている．行列 $[\Lambda^{\nu}{}_{\overline{\mu}}]$ は行列 $[\Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}]$ と比べて $\boldsymbol{v}$ が $-\boldsymbol{v}$ になったこと以外の点では，まったく同じである．添字の上のバーは，観測者の立場の違いを明らかにする**名称**にすぎない．行列は**つねに**下付添字の系に対する上付添字の系の速度を使って構成されるという点以外では，バーは行列の要素に関係してこない．このことは式 (2.14) と式 (2.15) において明らかにされている．つまり $\boldsymbol{v}$ は $\mathscr{O}$ に対する，式 (2.14) での上付の添字の系である $\overline{\mathscr{O}}$ の速度であるから，$\overline{\mathscr{O}}$ に対する，式 (2.15) での上付の添字の系である $\mathscr{O}$ の速度は $-\boldsymbol{v}$ である．2.9 節の練習問題 11 を解くことで，理解が深まるであろう．

最後の表現は

$$\vec{e}_{\overline{\beta}} = \Lambda^{\nu}{}_{\overline{\beta}}(-\boldsymbol{v})\vec{e}_{\nu}$$

と書くことができる．単に，$\overline{\mu}$ を $\overline{\beta}$ にかえただけである．この変更では，変るものはなく，$\overline{\beta}$ のとりうる四つの値に対して，もとと同じ 4 個の方程式を与える．こうしておくと，式 (2.14) に代入できて，$\vec{e}_{\alpha}$ は

$$\vec{e}_{\alpha} = \Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}(\boldsymbol{v})\vec{e}_{\overline{\beta}} = \Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}(\boldsymbol{v})\Lambda^{\nu}{}_{\overline{\beta}}(-\boldsymbol{v})\vec{e}_{\nu} \tag{2.16}$$

と表される．この式には系 $\mathscr{O}$ の基底しか現れない．したがって，**いかなる** $\boldsymbol{v}$ **に**対しても成り立つ恒等式でなくてはならない．右辺には，$\overline{\beta}$ と ν についての二つの和がある．最初に $\overline{\beta}$ について和をとるとすれば，右辺は基底ベクトル $\vec{e}_{\nu}$ に係数

$$\sum_{\overline{\beta}} \Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}(\boldsymbol{v})\Lambda^{\nu}{}_{\overline{\beta}}(-\boldsymbol{v}) \tag{2.17}$$

を掛けて和をとったものである．式 (2.16) で添字 α を固定したとしよう．式 (2.16) の右辺が左辺に等しくなるには，**右辺の** $\vec{e}_{\alpha}$ の係数は 1 で，それ以外は 0 でなくてはならない．このことを数学的に表現すると

$$\Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}(\boldsymbol{v})\Lambda^{\nu}{}_{\overline{\beta}}(-\boldsymbol{v}) = \delta^{\nu}_{\alpha}$$

と書け，ここで δ^{ν}_{α} は，やはり，クロネッカーのデルタである．このことは，

$$\vec{e}_{\alpha} = \delta^{\nu}_{\alpha}\vec{e}_{\nu}$$

ということを意味しているが，これは恒等式である．

上式で積の順序を変えると，重要な公式

$$\blacklozenge \qquad \Lambda^{\nu}{}_{\overline{\beta}}(-\boldsymbol{v})\Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}(\boldsymbol{v}) = \delta^{\nu}_{\alpha} \tag{2.18}$$

が得られる．この式から行列 $[\Lambda^{\nu}{}_{\overline{\beta}}(-\boldsymbol{v})]$ が $[\Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}(\boldsymbol{v})]$ の逆行列であることがわかる．$\overline{\beta}$ についての和は，ちょうど，二つの行列の掛算をしたときに出てくるものになっているからである．いうまでもなく，行列 $[\delta^{\nu}_{\alpha}]$ は単位行列である．

ベクトルの成分の変化を表す．

$$A^{\overline{\beta}} = \Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}(\boldsymbol{v})A^{\alpha}$$

にも逆変換がある．両辺に $\Lambda^{\nu}{}_{\overline{\beta}}(-\boldsymbol{v})$ を掛け，$\overline{\beta}$ について和をとると，

$$\begin{aligned}\Lambda^{\nu}{}_{\overline{\beta}}(-\boldsymbol{v})A^{\overline{\beta}} &= \Lambda^{\nu}{}_{\overline{\beta}}(-\boldsymbol{v})\Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}(\boldsymbol{v})A^{\alpha}\\ &= \delta^{\nu}_{\alpha}A^{\alpha}\\ &= A^{\nu}\end{aligned}$$

が得られる．この式から系 $\mathcal{O}$ での $\vec{A}$ の成分は，系 $\overline{\mathcal{O}}$ での成分から，速度を $-\boldsymbol{v}$ とした変換をほどこすことによって求められることがわかる．これが正しいのは当然のことであろう．

ここまでやってきた操作は，ユークリッド空間でのベクトル代数において，なじみの深いものであるはずである．ここで新しく導入したことは，添字の記号にかかわることであった．それは，本書のこれからの展開で，最後まで使用される強力な道具である．これまでの結果について，数学的な正しさということにとどまらず，その幾何学的内容を理解したかどうかも確認しておいてほしい．

2.3　四　元　速　度

とりわけ重要なベクトルは，世界線の四元速度である．ガリレオの三次元幾何学では，速度は粒子の軌道に接するベクトルである．ここでの四次元幾何学においては，四元速度 $\vec{U}$ を粒子の世界線に接するベクトルとし，その粒子の系でみた一単位の時間の長さをもったものと定義する．一様に運動している粒子の場合をとって，その粒子が静止している慣性系で，この定義を検討してみよう．このときには，四元速度は時間軸に平行な方向を向いており，一単位の時間の長さをもっている．すなわち，その系での $\vec{e}_0$ に等しい．したがって，一様な運動をしている粒子の四元速度を，その粒子の静止系でのベクトル $\vec{e}_0$ として定義することも可能である．“速度” という言葉を使うことの根拠はベクトル $\vec{U}$ の空間成分が，三元速度とよばれる粒子の通常の速度 $\boldsymbol{v}$ と密接に関係していることにある．このことは，のちにでてくる具体例の式 (2.21) で示される．

加速された粒子には，慣性系はない．つまり，粒子がつねに静止してみえるような，等速度運動している系は存在しない．しかし，瞬間的には粒子と同じ速

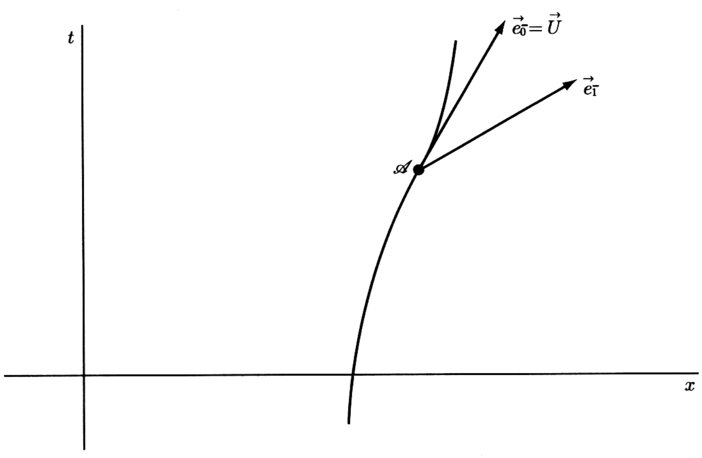


図 2.2　$\mathscr{A}$ における世界線の四元速度と瞬時的共動座標系の基底ベクトル

度をもっていて，そのとき以外は共動していないという慣性系は存在する．この系は**瞬間的共動慣性系** (momentarily comoving reference frame) であって，重要な概念である．[実際，ある事象点において加速された粒子には無限個の瞬間的共動慣性系（これから MCR 系または MCRF と略す）がある．それらはすべて同じ速度をもっているが，その空間軸は相互に回転で移り変るものである．ふつうには，この不定性は重要でない.] 加速された粒子の四元速度をその事象点での MCR 系の基底ベクトル $\vec{e}_0$ と**定義する**．このベクトルは粒子の（曲った）世界線に接している．図 2.2 に事象 $\mathscr{A}$ の粒子には図に示すような基底ベクトルをもった，MCR 系 $\overline{\mathscr{O}}$ がある．ベクトル $\vec{e}_{\overline{0}}$ はその点での $\vec{U}$ と同一である．

2.4 四 元 運 動 量

四元運動量 $\vec{p}$ を

◆
$$\vec{p} = m\vec{U} \tag{2.19}$$

で定義する．ここで，m は粒子の**静止質量**である．この質量は粒子の静止系で測定した質量をいう．一般の系 $\mathscr{O}$ では四元運動量の成分を慣用的に

$$\vec{p} \underset{\mathscr{O}}{\longrightarrow} (E, p^1, p^2, p^3) \tag{2.20}$$

と表す．p^0 を系 $\mathscr{O}$ での粒子**エネルギー** $\boldsymbol{E}$ とよぶ．その他の成分は運動量の空間成分 p^i である．

[例]　静止質量 m の粒子が系 $\mathscr{O}$ の x 方向に速度 $\boldsymbol{v}$ で運動している．このとき，四元速度と四元運動量の成分はどのようなものであろうか?　その粒子の静止系 $\overline{\mathscr{O}}$ の時間軸方向の基底ベクトルは $\vec{e}_{\overline{0}}$ なので，$\vec{p}$ と $\vec{U}$ の定義により，

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \vec{e}_{\overline{0}}, & \vec{p} &= m\vec{U} \\ U^\alpha &= \Lambda^\alpha{}_{\overline{\beta}}(\vec{e}_{\overline{0}})^{\overline{\beta}} = \Lambda^\alpha{}_{\overline{0}}, & p^\alpha &= m\Lambda^\alpha{}_{\overline{0}} \end{aligned} \tag{2.21}$$

が得られる．したがって

$$\begin{aligned} U^0 &= (1-v^2)^{-1/2}, & p^0 &= m(1-v^2)^{-1/2} \\ U^1 &= v(1-v^2)^{-1/2}, & p^1 &= mv(1-v^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

$$U^2 = 0, \qquad\qquad p^2 = 0$$
$$U^3 = 0, \qquad\qquad p^3 = 0$$

となることがわかる．速度 v が小さいときには，$\vec{U}$ の空間成分は $(v, 0, 0)$ であり，このことから四元速度という名称が妥当であることがわかる．$\vec{p}$ についても空間成分は $(mv, 0, 0)$ である．v が小さいとき，エネルギーは

$$E \equiv p^0 = m(1 - v^2)^{-1/2} \simeq m + \frac{1}{2}mv^2$$

となる．つまりエネルギーは静止質量エネルギーとガリレイ的な運動エネルギーの和になっている．

四元運動量の保存　　ガリレイ的力学においては，粒子の相互作用はエネルギー保存則と運動量保存則に支配されている．ベクトル $\vec{p}$ の成分は非相対論的極限で，ごくふつうのガリレイ的なエネルギーと運動量に移行することから，四元ベクトル $\vec{p}$ が保存されることをもって相対論的な保存則だと仮定するのは自然である．すなわち，数個の粒子が相互作用をするとき，$\vec{p}_{(i)}$ を i 番目の粒子の運動量だとして

$$\vec{p} \equiv \sum_{\substack{\text{all}\\ \text{particles}\\ (i)}} \vec{p}_{(i)} \tag{2.22}$$

が相互作用の前と後で変化しないというわけである．

これは法則とはいいながら，**仮説**をつけ加えたことに相当する．非相対論的極限が正しいということからは，一つの候補に限定することはできないからである．けれども，特殊相対論の二つの基本的仮説と同様に，この仮説は実験によって，精密に裏づけられているのである．この仮説から導かれるたいへん重要な結論は，エネルギー保存則を考えるときには，静止質量を含めて扱わなくてはならないということである．つまり，静止質量を減少させることが可能であり，そのときの減少分は，運動エネルギー，さらには，熱に転換されうるのである．この転換は原子力発電所で日夜行われている．

先に述べた四元運動量の保存則では，重要な事柄をあいまいにしていた．衝突の“前”と“後”の意味する内容が明確ではなかった．空間的に隔たった事象点で起きる二つの衝突を次に考えてみる．全四元運動量を加え合せるさいには，

時間座標 t が一定で考えるべきか，あるいは $\bar{t}$ が一定の場合に考えるべきなのであろうか？ 系 $\mathcal{O}$ の立場では，図 2.3 の事象 $\mathscr{A}$ は $t=0$ 以前のものであり，$\mathscr{B}$ は以後のものであるので，$t=0$ における全運動量は，$\mathscr{A}$ より後の運動量と $\mathscr{B}$ より前の運動量の和となる．一方，系 $\overline{\mathcal{O}}$ では二つの衝突は $\bar{t}=0$ 以前に起きているので，$\bar{t}=0$ での全運動量は $\mathscr{A}$ より後の運動量と $\mathscr{B}$ より後の運動量の和である．$\mathscr{A}$ が $\mathscr{B}$ よりも**後**であるような系も存在するけれど，その場合には加え合せるのは，系 $\mathcal{O}$ とは反対のものになってしまう．そうはいっても実際には何も問題は起らない．各衝突はそれぞれ運動量を保存するから，$\mathscr{A}$ より前の運動量の和は $\mathscr{A}$ より後の運動量の和と同じであり，$\mathscr{B}$ についても同様である．したがって**どんな**慣性系上の観測者も同じ全四元運動量ベクトル $\vec{p}$ であると判断する．(成分についていうと，異なる系では異なっているが，同じベクトルを表していることに違いはない.）このことは大切なことである．つまり**いかなる**観測者も，自分にとって時刻一定の線（現実には時刻一定の三次元空間であって，四次元時空中の時刻一定の**超曲面**とよばれる）を定義し，その時刻にすべての運動量を加え合せれば，同じ操作をほかのどんな観測者が行っても同じベ

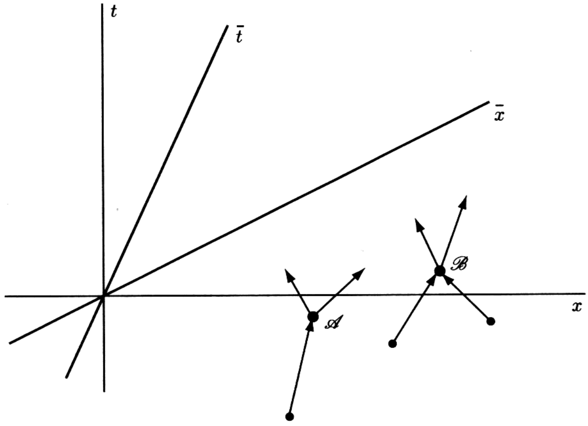


図 2.3　いくつかの衝突が関与するとき，ある特別な時刻において，個々の四元運動量の全四元運動量に対する寄与の仕方は，系に依存するが，全四元運動量はどの系からみても同じ四元ベクトルである．つまり，その成分は，ローレンツ変換によって別の系へ変換される．

クトルが得られるのである．このような保存則はあとでも出てくるので，この点を理解しておくことは大切である．

ゼロ運動量系　　慣性系の中で，

$$\sum_i \vec{p}_{(i)} \xrightarrow[\text{CM}]{} (E_{\text{TOTAL}}, 0, 0, 0) \tag{2.23}$$

のように全運動量の空間成分が 0 となる系が，ゼロ運動量系（center of momentum frame）である．瞬間的共動座標系と同様，ゼロ運動量系からみて相対的に静止した系はどれもゼロ運動量系（CM 系）である．

2.5　スカラー積

ベクトルの大きさ　　間隔の定義と同じように，ベクトル $\vec{A}$ の**大きさ**を

$$\vec{A}^2 = -(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2 \tag{2.24}$$

で定義する．ベクトルの成分はローレンツ変換で，$(\Delta t,\ \Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z)$ と同じように変換されると**定義**したので，

$$\begin{aligned}&-(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2\\ &\quad = -(A^{\bar{0}})^2 + (A^{\bar{1}})^2 + (A^{\bar{2}})^2 + (A^{\bar{3}})^2\end{aligned} \tag{2.25}$$

であることは**保証されている**．このように定義された大きさは，系によらない数である．つまり，ローレンツ変換のもとでのスカラーである．

いうまでもなく，この大きさは正になるとは限らない．間隔のときと同じように，次の名称を使う．$\vec{A}^2$ が正のとき，$\vec{A}$ は**空間的**ベクトルで，ゼロなら**ヌル**ベクトル，負なら**時間的**ベクトルという．したがって，空間的に離れた点を結ぶベクトルは，ユークリッド空間でのように正の大きさをもつ．理解しておく必要があるのは，ヌルベクトルはゼロベクトルではないことである．つまり，ヌルベクトルは $\vec{A}^2 = 0$ だが，必ずしもすべての A^α がゼロというわけではない．ゼロベクトルはすべての成分がゼロであるもので定義されている．$\vec{A}^2$ が正定値となる空間内でのみ，$\vec{A}^2 = 0$ であることからすべての α について $A^\alpha = 0$ が結論できる．

二つのベクトルのスカラー積　ある系 $\mathcal{O}$ でスカラー積を

◆ $$\vec{A}\cdot\vec{B} = -A^0B^0 + A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3 \tag{2.26}$$

と定義する．さて，ここに定義された量は，すべての系で同じ数値をとることを証明しよう．まず $\vec{A}\cdot\vec{A}$ が $\vec{A}^2$ であることに注意しておく．$\vec{A}^2$ が不変であることはすでに知っている．したがって，$\vec{A}+\vec{B}$ の大きさである $(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})$ も不変である．式 (2.24) と式 (2.26) から，

$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{A}^2 + \vec{B}^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B}$$

であることがわかる．左辺はすべての系で同じ値で，右辺の第 1，第 2 項も同様であるので，右辺の第 3 項も不変でなくてはならない．こうして，スカラー積の系の変換に対する不変性が証明された．

二つのベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ は $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$ のとき**直交**しているという．スカラー積の定義にはマイナスの符号を含むので，二つの直交するベクトルは必ずしも時空図で直角をなしているとは限らない（次の例を参照）．極端な例をあげると，ヌルベクトルは**それ自身**に直交している！ こうしたことはスカラー積が正定値となる空間ではみられない．

［例］　系 $\mathcal{O}$ の基底ベクトルは

$$\vec{e}_0\cdot\vec{e}_0 = -1$$
$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 = \vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 = +1$$
$$\vec{e}_\alpha\cdot\vec{e}_\beta = 0 \quad (\alpha\neq\beta \text{ のとき})$$

なる関係を満たしている．したがって，これらの基底は相互に直交するベクトルのテトラッドになっている．これは**正規直交**テトラッドで，相互に**直交**しており，単位の大きさに**規格化**されたものである．（時間的ベクトルは大きさが -1 のときに単位の大きさである．）上述の関係は，まとめると

◆ $$\vec{e}_\alpha\cdot\vec{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta} \tag{2.27}$$

と書ける．$\eta_{\alpha\beta}$ はクロネッカーのデルタと似ていて，$\alpha\neq\beta$ のときにゼロ，$\eta_{11}=\eta_{22}=\eta_{33}=+1$ であるが，$\eta_{00}=-1$ である点で違っている．のちに

$\eta_{\alpha\beta}$ がたいへん重要なメトリックテンソルであることがわかる．しかし，さしあたっては一般化されたクロネッカーのデルタと考えておいてよい．

［例］ $\bar{\mathscr{O}}$ の基底ベクトルも

$$\vec{e}_{\bar{\alpha}} \cdot \vec{e}_{\bar{\beta}} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$$

という関係を満たしており，特に $\vec{e}_{\bar{0}} \cdot \vec{e}_{\bar{1}} = 0$ となっている．この関係を図 2.4 の系 $\mathscr{O}$ での時空図で表してみよう．二つのベクトルはこの図で直交していないのは明らかである．しかしながら，そのスカラー積はゼロである．二つのベクトルが直交していることの判定は，45 度の傾きをもった光線の道筋となす角が，等しいかどうかをみることで可能となる．したがって，光線に接するベクトルはそれ自身に直交している．このことも，特殊相対論を視覚化するのには，ユークリッド空間で有用な概念が必ずしも役立たない例である．

［例］ 粒子の四元速度 $\vec{U}$ は MCR 系での時間軸方向の基底ベクトルであるから，式 (2.27) によって

$$\vec{U} \cdot \vec{U} = -1 \tag{2.28}$$

となる．

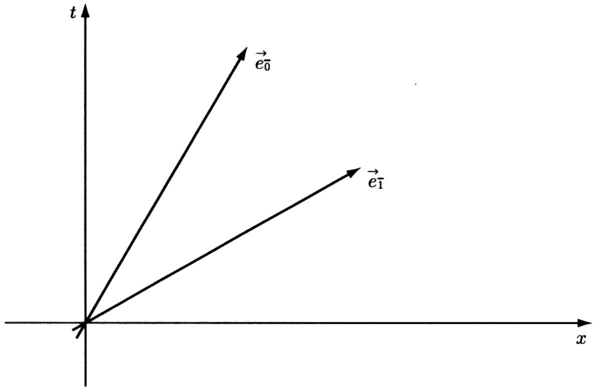


図 2.4 $\bar{\mathscr{O}}$ の基底ベクトルを $\mathscr{O}$ で書くと，ユークリッド的な意味では“垂直”ではない．しかし，基底ベクトルはミンコフスキー時空のスカラー積に関し“直交して”いる．

2.6 応　用

四元速度と微分としての加速度　粒子が無限小の変位 $\mathrm{d}\vec{x}$ をしたとし，系 $\mathcal{O}$ での成分を $(\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z)$ とする．この変位の大きさは式 (2.24) から $-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2$ である．これを式 (1.1) と比べると，この表示は間隔

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\vec{x}\cdot\mathrm{d}\vec{x} \tag{2.29}$$

そのものであることがわかる．粒子の世界線は時間的ベクトルなので，これは負の値となる．このことから固有時間を

$$\mathrm{d}\tau^2=-\mathrm{d}\vec{x}\cdot\mathrm{d}\vec{x} \tag{2.30}$$

で定義した［式 (1.9)］わけであった．さて，$\mathrm{d}\tau$ を式 (2.30) の平方根として，ベクトル $\mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}\tau$ を考える（図 2.5）．このベクトルは $\mathrm{d}\vec{x}$ に定数を掛けたものだから，世界線に接している．その大きさは

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}\vec{x}\cdot\mathrm{d}\vec{x}}{(d\tau)^2}=-1$$

である．したがって，このベクトルは，世界線に接する単位の大きさの時間的

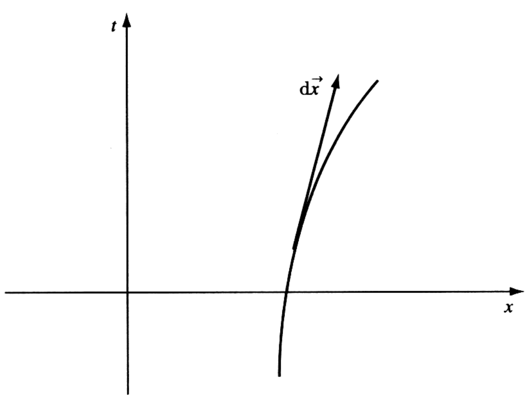


図 2.5　世界線に接している微小変位ベクトル $\mathrm{d}\vec{x}$

ベクトルである．瞬間的共動慣性系（MCRF）では，

$$\mathrm{d}\vec{x} \xrightarrow[\substack{\text{MCRF}\\ \mathrm{d}\tau=\mathrm{d}t}]{} (\mathrm{d}t, 0, 0, 0)$$

だから，

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau} \xrightarrow[\text{MCRF}]{} (1, 0, 0, 0)$$

であって，言い換えると

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau} = (\vec{e}_0)_{\text{MCRF}}$$

となる．これは，四元速度の**定義**であった．こうして，有用な表現

◆
$$\vec{U} = \mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}\tau \tag{2.31}$$

が得られた．さらに，四元加速度の候補として

$$\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}\tau^2}$$

をしらべてみよう．まず式 (2.28) を微分して，式 (2.26) を使うと

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\vec{U}\cdot\vec{U}) = 2\vec{U}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}\tau}$$

となる．しかし，$\vec{U}\cdot\vec{U} = -1$ であって定数なので，

$$\vec{U}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

がいえる．MCR 系では $\vec{U}$ には第 0 成分しかないので，この直交性から

$$\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}\tau} \xrightarrow[\text{MCRF}]{} (0, a^1, a^2, a^3)$$

であることがわかる．このベクトルを**加速度**四元ベクトル $\vec{a}$ と定義する．つまり

◆
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}\tau}, \qquad \vec{U}\cdot\vec{a} = 0 \tag{2.32}$$

2.9 節の練習問題 19 から加速度という言葉を使う根拠がわかる．

エネルギーと運動量　運動量が $\vec{p}$ の粒子を考えよう．そうすると

$$\vec{p}\cdot\vec{p}=m^2\vec{U}\cdot\vec{U}=-m^2 \tag{2.33}$$

となる．しかし，

$$\vec{p}\cdot\vec{p}=-E^2+(p^1)^2+(p^2)^2+(p^3)^2$$

だから

$$E^2=m^2+\sum_{i=1}^{3}(p^i)^2 \tag{2.34}$$

となる．これは粒子の全エネルギーを表すよく知られた表式である．

観測者 $\overline{\mathcal{O}}$ が，粒子の四元速度とは必ずしも一致しない四元速度 $\vec{U}_{\rm obs}$ で運動しているとしよう．そうすると

$$\vec{p}\cdot\vec{U}_{\rm obs}=\vec{p}\cdot\vec{e}_{\overline{0}}$$

であることがわかる．ここで $\vec{e}_{\overline{0}}$ は観測者の系の基底ベクトルである．この系では四元運動量の成分は次のようになる．

$$\vec{p}\underset{\overline{\mathcal{O}}}{\longrightarrow}(\overline{E},p^{\overline{1}},p^{\overline{2}},p^{\overline{3}})$$

したがって，式 (2.26) から

◆
$$-\vec{p}\cdot\vec{U}_{\rm obs}=\overline{E} \tag{2.35}$$

が得られる．これは重要な式である．ある観測者の観測する粒子エネルギー $\overline{E}$ は，いかなる系においてもスカラー積 $\vec{p}\cdot\vec{U}_{\rm obs}$ を計算することにより求まるわけである．これを観測者からみたエネルギーの “系に依存しない” 表現という．たいていの場合，このような表現を使うことで計算の見通しをよくできる．

2.7 光　　子

存在しない四元速度　　光子はヌル世界線上を運動するのだから，光子の動く道筋に沿っては

$$\mathrm{d}\vec{x}\cdot\mathrm{d}\vec{x}=0 \tag{2.36}$$

である．したがって $\mathrm{d}\tau$ はゼロで，式 (2.31) では，**四元速度を定義できない**ことがわかる．同じことだが，光が静止してみえる系はない（特殊相対論の第 2 の仮説）ので，光子については MCR 系がないのである．したがって，いかなる系の $\vec{e}_0$ も，光子の世界線に接することはないことになる．

注意してもらいたいのは，光子の軌道（それは直線なので，各点で同じ傾きをもつ）に接するベクトルは存在しうるのである．$\mathrm{d}\vec{x}$ がその一つの例である．問題なのは，**単位の大きさを**もった接ベクトルがないことである．どの接ベクトルもすべて大きさがゼロだからである．

四元運動量　　粒子の四元運動量は単位ベクトルではなくて，ある系に対しての粒子のエネルギーと運動量が，その系での成分となるようなベクトルである．もし光子がある系でエネルギー E をもつなら，その系で，$p^0 = E$ である．その光子が x 方向に運動していれば，$p^y = p^z = 0$ である．また，四元運動量は世界線（すなわち，ヌル世界線）に平行なので，$p^x = E$ でなくてはならない．確かに

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = -E^2 + E^2 = 0 \tag{2.37}$$

となっている．そこで，光子はエネルギーに等しい**空間的運動量**をもっているといってよい．

量子力学から光子はエネルギー

$$E = h\nu \tag{2.38}$$

をもっている．ここで，ν は振動数で，h はプランク定数 $(6.6256 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s})$ である．この関係式と四元運動量のローレンツ変換とを使うと，光子のドップラー偏移の公式が得られる．たとえば，系 $\mathcal{O}$ で光子の振動数が ν で x 方向に運動していたとしよう．このとき，$\mathcal{O}$ に対して x 方向に v の速度で運動する系 $\overline{\mathcal{O}}$ では，光子のエネルギーは

$$\begin{aligned}\overline{E} &= E/\sqrt{1-v^2} - p^x v/\sqrt{1-v^2}\\ &= h\nu/\sqrt{1-v^2} - h\nu v/\sqrt{1-v^2}\end{aligned}$$

となる．これを $h\bar{\nu}$ に等しいとおくと系 $\overline{\mathcal{O}}$ での振動数 $\bar{\nu}$ が得られ，

$$\bar{\nu}/\nu = (1-v)/\sqrt{1-v^2} = \sqrt{(1-v)/(1+v)} \tag{2.39}$$

となる．この式の拡張は 2.9 節の練習問題 25 にある．

静止質量ゼロの粒子　光子の静止質量はゼロでなくてはならない．それは

$$m^2 = -\vec{p}\cdot\vec{p} = 0 \tag{2.40}$$

だからである．四元運動量がヌルの粒子は，すべて静止質量がゼロでなくてはならないし，また逆もいえる．これまでに知られている静止質量のゼロの粒子は光子のみである．ニュートリノは非常に軽いが静止質量はゼロではない．(時には，重力子を加えることもある．重力波も，のちに示すように，光の速さで伝播するからである．しかし，光子とか重力子は量子力学から生れた概念で，重力の量子論はまだ確立されていないので，現在のところ，重力子は根拠のはっきりした概念とはいえない．) 静止質量がゼロの粒子のみが光の速さで伝播しうるということは，有限の静止質量をもつ粒子は，いくら加速しても光の速度に達しえないことからもわかる．というのも，粒子のエネルギーは無限になってしまうからである．別の言い方をすれば，たとえば x 方向に光の速さで運動する粒子は $p^1/p^0 = 1$ であるのに対し，x 方向に運動する静止質量 m の粒子はどんなにエネルギーをつぎこんでも，$\vec{p}\cdot\vec{p} = -m^2$ からわかるように $p^1/p^0 = \sqrt{1-m^2/(p^0)^2}$ であって，つねに 1 より小さい．光の速さに近づきうるようにはみえるけれども，そこには質的な違いがある．つまり，$m \neq 0$ の粒子には，その粒子が静止したローレンツ系，言い換えると，古い系に対しての速度が p^1/p^0 となる系として MCR 系が存在するのに対し，光子には静止系がありえないのである．

2.8　文　　献

相対論的運動学と質点の力学のごく初歩のみを説明した．これらのことは，素粒子物理で特に重要であり，素粒子物理は特殊相対論の厳密なチェックになっている．Hagedorn (1963) や Wiedemann (2007) をみよ．

2.9 練　習　問　題

1 $\{A^0=5,\ A^1=0,\ A^2=-1,\ A^3=-6\}$, $\{B_0=0,\ B_1=-2,\ B_2=4,\ B_3=0\}$, $\{C_{00}=1,\ C_{01}=0,\ C_{02}=2,\ C_{03}=3,\ C_{30}=-1,\ C_{10}=5,\ C_{11}=-2,\ C_{12}=-2,\ C_{13}=0,\ C_{21}=5,\ C_{22}=2,\ C_{23}=-2,\ C_{20}=4,\ C_{31}=-1,\ C_{32}=-3,\ C_{33}=0\}$ が与えられているとき，次の値を求めよ．(a) $A^\alpha B_\alpha$ の値，(b) すべての β について $A^\alpha C_{\alpha\beta}$ の値，(c) すべての σ について $A^\gamma C_{\gamma\sigma}$ の値，(d) すべての μ について $A^\nu C_{\mu\nu}$ の値，(e) すべての α と β について $A^\alpha B_\beta$ の値，(f) $A^i B_i$ の値，(g) すべての j と k について $A^j B_k$ の値．

2 次の式のなかのフリーおよびダミーの添字を指摘し，もとの添字と異なった添字を使って，書き換えよ．おのおのの式は何本の式を表しているか?

(a) $A^\alpha B_\alpha = 5$, (b) $A^{\bar\mu} = \Lambda^{\bar\mu}{}_\nu A^\nu$, (c) $T^{\alpha\mu\lambda} A_\mu C^\gamma{}_\lambda = D^{\gamma\alpha}$, (d) $R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R/2 = G_{\mu\nu}$.

3 式 (2.5) を証明せよ．

4 二つのベクトル $\vec{A} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (5,-1,0,1)$ と $\vec{B} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (-2,1,1,-6)$ が与えられたとき，系 $\mathcal{O}$ で次の量の成分を求めよ．(a) $-6\vec{A}$, (b) $3\vec{A}+\vec{B}$, (c) $-6\vec{A}+3\vec{B}$.

5 ベクトルの集合 $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\}$ について，$0\vec{a}+0\vec{b}+0\vec{c}+0\vec{d}=0$ なる自明の場合を除いて，いかなる線形結合をとってもゼロにならないとき，それらのベクトルは線形独立であるという．

(a) 式 (2.9) の基底ベクトルは線形独立であることを示せ．

(b) 次のベクトルの集合は線形独立か?

$$\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ 5\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}\}$$

6 系 $\mathcal{O}$ の t–x 時空図に，基底ベクトル $\vec{e}_0$ と $\vec{e}_1$ を書け．系 $\mathcal{O}$ に対して x 軸の正の方向に 0.6 の速度で運動している系 $\bar{\mathcal{O}}$ での対応するベクトルを書け．さらに，系 $\bar{\mathcal{O}}$ に対して x 軸の正の方向に 0.6 の速度で運動している系 $\bar{\bar{\mathcal{O}}}$ での対応するベクトルを書け．

7 (a) すべての α と β について，式 (2.10) が成り立っていることを示せ．

(b) 式 (2.9) から式 (2.11) を証明せよ．

8 (a) ゼロベクトル (0,0,0,0) は**すべての系**で同じ成分をもつことを示せ．

(b) (a) を使って，二つのベクトルが一つの系で同じ成分をもてば，すべての系で同じ成分をもつことを証明せよ．

9 すべての項を書き下すことで，次の式を証明せよ．

$$\sum_{\bar{\alpha}=0}^{3}\left(\sum_{\beta=0}^{3}\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}A^{\beta}\vec{e}_{\bar{\alpha}}\right)=\sum_{\beta=0}^{3}\left(\sum_{\bar{\alpha}=0}^{3}\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}A^{\beta}\vec{e}_{\bar{\alpha}}\right)$$

総和の順序が問題にならないので，総和の順序を明示しないで，アインシュタインの総和の規約を使って，$\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}A^{\beta}\vec{e}_{\bar{\alpha}}$ と書くことが正当化される．

10 任意のベクトル $\vec{A}$ の成分を適当に選んで，$A^{\alpha}(\Lambda^{\bar{\beta}}{}_{\alpha}\vec{e}_{\bar{\beta}}-\vec{e}_{\alpha})=0$ を使って，式 (2.13) を証明せよ．

11 $\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}$ を式 (1.12) で与えられる，$\mathcal{O}$ から $\bar{\mathcal{O}}$ へのローレンツ変換の行列とする．$\vec{A}$ は系 $\mathcal{O}$ での成分が (A^0, A^1, A^2, A^3) であるような任意のベクトルである．

(a) 行列 $\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\mu}}(-\boldsymbol{v})$ を書き下せ．

(b) すべての $\bar{\alpha}$ につき，$A^{\bar{\alpha}}$ を求めよ．

(c) すべての ν と α について，式 (2.18) を証明せよ．

(d) 系 $\bar{\mathcal{O}}$ から $\mathcal{O}$ へのローレンツ変換の行列の要素を書き下せ．

(e) (d) を利用して，A^{β} を $A^{\bar{\alpha}}$ で表せ．また，式 (2.18) との関係を述べよ．

(f) (c) と同様にして

$$\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}(\boldsymbol{v})\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\nu}(-\boldsymbol{v})=\delta^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}}$$

を示せ．

(g) 次の関係を確かめよ．

$$\vec{e}_{\alpha}=\delta^{\nu}_{\alpha}\vec{e}_{\nu}$$

および

$$A^{\bar{\beta}}=\delta^{\bar{\beta}}_{\bar{\mu}}A^{\bar{\mu}}$$

12 $\vec{A}\underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow}(0,-2,3,5)$ であるとき，以下の問に答えよ．

(a) 系 $\mathcal{O}$ に対し x 軸の正の方向に速度 0.8 で運動している系 $\bar{\mathcal{O}}$ で $\vec{A}$ の成分を求めよ．

(b) 系 $\bar{\mathcal{O}}$ に対し x 軸の正の方向に速度 0.6 で運動している系 $\bar{\bar{\mathcal{O}}}$ で $\vec{A}$ の成分を求めよ．

(c) 系 $\mathcal{O}$ での成分から $\vec{A}$ の大きさを求めよ．

(d) 系 $\bar{\mathcal{O}}$ での成分から $\vec{A}$ の大きさを求めよ．

13 系 $\bar{\mathcal{O}}$ は，系 $\mathcal{O}$ に対して速度 $\boldsymbol{v}$ で動き，系 $\bar{\bar{\mathcal{O}}}$ は，系 $\bar{\mathcal{O}}$ に対して速度 $\boldsymbol{v}'$ で動いているとする．

(a) $\mathcal{O}$ から $\bar{\bar{\mathcal{O}}}$ へのローレンツ変換は次のように表されることを示せ．

$$\Lambda^{\bar{\bar{\alpha}}}{}_{\mu} = \Lambda^{\bar{\bar{\alpha}}}{}_{\bar{\gamma}}(\boldsymbol{v}')\Lambda^{\bar{\gamma}}{}_{\mu}(\boldsymbol{v}) \tag{2.41}$$

(b) 式 (2.41) は，ローレンツ変換の行列の積であることを示せ．

(c) $\boldsymbol{v} = 0.6\vec{e}_x$, $\boldsymbol{v}' = 0.8\vec{e}_{\bar{y}}$ としたとき，すべての μ と $\bar{\bar{\alpha}}$ について $\Lambda^{\bar{\bar{\alpha}}}{}_{\mu}$ を求めよ．

(d) (c) で求めた変換がローレンツ変換になっていることを，いかなる $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ に対しても，$\Delta\bar{\bar{s}}^2 = \Delta s^2$ となることを示すことで証明せよ．

(e) (c) に与えた $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}'$ について

$$\Lambda^{\bar{\bar{\alpha}}}{}_{\bar{\gamma}}(\boldsymbol{v})\Lambda^{\bar{\gamma}}{}_{\mu}(\boldsymbol{v}')$$

を計算し，結果が (c) のものと異なることを示せ．この違いを物理的に説明せよ．

14　次の行列は $\mathcal{O}$ から $\bar{\mathcal{O}}$ へのローレンツ変換である．

$$\begin{pmatrix} 1.25 & 0 & 0 & 0.75 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.75 & 0 & 0 & 1.25 \end{pmatrix}$$

(a) $\mathcal{O}$ に対する $\bar{\mathcal{O}}$ の速度を求めよ．

(b) 逆変換を求めよ．

(c) ベクトル $\vec{A} \underset{\bar{\mathcal{O}}}{\longrightarrow} (1,2,0,0)$ の系 $\mathcal{O}$ での成分を求めよ．

15　(a) 系 $\mathcal{O}$ での速度が x 軸の正の方向に v である粒子の系 $\mathcal{O}$ での四元速度を粒子の静止系からのローレンツ変換を使って計算せよ．

(b) この結果を一般化して，粒子が任意の速度 $\boldsymbol{v}$ をもつとき，その四元速度を求めよ．ただし，$|\boldsymbol{v}| < 1$ とする．

(c) (b) での結果を用いて，$\boldsymbol{v}$ を成分 $\{U^\alpha\}$ を使って表せ．

(d) 四元速度の成分が $(2,1,1,1)$ である粒子の三元速度 $\boldsymbol{v}$ を求めよ．

16　もとの系に対する速度が W である粒子の四元速度に速度 $\boldsymbol{v}$ のローレンツ変換をほどこして，アインシュタインの速度の合成則を導け．

17　(a) $U^0 > 0$ で $\vec{U} \cdot \vec{U} = -1$ である時間的なベクトルはすべて，ある世界線の四元速度になっていることを示せ．

(b) このことを使って，いかなる時間的なベクトル $\vec{V}$ に対しても，$\vec{V}$ の空間成分がゼロとなるローレンツ系が存在することを示せ．

18　(a) 二つの直交した空間的ベクトルの和は空間的であることを示せ．

(b) 時間的ベクトルとヌルベクトルは直交できないことを示せ．

19 加速度四元ベクトル $\vec{a}$ が一定の空間的方向と大きさ（たとえば，$\vec{a}\cdot\vec{a}=\alpha^2\geqslant 0$）をもつとき，物体は**一様に加速されている**という．

(a) このことは，物体の MCR 系では $\vec{a}$ がつねに同じ成分をもつことを意味しており，またその成分はガリレイ的な意味での “加速度” であることを示せ．（これは，ロケットのエンジンが一定加速度を与えるというような物理的情況に対応している．）

(b) 物体が地球重力の加速度くらいの加速度 $\alpha=10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ で一様に加速されているとしよう．物体は最初静止していたとすると，時間 t 後の速度を求めよ．（正しい単位を使うこと．）この時間の間にどれだけ動いたか？ $v=0.999$ となるまでにはどれだけ時間がかかるか？

(c) (b) で経過した物体の固有時間を t の関数として求めよ．($\mathrm{d}\tau$ を世界線に沿って積分せよ．) $v=0.999$ となるまでに経過した固有時間はいくらか？ (b) のように加速された人は地球から銀河中心まで運動したときどれだけ年とるか？ 地球から銀河中心までの距離は $2\times10^{20}\,\mathrm{m}$ である．

20 粒子の世界線がある系で，次の式で与えられる．

$$x(t)=at+b\sin\omega t,\qquad y(t)=b\cos\omega t$$
$$z(t)=0,\qquad |b\omega|<1$$

粒子の運動をしらべ，四元速度と四元加速度を計算せよ．

21 粒子の世界線があるローレンツ系で，次のようにパラメーター表示されている．

$$t(\lambda)=a\sinh\left(\frac{\lambda}{a}\right),\qquad x(\lambda)=a\cosh\left(\frac{\lambda}{a}\right)$$

ここで λ はパラメーターで a は定数である．粒子の運動をしらべ，四元速度と四元加速度を計算せよ．λ は世界線に沿った固有時間であり，加速度は一様であることを示せ．a の意味を説明せよ．

22 (a) 四元運動量の成分が $(4,1,1,0)\,\mathrm{kg}$ である粒子のエネルギー，静止質量，三元速度 $\boldsymbol{v}$ を求めよ．

(b) 四元運動量が

$$\vec{p}_1\underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow}(3,-1,0,0)\,\mathrm{kg},\qquad \vec{p}_2\underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow}(2,1,1,0)\,\mathrm{kg}$$

である二つの粒子が衝突して，その二つの粒子が壊れて，新たに三つの粒子が生成された．そのうちの二つの粒子の四元運動量は

$$\vec{p}_3\underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow}(1,1,0,0)\,\mathrm{kg},\qquad \vec{p}_4\underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow}\left(1,-\frac{1}{2},0,0\right)\mathrm{kg}$$

であった．第三番目の粒子の四元運動量，エネルギー，静止質量，三元速度を求めよ．CM 系での三元速度も求めよ．

23　静止質量 m の粒子が三元速度 $\boldsymbol{v}$ をもっている．速度の 4 次のオーダーまで正しくエネルギーを求めよ．速度がいくらになったとき，4 次の項の絶対値 $\mathrm{O}(|\boldsymbol{v}|^4)$ が運動エネルギー $m|\boldsymbol{v}|^2/2$ の半分に等しくなるか?

24　電子と陽電子が消滅して，1 個の光子（γ 線）をつくることは禁止されることを四元運動量の保存則から示せ．2 個の光子を生成することは禁止されないことも示せ．

25　(a) 系 $\overline{\mathcal{O}}$ が系 $\mathcal{O}$ に対して x 軸方向に速度 v で動いているとしよう．系 $\mathcal{O}$ での光子は，振動数が ν で，系 $\mathcal{O}$ の x 軸に対して角 θ で運動しているとする．系 $\overline{\mathcal{O}}$ ではその振動数は

$$\bar{\nu}/\nu = (1 - v\cos\theta)/\sqrt{1 - v^2} \tag{2.42}$$

となることを示せ．

(b) 光子の運動が x 軸に垂直であっても $(\theta = \pi/2)$ 振動数の変化がある．これを**横ドップラー効果**といい，時間ののびのために起る．系 $\mathcal{O}$ と系 $\overline{\mathcal{O}}$ の間にドップラー偏移がないためには，光子はいかなる角度 θ で運動すればよいか?

(c) 式 (2.35) と式 (2.38) を使って，式 (2.42) を計算せよ．

26　静止質量 m の粒子を速度 v から $v + \delta v (\delta v \ll v)$ へ加速するのに必要なエネルギーを δv の 1 次まで計算せよ．粒子を光速まで加速するには無限のエネルギーが必要であることを示せ．

27　質量 10 kg の二つの同一の物体が同じ温度に保たれて静止している．その一方に 100 J の熱量を加える．両方の物体に同じ力を加えたとき，どちらが加速されやすいか?　また加速度の違いはいくらか?

28　$\vec{A} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (5, 1, -1, 0)$, $\vec{B} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (-2, 3, 1, 6)$, $\vec{C} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (2, -2, 0, 0)$ とする．系 $\overline{\mathcal{O}}$ が系 $\mathcal{O}$ に対して空間軸は系 $\mathcal{O}$ に平行に保って，x 軸の正の方向に速度 $v = 0.6$ で運動しているとする．

(a) 系 $\overline{\mathcal{O}}$ での $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ の成分を求めよ．

(b) 系 $\overline{\mathcal{O}}$ での成分を使って，スカラー積，$\vec{A}\cdot\vec{B}$, $\vec{B}\cdot\vec{C}$, $\vec{A}\cdot\vec{C}$, $\vec{C}\cdot\vec{C}$ を求めよ．またその値が系によらないことを示せ．

(c) $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ が時間的か，空間的か，ヌル的かを述べよ．

29　式 (2.24) や式 (2.26) のように成分表示を使用して

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\vec{U}\cdot\vec{U}) = 2\vec{U}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}\tau}$$

を証明せよ．

30　ロケットの四元速度が $\vec{U} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (2,1,1,1)$ であるとする．このロケットと運動量が $\vec{P} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (300,299,0,0) \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ の高速宇宙線とが衝突した．次の二つの方法を使って，ロケットの乗員が観測する宇宙線のエネルギーを求めよ．

(a) 系 $\mathcal{O}$ からロケットの MCR 系へのローレンツ変換を求め，$\vec{P}$ の成分を変換する．

(b) 式 (2.35) を使う．

(c) どちらが便利か?　それはなぜか?

31　振動数 ν の光子が入射角 θ で鏡に入射し，振動数を変えることなく反射された．鏡に与えた運動量を計算せよ．もし光子が反射ではなく吸収されたとしたら，運動量変化はいくらか?

32　実験室に静止している電荷 e，静止質量 m の粒子が振動数 ν_i の光子を散乱する．これを**コンプトン散乱**という．散乱された光子は入射の方向と θ の角をなして出ていく．四元運動量の保存則を使って，散乱された光子の振動数 ν_f が

$$\frac{1}{\nu_f} = \frac{1}{\nu_i} + h\left(\frac{1-\cos\theta}{m}\right) \tag{2.43}$$

で与えられることを示せ．

33　宇宙空間は高エネルギーの陽子からなる宇宙線とマイクロ波の背景輻射で満たされている．これらの粒子と光子はコンプトン散乱をしうる．太陽の静止系で測定してエネルギーが $h\nu = 2\times 10^{-4}\,\mathrm{eV}$ の光子がエネルギー $10^9 m_\mathrm{p} = 10^{18}\,\mathrm{eV}$ の陽子を散乱したとする．陽子の静止系で式 (2.43) を使って，散乱の結果太陽の静止系で光子のもつ最大のエネルギーを計算せよ．このエネルギーはどの波長領域にあるか?（X 線か，可視光か，などで答えよ．）

34　$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ が任意のベクトルで α と β が任意の数であるとき次のことを証明せよ．

$$(\alpha\vec{A})\cdot\vec{B} = \alpha(\vec{A}\cdot\vec{B})$$
$$\vec{A}\cdot(\beta\vec{B}) = \beta(\vec{A}\cdot\vec{B})$$
$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$
$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C}$$

35　式 (2.15) で $\{\vec{e}_\alpha\}$ から得られるベクトル $\{\vec{e}_{\overline{\beta}}\}$ はすべての $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ に対して

$$\vec{e}_{\overline{\alpha}}\cdot\vec{e}_{\overline{\beta}} = \eta_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}$$

を満たすことを証明せよ．

3
特殊相対論におけるテンソル解析

3.1　メトリックテンソル

ある系 $\mathcal{O}$ の基底 $\{\vec{e}_\alpha\}$ でのベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ の表現を考える．

$$\vec{A} = A^\alpha \vec{e}_\alpha, \qquad \vec{B} = B^\beta \vec{e}_\beta$$

これらのスカラー積は

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A^\alpha \vec{e}_\alpha) \cdot (B^\beta \vec{e}_\beta)$$

(第一の和と第二の和を区別するため違った添字 α，β を使っていることの重要性に注意せよ.）2.9 節の練習問題 34 から，これは次のように書ける．

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^\alpha B^\beta (\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta)$$

これは式 (2.27) から

◆
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^\alpha B^\beta \eta_{\alpha\beta} \tag{3.1}$$

これは次の式の系に依存しない書き方である．

$$-A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3$$

数 $\eta_{\alpha\beta}$ は“メトリックテンソルの成分”とよばれる．あとでこの名称をつけた理由を明らかにする．今は二つのベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ にスカラー積とよばれる一

つの**数**を対応させる“規則”を与えることに注意しておこう．その数が二重和 $A^\alpha B^\beta \eta_{\alpha\beta}$ であるというのが規則である．そのような規則が，これから議論するように“テンソル”の意味の核心にある．

3.2　テンソルの定義

次のようにテンソルを定義する．

◆　タイプ $\binom{0}{N}$ のテンソルとは N 個のベクトルから実数への関数で，その N 変数のおのおのについて線形なものをいう．

この定義が何を意味するかをみていこう．しばらくの間，単に記法 $\binom{0}{N}$ を受けいれておく．そうすることが意味のあることだということがあとの章で与えられる．スカラー積に対する規則，式 (3.1) は上の $\binom{0}{2}$ テンソルの定義を満たす．それは二つのベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ から一つの数 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ をつくる規則である．これがその変数について線形であるとは，2.9 節の練習問題 34 で示されたことを意味する．すなわち第一の変数についての線形性は次式を意味する．

$$\left.\begin{aligned}(\alpha\vec{A})\cdot\vec{B} &= \alpha(\vec{A}\cdot\vec{B})\\ (\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C} &= \vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C}\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

一方，第二の変数についての線形性は次式を意味する．

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot(\beta\vec{B}) &= \beta(\vec{A}\cdot\vec{B})\\ \vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) &= \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}\end{aligned}$$

この線形性の定義はテンソル代数にとって中心的な重要性をもち，このことを注意深く学ばなければならない．

このドット積がテンソルであることを明確化するために，それに対する名前と記法を導入しよう．$\mathbf{g}$ を**メトリックテンソル**とすると，定義から次のように書ける．

$$\mathbf{g}(\vec{A},\vec{B}) \equiv \vec{A}\cdot\vec{B} \tag{3.3}$$

こうすると $\mathbf{g}(\quad,\quad)$ は二つの変数をとり，それらについて線形な関数と見なすことができる．

$$\mathbf{g}(\alpha\vec{A}+\beta\vec{B},\vec{C})=\alpha\mathbf{g}(\vec{A},\vec{C})+\beta\mathbf{g}(\vec{B},\vec{C}) \tag{3.4}$$

(第二の変数についても同様). $\mathbf{g}$ が二つの変数に対してとる値が，それらのドット積で実数であり，$\mathbf{g}(\vec{A},\vec{B})$ と書く.

テンソルの定義はベクトルの成分については何も述べていないことに注意せよ．テンソルは，ベクトルの成分を計算する基準系に依存せず同じ実数を与える規則でなければならない．前節で式 (3.1) がこの要請を満たすことを示した．このことからテンソルをベクトルの成分の関数ではなく，ベクトル自身の関数と見なせることがわかり，またこれはしばしば概念的にも有用である.

通常の位置の関数 $f(t,x,y,z)$ は，ベクトルを変数としてもたない，実数値関数であることに注意せよ．したがって，それは $\binom{0}{0}$ テンソルとして分類される.

“関数” という言葉の使い方について　関数の最も馴染み深い概念は y と x を実数として

$$y=f(x)$$

という式で表される．しかしこれはより正確には次のように書くことができる．f とは実数（上式では象徴的に y と書いた）を，f の変数である（上式で象徴的に x と書いた）もう一つの実数に対応させる “規則”（写像とよばれる）である．関数それ自身は $f(x)$ ではない．なぜなら $f(x)=y$ であり，それは関数の “値” とよばれる実数だからである．関数自体は f であり，それを $f(\ \ )$ と書いて一つの変数をもつことを示す．代数学においては，無意識的に x と y を二つの意味，一つは特定の実数，もう一つは一般の任意の実数としての**名前**を同時にもっていると考えるから，こんなことは無用な細かい区別にみえる．テンソル解析においては，この区別を明確にしておこう．$\vec{A}$ と $\vec{B}$ は**特定の**ベクトルであり，$\vec{A}\cdot\vec{B}$ は特定の実数である．そして $\mathbf{g}$ は $\vec{A}$ と $\vec{B}$ に $\vec{A}\cdot\vec{B}$ を対応させる関数の名前である.

テンソルの成分　ベクトルと同じようにテンソルも成分をもつ．それらは次のように定義される.

> 系 $\mathcal{O}$ での $\binom{0}{N}$ タイプのテンソルの成分は，系 $\mathcal{O}$ の基準ベクトル $\{\vec{e}_\alpha\}$ を変数にとったときの関数の値である.

こうして系に依存する数（基底は特定の系に関するものだから系に依存する）

として成分の概念をもつことになる．メトリックテンソルに対して，これは次の成分を与える．

◆
$$\mathbf{g}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta} \tag{3.5}$$

したがって以前に導入した行列 $\eta_{\alpha\beta}$ は，この基底上の $\mathbf{g}$ の成分の列と考えることができる．別の基底をとると，成分は異なる値となる．のちにこのことの多くの例がでてくる．まず，特別に重要なクラスのテンソルを考えよう．

3.3　$\binom{0}{1}$ テンソル：一形式

タイプ $\binom{0}{1}$ のテンソルは，コベクトル，共変ベクトル，あるいは一形式とよばれる．しばしば，これらの名前は一つの本の中でも同じ意味をもつものとして用いられる．

一般的性質　　ある任意の一形式を $\tilde{p}$ とよぶことにしよう．（記号の上に ~ をつけたものが一形式，→ をつけたものがベクトルを表すという記法を採用する．）すると，一つのベクトルを変数としたとき，$\tilde{p}$ はある実数を与える．つまり $\tilde{p}(\vec{A})$ は実数である．$\tilde{q}$ を別の一形式とする．そのとき次の一形式

$$\left.\begin{aligned} \tilde{s} &= \tilde{p} + \tilde{q} \\ \tilde{r} &= \alpha\tilde{p} \end{aligned}\right\} \tag{3.6a}$$

を変数 $\vec{A}$ に対して，それぞれ次の値

$$\left.\begin{aligned} \tilde{s}(\vec{A}) &= \tilde{p}(\vec{A}) + \tilde{q}(\vec{A}) \\ \tilde{r}(\vec{A}) &= \alpha\tilde{p}(\vec{A}) \end{aligned}\right\} \tag{3.6b}$$

をとる一形式として定義できる．これらの規則でもって，すべての一形式の集合はベクトル空間の公理を満たし，コベクトルまたは共変ベクトルという名前のいわれとなる．この空間は $\vec{A}$ のようなすべてのベクトルのつくる空間と区別するため “双対ベクトル空間” とよばれる．

ベクトルを議論するときに，その成分や変換則に大幅に頼った．そこで $\tilde{p}$ についてそれらはどうなるかしらべてみよう．$\tilde{p}$ の成分を p_α とよぶ：

$$p_\alpha \equiv \tilde{p}(\vec{e}_\alpha) \tag{3.7}$$

一つの下付の添字をもった**どんな**成分も，一形式の成分であると約束する．上付の添字は，あるベクトルの成分を表す．成分を用いると

$$
\begin{aligned}
\tilde{p}(\vec{A}) &= \tilde{p}(A^\alpha \vec{e}_\alpha) \\
&= A^\alpha \tilde{p}(\vec{e}_\alpha) \\
\tilde{p}(\vec{A}) &= A^\alpha p_\alpha
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

この二番目の等号は，われわれが採用したテンソルの定義の核心である線形性から導かれる．したがって，実数 $\tilde{p}(\vec{A})$ は容易に和 $A^0p_0 + A^1p_1 + A^2p_2 + A^3p_3$ であることがわかる．このすべての項が $+$ 符号であることに注意せよ．この操作を $\vec{A}$ と $\tilde{p}$ との**縮約**とよぶ．この操作は他のテンソルの助けを借りず，任意の一形式とベクトルの間で行われるから，テンソル解析においては，スカラー積よりも，**もっと**基本的なものである．二つのベクトルは，第三のテンソル，メトリックの助けを借りなければ，実数（それらのドット積）をつくることができない．

$\tilde{p}$ の基底 $\{\vec{e}_{\overline{\beta}}\}$ 上の成分は

$$
\begin{aligned}
p_{\overline{\beta}} &\equiv \tilde{p}(\vec{e}_{\overline{\beta}}) = \tilde{p}(\Lambda^\alpha{}_{\overline{\beta}}\vec{e}_\alpha) \\
&= \Lambda^\alpha{}_{\overline{\beta}}\tilde{p}(\vec{e}_\alpha) = \Lambda^\alpha{}_{\overline{\beta}} p_\alpha
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

これと

$$\vec{e}_{\overline{\beta}} = \Lambda^\alpha{}_{\overline{\beta}}\vec{e}_\alpha$$

を比べると，一形式の成分は基底ベクトルとまったく同じように変換し，ベクトルの成分とは正反対に変換することがわかる．“反対” とは，逆変換を用いるという意味である．逆変換を用いることによって，任意のベクトル $\vec{A}$ と一形式 $\tilde{p}$ に対して，$A^\alpha p_\alpha$ が系のとり方に依存しないことが保証される．これは非常に重要なことなので，詳しく証明しよう．

$$A^{\overline{\alpha}} p_{\overline{\alpha}} = (\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_\beta A^\beta)(\Lambda^\mu{}_{\overline{\alpha}} p_\mu) \tag{3.10a}$$

$$= \Lambda^\mu{}_{\overline{\alpha}}\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_\beta A^\beta p_\mu \tag{3.10b}$$

$$= \delta^\mu_\beta A^\beta p_\mu \tag{3.10c}$$

$$= A^{\beta} p_{\beta} \tag{3.10d}$$

(これはベクトル $A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$ が系に依存しないように保たれたのと同じ要領である.) この逆変換が, “双対ベクトル空間” での “双対” という言葉のもとである. 基底ベクトルと**同じ**変換性が “共変 (covariant) ベクトル” あるいは縮めて “コベクトル” の**共変**あるいは**コ**の由来である. ふつうベクトルの成分は, ($A^{\beta}\vec{e}_{\beta}$ を系に依存しないようにするため) 基底ベクトルとは逆に変換するので, しばしば反変ベクトルとよばれる. これらのよび方は今では古いものになってしまった. 最近では, 一つを “ベクトル”, もう一つを “双対ベクトル” あるいは “一形式” とよぶのがふつうである. “共変” と “反変” が用いられなくなった理由は, それらが概念的に異なる事柄を混同させるからである. 基底の変換は**新しい**ベクトルの**古い**ベクトルでの表現である. 成分の変換は**同じ**対象の新しい基底での表現である. 先に進む前に, この違いを確かにしておくことは読者にとって重要なことである.

基底一形式　すべての一形式の集合はベクトルの空間をつくるから, 任意の四つの線形独立な一形式を基底として用いることができる. (任意のベクトル空間でのように, ある一形式の集合が線形独立であるとは, それらのどんな自明でない線形結合もゼロ一形式とならない場合をいう.) しかし, 前節で, ある一形式の成分を定義するためすでに基底ベクトル $\{\vec{e}_{\alpha}\}$ を用いた. このことは, この基底ベクトルを使ってそれに附随する一形式の基底 $\{\tilde{\omega}^{\alpha}, \alpha = 0, \cdots, 3\}$ を定義できることを示唆している. これを $\{\vec{e}_{\alpha}\}$ に**双対な**基底とよぶ. この基底上で一形式は上で定義した成分をもつ. すなわち, 次のような集合 $\{\tilde{\omega}^{\alpha}\}$ が欲しいのである.

$$\tilde{p} = p_{\alpha}\tilde{\omega}^{\alpha} \tag{3.11}$$

($\tilde{\omega}^{\alpha}$ に対して上付の添字を用いることにより, 和の規約が果されることに注意せよ.) $\{\tilde{\omega}^{\alpha}\}$ は, ちょうど $\{\vec{e}_{\alpha}\}$ が四つの違ったベクトルであったように, **四つの違った**一形式である. 任意のベクトル $\vec{A}$ と一形式 $\tilde{p}$ に対して式 (3.8) から

$$\tilde{p}(\vec{A}) = p_{\alpha}A^{\alpha}$$

しかし, 式 (3.11) から

$$
\begin{aligned}
\tilde{p}(\vec{A}) &= p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha(\vec{A}) \\
&= p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha(A^\beta \vec{e}_\beta) \\
&= p_\alpha A^\beta \tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta)
\end{aligned}
$$

(第二行で添字として β を用いたのは，それに関する和を α に関する和と区別するためであることに注意せよ.）ここで最後の行は

◆
$$\tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta) = \delta^\alpha_\beta \tag{3.12}$$

のときにのみ，すべての A^β と p_α に対して $p_\alpha A^\alpha$ に等しくなる．式 (3.7) と比べると，この式は α 番目の基底一形式の β 番目の成分を与えていることがわかる．したがって，これは α 番目の基底一形式を**定義**している．これらの成分を次のように書き下すことができる．

$$
\begin{aligned}
\tilde{\omega}^0 &\underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (1, 0, 0, 0) \\
\tilde{\omega}^1 &\underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (0, 1, 0, 0) \\
\tilde{\omega}^2 &\underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (0, 0, 1, 0) \\
\tilde{\omega}^3 &\underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (0, 0, 0, 1)
\end{aligned}
$$

ここで次の二点を理解しておくことが重要である．一つは式 (3.12) が，基底 $\{\tilde{\omega}^\alpha\}$ を基底 $\{\vec{e}_\beta\}$ で定義していることである．ベクトルの基底から一意的で便利な一形式の基底が導かれる．これがただ一つの可能な基底ではないが，基底間の関係式 (3.12) があるということはたいへん便利なのでつねにこれを使おう．式 (3.12) の関係は二つの基底間の関係であって，$\tilde{\omega}^0$ と $\vec{e}_0$ のような個別のペアの間の関係ではない．すなわち，$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，と $\vec{e}_3$ をそのままにしておいて，$\vec{e}_0$ を変えると，それは一般に $\tilde{\omega}^0$ ばかりでなく，$\tilde{\omega}^1$，$\tilde{\omega}^2$，$\tilde{\omega}^3$ をも変えてしまう．第 2 点は，ベクトルと一形式を，ともに四つの成分を与えることによって記述したが，それらの幾何学的な意味は非常に違っているということである．成分は内容のほんの一部を語っているにすぎないということを忘れてはならない．基底が残りの情報を含んでいる．すなわち，数の集合 $(0, 2, -1, 5)$ だけでは，何も定義しない．それに何らかの意味をもたせるためには，それらの数がベクト

ル基底上での成分か，あるいは一形式上での成分か，また無限に可能な基底のどれかをいわなければならない．

あと残っていることは，系の変化に対して $\{\tilde{\omega}^{\alpha}\}$ がどのように変換するかを決めることである．すなわち，おのおのの系はそれ自身の一意的な集合 $\{\tilde{\omega}^{\alpha}\}$ をもっている．二つの系の，そのような集合はどのように関係しているのだろうか？　ここでのその関係の導出は，基底ベクトルに対するそれと類似している．それは，正しい位置に添字がくるような唯一の式となる．

$$\tilde{\omega}^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\tilde{\omega}^{\beta} \tag{3.13}$$

これはベクトルの成分に対する変換と同じであり，一形式の成分に対するものとは逆になっている．

一形式の描像　　ベクトルのイメージを必要とするときには，われわれはふつう矢印を思い浮かべる．一形式に対してもこのようなイメージをもつことは有用である．その描像は一形式がベクトルを実数に写像するという事実を反映していなければならない．ベクトル自身は，自動的には別のベクトルを実数に写像しない．そうするためには，スカラー積を定義するためのメトリックが必要である．違ったメトリックでは，同じベクトルでも違ったスカラー積をつくる．したがって，二つのベクトルはそれら自体では数を与えない．われわれは今までに定義された他のどんなテンソルにも依存しない一形式の描像を必要とする．数学者によって一般に用いられるものを，図 3.1 に示した．一形式は表面の列として表される．その "大きさ" は，表面の間の間隔によって与えられる．間隔が広いほど，その大きさは小さい．この描像では，一形式をベクトルに作用させたとき得られる数はベクトルの矢が貫く表面の数である．したがって，間隔が狭いほど数は大きい．［図 3.1 (b) と (c) を比べよ．］四次元空間では，その表面は三次元である．一形式はベクトルではないので，一意的な方向を定義しない．むしろ，空間を "スライスする" 方法を定義する．この描像を正当化するため，ある特別な一形式，勾配をみてみよう．

関数の勾配は一形式である　　すべての事象 $\vec{x}$ で定義されたスカラー場 $\phi(\vec{x})$ を考える．ある粒子（あるいは人）の世界線は，その上の各事象で ϕ のある値と出会い（図 3.2 参照），その値は事象から事象へと変っていく．世界線上の各

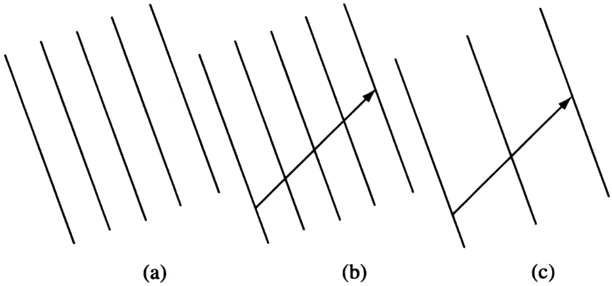


図 3.1 (a) 矢としてのベクトルの描像と相補的な一形式の描像．(b) ある与えられたベクトル上での一形式の値は，ベクトルの矢が貫く表面の数である．(c) 同じベクトル上でのより小さな一形式の値は，貫く表面の数が少ない．より大きな一形式ほど，空間をより細かくスライスする．

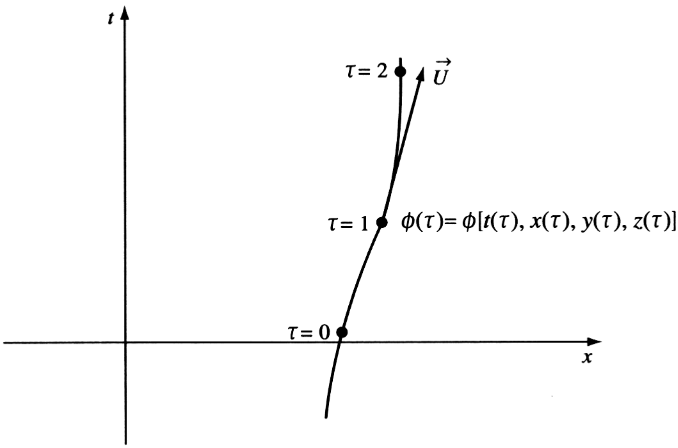


図 3.2 固有時間 τ でパラメーターづけられた世界線とそれに沿ってのスカラー場 $\phi(t,x,y,z)$ の値 $\phi(\tau)$

点に，それに沿っての固有時間 τ（すなわち，その曲線上を動いている時計の読み）の値をふりあてる（パラメーターづける）と，曲線上の事象の座標は τ の関数として次のように書ける：

$$[t = t(\tau),\, x = x(\tau),\, y = y(\tau),\, z = z(\tau)]$$

四元速度は次の成分をもつ．

$$\vec{U} \to \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}, \cdots\right)$$

ϕ は，t, x, y, z の関数だから，それは陰に曲線上の τ の関数である：

$$\phi(\tau) = \phi[t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau)]$$

その曲線上での変化率は

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial t}U^t + \frac{\partial\phi}{\partial x}U^x + \frac{\partial\phi}{\partial y}U^y + \frac{\partial\phi}{\partial z}U^z \end{aligned} \tag{3.14}$$

この最後の式で，ベクトル $\vec{U}$ から数 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\tau$ をつくる方法を見つけたことは明らかであろう．この数は，$\vec{U}$ が接ベクトルとなる曲線上での，ϕ の変化率を表す．またこの数 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\tau$ は明らかに $\vec{U}$ の線形関数であり，したがって一形式を定義したことになる．式 (3.8) と比べることにより，この一形式は成分 $(\partial\phi/\partial t, \partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y, \partial\phi/\partial z)$ をもつ．この一形式を ϕ の**勾配**とよび，$\tilde{\mathrm{d}}\phi$ と書く：

$$\tilde{\mathrm{d}}\phi \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \tag{3.15}$$

勾配がわれわれの一形式の定義にあてはまることは明らかである．あとに三次元ベクトル解析では，ふつう勾配をベクトルとして導入することを示す．

この勾配を用いて一形式に対するわれわれの描像を正当化することができる．図 3.3 に等高線を示した地形図の一部を描いた．h を高度とすると，その勾配 $\tilde{\mathrm{d}}h$ は明らかに A のような線が密集している地域で最大になり，線がまばらな B の近くで最小になる．さらに，2 点間の距離がどれだけの高さの差を含んでいるかを知りたいとする．そのために地形図上のその 2 点間に直線を引く．するとその線と交わる等高線の数が高度の変化を与える．たとえば，直線①は 1.5 個の等高線と交わり，直線②は二つと交わる．直線③は，②の近くから始まっているが，違った方向を向いており，0.5 の高さしか登っていない．それらの数は Δh であり，$\Delta\vec{x}$ と $\tilde{\mathrm{d}}h$ との縮約である．つまり，$\Delta h = \sum_i (\partial h/\partial x^i)\Delta x^i$，あるいは $\tilde{\mathrm{d}}h$ の $\Delta\vec{x}$ 上での**値**である［式 (3.8) 参照］．

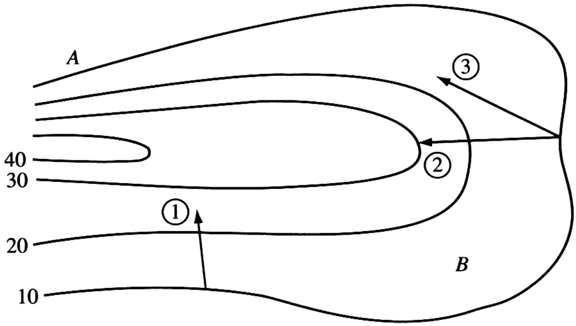


図 3.3　地形図は勾配一形式（局所的な等高線）を例示している．任意の経路（矢）に沿っての高さの変化は，その矢が交差する線の数である．

したがって一形式は表面の列（図 3.4）として表され，そのベクトル $\vec{V}$ との縮約は，$\vec{V}$ が貫く表面の数である．表面の間隔が近ければ近いほど，$\tilde{\omega}$ は大きい．ベクトルが直線であるように，一形式の表面はまっすぐでお互いに平行である．これは，われわれが広がった領域に対するものでなく，一点での一形式を取り扱うからである．接ベクトルと同じ意味で "接" 一形式を考えているのである．

これらの図はなぜ一般に勾配をベクトルとよべないかを示している．坂の "上" を向いている，すなわち単位長さあたり最も多い数の等高線と交差するようなベクトルを勾配ベクトルとすればよいと思うかもしれない．しかしそのた

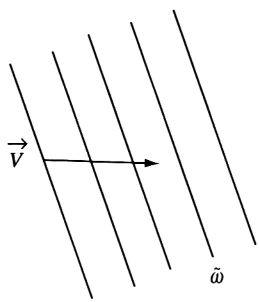


図 3.4　値 $\tilde{\omega}(\vec{V})$ は 2.5 である

めの鍵は“単位長さあたり”という言葉である．もしメトリック，空間における距離の目安，があるなら，そのようにしてベクトルを勾配に附随させることができる．しかしそのときにはベクトルをつくり出すためにメトリックを介在させなければならない．幾何学的には，勾配はそれ自身で一形式なのである．

式 (3.15) が首尾一貫した定義であることを確かめよう．成分はどのように変換するだろうか?　一形式に対しては次式が満たされなければならない．

$$(\tilde{\mathrm{d}}\phi)_{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\beta}{}_{\bar{\alpha}}(\tilde{\mathrm{d}}\phi)_{\beta} \tag{3.16}$$

一方，われわれは偏微分がどのように変換するかを知っている：

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^{\bar{\alpha}}} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\bar{\alpha}}}$$

これは次式を意味する．

$$(\tilde{\mathrm{d}}\phi)_{\bar{\alpha}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\bar{\alpha}}}(\tilde{\mathrm{d}}\phi)_{\beta} \tag{3.17}$$

式 (3.16) と式 (3.17) は首尾一貫しているだろうか?　答はイエスである．その理由は

$$x^{\beta} = \Lambda^{\beta}{}_{\bar{\alpha}}x^{\bar{\alpha}}$$

であることと $\Lambda^{\beta}{}_{\bar{\alpha}}$ が定数にすぎないことから，

◆
$$\partial x^{\beta}/\partial x^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\beta}{}_{\bar{\alpha}} \tag{3.18}$$

となるからである．この恒等式は基本的である．勾配の成分はこうしてベクトルの成分の逆のように変換する．したがって，勾配は“理想的な”一形式である．

微分に対する記法　　今後，微分を表すために通常用いられる次の記法を採用する．

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \equiv \phi_{,x}$$

より一般には

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^{\alpha}} \equiv \phi_{,\alpha} \tag{3.19}$$

と表す．添字 α は式 (3.19) の左辺の分母の添字として現れ，右辺には下付の添字として現れることに注意せよ．今までみてきたように，添字のこの置き方は

式の変換性と首尾一貫している．

特に

$$x^{\alpha}{}_{,\beta} \equiv \delta^{\alpha}_{\beta}$$

であって，これと式 (3.12) を比べると

$$\tilde{\mathrm{d}}x^{\alpha} \equiv \tilde{\omega}^{\alpha} \tag{3.20}$$

が結論される．これは基底一形式は $\tilde{\mathrm{d}}x^{\alpha}$ にすぎないという有用な結果である．これを用いると，任意の関数 f に対して次のように書くことができる．

$$\tilde{\mathrm{d}}f = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}\tilde{\mathrm{d}}x^{\alpha}$$

この式は物理学者流の“あいまいな計算”での微分あるいは無限小に対する書き方に非常に形が似ている．実際，記号 $\tilde{\mathrm{d}}$ は，この比較を示唆するために選んだのであった．しかし，この書き方について，読者は次の点での混同を避けなければならない．対象 $\tilde{\mathrm{d}}f$ はテンソルであり，f の微小な増分ではない．もちろん，それは小さなベクトルと縮約されれば，小さな（“無限小”の）値をもつことはできる．

垂直一形式　勾配での場合のように，垂直ベクトル（表面に直交するベクトル）の概念は，より自然に垂直一形式の概念に置き換えられる．垂直ベクトルが定義されるためには，スカラー積をもつ必要がある．垂直ベクトルは表面に接するすべてのベクトルに直交していなければならない．これはメトリックを用いてのみ定義される．しかし垂直一形式はメトリックに頼ることなく定義できる．一形式がある表面に垂直であるとは，その表面に接するすべてのベクトル上で，その値がゼロであるときをいう．もし表面が閉じていて時空を“内側”と“外側”に分けるなら，**外向き**の垂直一形式とは，垂直一形式であり，しかも表面から外向きを指しているベクトル上でのその値が正であるものをいう．3.10 節の練習問題 13 で，$\tilde{\mathrm{d}}f$ が $f=$ 一定の表面に垂直であることを証明する．

3.4 $\binom{0}{2}$ テンソル

これらは二つのベクトルを変数としてもつテンソルである．その例としてすでにメトリックテンソルを知っているが，この種の最も簡単なものは，次の規

則によってつくられた二つの一形式の積である．$\tilde{p}$ と $\tilde{q}$ を二つの一形式とすると，ベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ を変数として与えたとき，数 $\tilde{p}(\vec{A})\cdot\tilde{q}(\vec{B})$，すなわち $\binom{0}{1}$ テンソルによってつくられた数の積を与える $\binom{0}{2}$ テンソルとして $\tilde{p}\otimes\tilde{q}$ を定義する．記号 $\otimes$ は "外積記号" とよばれ，$\binom{0}{2}$ テンソルが一形式からどのようにつくられるかを示す形式的な記号である．$\otimes$ は交換可能でないことに注意せよ：$\tilde{p}\otimes\tilde{q}$ と $\tilde{q}\otimes\tilde{p}$ は違うテンソルである．はじめのものは値 $\tilde{p}(\vec{A})\tilde{q}(\vec{B})$，次のものは $\tilde{q}(\vec{A})\tilde{p}(\vec{B})$ を与える．

成　分　　最も一般の $\binom{0}{2}$ テンソルは一つの簡単な外積ではないが，つねに外積の和として表すことができる．これをみるためまず任意の $\binom{0}{2}$ テンソル $\mathbf{f}$ の成分

$$f_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) \tag{3.21}$$

を考えなければならない．おのおのの添字は四つの値をとりうるから，全部で 16 個の成分をもち，それらは行列に並べられると考えることができる．任意のベクトル上での $\mathbf{f}$ の値は

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\vec{A}, \vec{B}) &= \mathbf{f}(A^\alpha \vec{e}_\alpha, B^\beta \vec{e}_\beta)\\ &= A^\alpha B^\beta \mathbf{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)\\ &= A^\alpha B^\beta f_{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{3.22}$$

（ここで再び二つの違った添字は別の和を区別するために用いたことに注意せよ.）このようなテンソルに対する基底をつくることができるだろうか?　すなわち式 (3.11) に類似の

$$\mathbf{f} = f_{\alpha\beta}\tilde{\omega}^{\alpha\beta} \tag{3.23}$$

となるような 16 個の $\binom{0}{2}$ テンソル $\tilde{\omega}^{\alpha\beta}$ の集合を定義できるだろうか?　これができるならば，

$$f_{\mu\nu} = \mathbf{f}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = f_{\alpha\beta}\tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu)$$

となるが，この式は前と同様，次の関係を意味する．

$$\tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu \tag{3.24}$$

しかし δ^α_μ は［式 (3.12) より］，$\tilde{\omega}^\alpha$ の $\vec{e}_\mu$ 上での値であり，δ^β_ν に対しても同様である．したがって，$\tilde{\omega}^{\alpha\beta}$ は，その値がちょうど二つの基底一形式の値の積と

なるようなテンソルであり，これから次式が結論される．

$$\tilde{\omega}^{\alpha\beta} = \tilde{\omega}^{\alpha} \otimes \tilde{\omega}^{\beta} \tag{3.25}$$

したがってテンソル $\tilde{\omega}^{\alpha} \otimes \tilde{\omega}^{\beta}$ はすべての $\binom{0}{2}$ テンソルに対する基底であり，任意の $\binom{0}{2}$ テンソルは次のように書くことができる．

◆ $$\mathbf{f} = f_{\alpha\beta}\tilde{\omega}^{\alpha} \otimes \tilde{\omega}^{\beta} \tag{3.26}$$

これは一般の $\binom{0}{2}$ テンソルを簡単な外積テンソルの和として書く一つの方法である．

対称性　$\binom{0}{2}$ テンソルは二つの変数をもち，上でみたようにそれらの順序は大事である．テンソルの変数の入れ換えに対する値の変化は，その重要な性質を与える．テンソル $\mathbf{f}$ は

$$\mathbf{f}(\vec{A}, \vec{B}) = \mathbf{f}(\vec{B}, \vec{A}) \quad \forall \vec{A}, \vec{B} \tag{3.27}$$

のとき**対称**とよばれる．$\vec{A} = \vec{e}_{\alpha}$ と $\vec{B} = \vec{e}_{\beta}$ とおくと，これから成分の関係が導かれる．

$$f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha} \tag{3.28}$$

これは成分からつくった行列が対称であるという条件と同じである．任意の $\binom{0}{2}$ のテンソル $\mathbf{h}$ から次の規則により，新しい対称テンソル $\mathbf{h}_{(s)}$ を定義することができる．

$$\mathbf{h}_{(s)}(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{1}{2}\mathbf{h}(\vec{A}, \vec{B}) + \frac{1}{2}\mathbf{h}(\vec{B}, \vec{A}) \tag{3.29}$$

$\mathbf{h}_{(s)}$ が上の式 (3.27) を満たすことを確認しておくこと．成分では，これは

$$h_{(s)\alpha\beta} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha}) \tag{3.30}$$

を意味する．これは非常に重要な数学的性質なので，これに対して特別の記法を用いる：

◆ $$h_{(\alpha\beta)} \equiv \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha}) \tag{3.31}$$

したがって数 $h_{(\alpha\beta)}$ は，$\mathbf{h}$ からつくられた対称テンソルの成分である．

同様に，テンソル $\mathbf{f}$ は，

$$\mathbf{f}(\vec{A},\vec{B}) = -\mathbf{f}(\vec{B},\vec{A}), \quad \forall \vec{A},\vec{B} \tag{3.32}$$

$$f_{\alpha\beta} = -f_{\beta\alpha} \tag{3.33}$$

のとき，**反対称**とよばれる．反対称 $\binom{0}{2}$ テンソルは，いつも次のようにしてつくることができる．

$$\mathbf{h}_{(A)}(\vec{A},\vec{B}) = \frac{1}{2}\mathbf{h}(\vec{A},\vec{B}) - \frac{1}{2}\mathbf{h}(\vec{B},\vec{A})$$
$$h_{(A)\alpha\beta} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta} - h_{\beta\alpha})$$

これに対する記法は添字につけた角括弧を用いる：

◆ $$h_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta} - h_{\beta\alpha}) \tag{3.34}$$

次のことに注意せよ．

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta} - h_{\beta\alpha}) \\ &= h_{(\alpha\beta)} + h_{[\alpha\beta]} \end{aligned} \tag{3.35}$$

したがって任意の $\binom{0}{2}$ テンソルは，その対称部分と反対称部分に**一意的**に分けることができる．

メトリックテンソル $\mathbf{g}$ は，式 (2.26) からわかるように対称である．

$$\mathbf{g}(\vec{A},\vec{B}) = \mathbf{g}(\vec{B},\vec{A}) \tag{3.36}$$

3.5　ベクトルから一形式への写像としてのメトリック

ここで，のちに微分幾何学においてメトリックの基本的な役割となる概念を導入しよう．それはメトリックがベクトルと一形式の間の写像として働くという考えである．これをみるために，$\mathbf{g}$ と一つのベクトル $\vec{V}$ を考える．$\mathbf{g}$ は二つのベクトルを変数として必要とするから，$\mathbf{g}(\vec{V},\ \ )$ という表現は一つベクトルを欠いている．すなわちもう一つが与えられると，数がつくられる．したがって，$\mathbf{g}(\vec{V},\ \ )$ をベクトルの関数として考える（これはそのなかの空の“スロット”を埋めるということである）と，実数をつくり出すベクトルの線形関数す

なわち一形式である．それを，$\tilde{V}$ とよぼう：

$$\mathbf{g}(\vec{V},\quad)\equiv\tilde{V}(\quad) \tag{3.37}$$

ここで括弧の中の空白は，ベクトル変数が与えられるということを示す方法である．こうして $\tilde{V}$ は，そのベクトル $\vec{A}$ 上での値が，$\vec{V}\cdot\vec{A}$ となる一形式である：

$$\tilde{V}(\vec{A})\equiv\mathbf{g}(\vec{V},\vec{A})=\vec{V}\cdot\vec{A} \tag{3.38}$$

$\mathbf{g}$ は対称だから，次のようにも書けることに注意せよ．

$$\mathbf{g}(\quad,\vec{V})\equiv\tilde{V}(\quad)$$

$\tilde{V}$ の成分は何だろう？　それは次のようにして求められる．

$$\begin{aligned}V_\alpha\equiv\tilde{V}(\vec{e}_\alpha)&=\vec{V}\cdot\vec{e}_\alpha=\vec{e}_\alpha\cdot\vec{V}\\&=\vec{e}_\alpha\cdot(V^\beta\vec{e}_\beta)\\&=(\vec{e}_\alpha\cdot\vec{e}_\beta)V^\beta\end{aligned}$$

◆
$$V_\alpha=\eta_{\alpha\beta}V^\beta \tag{3.39}$$

ここで $\tilde{V}$ の成分 V_β と，$\vec{V}$ の成分 V^α を添字の位置だけで区別したことに気づくことが重要である．ベクトルは上付，一形式は下付である．すると式 (3.39) から特別な場合として

$$\begin{aligned}V_0=V^\beta\eta_{\beta 0}&=V^0\eta_{00}+V^1\eta_{10}+\cdots\\&=V^0(-1)+0+0+0\\&=-V^0\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}V_1=V^\beta\eta_{\beta 1}&=V^0\eta_{01}+V^1\eta_{11}+\cdots\\&=+V^1\end{aligned} \tag{3.41}$$

などが成り立つ．これは次のように要約される：

もし，$\vec{V}\to(a,b,c,d)$，　ならば

$$\tilde{V} \to (-a, b, c, d). \tag{3.42}$$

$\tilde{V}$ の成分は $\vec{V}$ の成分の時間成分の符号を変えることによって求められる．（このことは $\eta_{\alpha\beta}$ の成分によるから，のちに取り扱うようなメトリックがより複雑な成分をもつ状況では，$\tilde{V}$ と $\vec{V}$ の対応の規則もまたより複雑になる．）

逆変換：$\tilde{A}$ から $\vec{A}$ へ　　メトリックは与えられた一形式 $\tilde{A}$ に関係したベクトル $\vec{A}$ を見つけだす方法も与えるのだろうか？　その答はイエスである．式 (3.39) を考えよう．これは $\{V_\alpha\}$ が，行列 $(\eta_{\alpha\beta})$ を $\{V^\beta\}$ に掛けることによって得られることを示している．もしこの行列が逆行列をもてば，それを使って $\{V^\beta\}$ から $\{V_\alpha\}$ を求めることができる．この逆行列は，$(\eta_{\alpha\beta})$ がゼロでない行列式をもつときに限って存在する．ところで $(\eta_{\alpha\beta})$ は要素 $(-1, 1, 1, 1)$ をもつ対角行列だから，その行列式は -1 である．したがって，逆行列が存在し，その成分を $\eta^{\alpha\beta}$ と書く．そうすると $\{A_\beta\}$ が与えられると，次のようにして $\{A^\alpha\}$ を見つけることができる．

◆
$$A^\alpha \equiv \eta^{\alpha\beta} A_\beta \tag{3.43}$$

逆行列を用いることは二つの成分の集合が式 (3.39) を満たすことを保証している．

$$A_\beta = \eta_{\beta\alpha} A^\alpha$$

したがって $\mathbf{g}$ によって与えられるベクトルと一形式の間の写像は，1 対 1 であり，逆をもつ．

特に，$\tilde{\mathrm{d}}\phi$ にベクトル $\vec{\mathrm{d}}\phi$ を附随させることができる．これがふつう勾配に附随するものである．このベクトルが，$\phi =$ 一定の表面に直交することは次のようにしてわかる．$\vec{\mathrm{d}}\phi$ と $\phi =$ 一定の面内のベクトルとの内積は，この写像の定義から一形式 $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ がそのベクトル上でとる値に等しい．ところが $\tilde{\mathrm{d}}\phi(\vec{V})$ は ϕ の $\vec{V}$ に沿っての変化率で，この場合 $\vec{V}$ は $\phi =$ 一定の面内にあるのだから，それはゼロである．

$\{\eta^{\alpha\beta}\}$ が何であるかを知ることは大事である．次のことは容易に確かめられる．

$$\eta^{00} = -1, \qquad \eta^{0i} = 0, \qquad \eta^{ij} = \delta^{ij} \tag{3.44}$$

したがって $(\eta^{\alpha\beta})$ と $(\eta_{\alpha\beta})$ は同じである．このように一形式からベクトルへ移

るには，単に時間成分の符号を変えればよい．

なぜ一形式とベクトルを区別するのか? ユークリッド空間でのデカルト座標では，メトリックは単に $\{\delta_{ij}\}$ であり，一形式の成分と，それに対応するベクトルの成分は同じである．したがって初等的なベクトル解析では，一形式とベクトルに何の区別もされない．しかし特殊相対論では，成分が違ってくる(符号が変る)．したがって，勾配が次の成分

$$\tilde{\mathrm{d}}\phi \to \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \cdots\right)$$

をもつときには，それに附随する $\phi =$ 一定の面に直交するベクトルは次の成分をもつ．

$$\vec{\mathrm{d}}\phi \to \left(-\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \cdots\right) \tag{3.45}$$

もしある関数の“勾配ベクトル”を，最初に一形式を議論することなしに，単にこの成分をもつベクトルとして**定義**しようとしたら，読者はかなり懐疑的になったろう．特殊相対論の非ユークリッド的メトリックは，われわれに一形式とベクトルとの基本的な違いを認識させてくれる．その違いを避けて通るわけにはいかないのである．

以前に注意したように，ベクトルと一形式とはお互いに双対的なものである．そのような双対空間は重要で物理数学の他の分野にも見つけることができる．最も簡単な例は行列代数における列ベクトル

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ \vdots \end{pmatrix}$$

の空間であり，その双対空間は行ベクトル $(a, b, \cdots)$ の空間である．それらの積

$$(a \quad b \quad \cdots)\begin{pmatrix} p \\ q \\ \vdots \end{pmatrix} = ap + bq + \cdots \tag{3.46}$$

は実数であり，したがって行ベクトルは列ベクトル上の一形式と考えることができる．これらの一方の空間の要素から他方の空間の要素を見つける操作は“共

役”操作とよばれ，それは1対1であり，逆をもつ．もっと面白い例は量子力学にみることができる．波動関数（シュレーディンガー方程式の解である確率振幅）は，複素スカラー関数であり，すべてそのような関数のつくる**ヒルベルト空間**の要素である．このヒルベルト空間は，その要素（関数）がベクトル空間の公理を満たすので，ベクトル空間である．この場合，一形式のつくる双対空間は何だろう？　重要な鍵は，任意の二つの関数 $\phi(\vec{x})$ と $\psi(\vec{x})$ の内積は，$\int \phi(\vec{x})\psi(\vec{x})\mathrm{d}^3x$ ではなく，むしろ $\int \phi^*(\vec{x})\psi(\vec{x})\mathrm{d}^3x$ であるという点である．ここで * は複素共役を表す．関数 $\phi^*(\vec{x})$ はその $\psi(\vec{x})$ 上での値が，それとの積分［式 (3.8) の和に対応する］で与えられる一形式のように働く．複素共役の操作は，（ヒルベルト空間での）ベクトル $\phi(\vec{x})$ を一形式 $\phi^*(\vec{x})$ に移すメトリックテンソルのように作用する．$\phi^*(\vec{x})$ が再びヒルベルト空間のベクトルであるという事実は，この段階では困ったことである．［集合 $(1,-1,0,0)$ という要素は，ベクトルの成分でも，また一形式の成分でもありうるということと同じことである.］重要な点は，積分 $\int \phi^*(\vec{x})\psi(\vec{x})\mathrm{d}^3x$ において関数 $\phi^*(\vec{x})$ はベクトル $\psi(\vec{x})$ から（複素）数をつくりだす一形式として働いているという点である．この双対性は，ディラックの“ブラ”と“ケット”の記号で最も明瞭な形に表される．系のすべての状態のつくる空間の要素は，$|\ \rangle$ と書かれ（同定するラベルが，その中に書かれる）．（複素共役による）双対空間の要素は $\langle\ |$ と書かれる．二つの“ベクトル”$|1\rangle$ と $|2\rangle$ は数をつくらないが，ベクトル $|1\rangle$ と双対ベクトル $\langle 2|$ を数をつくる．$\langle 2|1\rangle$ がその数の名前である．

このように双対空間の概念は，高等的な物理数学に頻繁に現れる．

一形式の大きさとスカラー積　　一形式 $\tilde{p}$ は，それに附随するベクトル $\vec{p}$ と同じ大きさをもつと定義される．こうして

$$\tilde{p}^2 = \vec{p}^2 = \eta_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta \tag{3.47}$$

この形からすると式 (3.47) を使う前に，$\{p_\alpha\}$ から $\{p^\alpha\}$ を見いだす必要があるように見えるが，容易にそれを回避することができる．式 (3.47) の p^α と p^β の両方に対して，式 (3.43) を使うと

$$\tilde{p}^2 = \eta_{\alpha\beta}(\eta^{\alpha\mu}p_\mu)(\eta^{\beta\nu}p_\nu) \tag{3.48}$$

（おのおのの独立な和に対して別々の添字を使っていることに注意せよ.）$\eta_{\alpha\beta}$

と $\eta^{\beta\nu}$ は，お互いの逆行列だから，β に関する和は次のようになる：

$$\eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\nu} = \delta_\alpha^\nu \tag{3.49}$$

式 (3.48) にこれを使うと

◆
$$\tilde{p}^2 = \eta^{\alpha\mu} p_\mu p_\alpha \tag{3.50}$$

このように，その成分から直接 $\tilde{p}$ の大きさを見つけるために，逆メトリックテンソルを使うことができる．式 (3.44) を用いて，これを次のように書き下すことができる．

$$\tilde{p}^2 = -(p_0)^2 + (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 \tag{3.51}$$

これはベクトルに対する式 (2.24) と同じ規則である．定義より，この量は系のとり方に依存しない．一形式は，それに附随するベクトルが時間的，空間的，ヌル的のときにそれぞれ時間的，空間的，ヌル的という．

ベクトルの場合と同様に，今や一形式どうしの内積が定義できる．すなわち

$$\tilde{p} \cdot \tilde{q} \equiv \frac{1}{2}[(\tilde{p} + \tilde{q})^2 - \tilde{p}^2 - \tilde{q}^2] \tag{3.52}$$

この成分での表現が，次のようになることは驚くには値しないだろう．

$$\tilde{p} \cdot \tilde{q} = -p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 \tag{3.53}$$

垂直ベクトルと単位垂直一形式　あるベクトルが，ある面に垂直であるとは，それに附随する一形式が，垂直一形式であるときにいう．式 (3.38) から，この定義は，そのベクトルがすべての接ベクトルと直交するという通常の定義に等価であることがわかる．その大きさが ±1 のとき，垂直ベクトルあるいは垂直一形式は**単位垂直**であるとよばれる．（時間的ベクトルはつねに負の大きさをもつから，大きさが +1 であることは要求できない．ベクトルあるいは一形式全体にある因子を掛けて，その大きさを ±1 にすることができるだけである.）ヌル垂直は単位垂直になりえないことに注意せよ．

三次元面は，その垂直ベクトルがそのうちのどの分類に入るかで，時間的，空間的，ヌル的といわれる．（3.10 節の練習問題 12 でこの定義が矛盾を含まないことを証明する.）われわれのメトリックの特別さのために垂直ベクトルには，

次のような奇妙な性質がある．外向きの垂直ベクトルは，以前に定義したように外向きの垂直一形式に附随するベクトルである．このことは，それと外向きの任意のベクトルとのスカラー積があることを保証する．もし面が空間的なら，外向きの垂直ベクトルは外向きである．しかし面が時間的な外向きの垂直ベクトルは内側を指す．さらに面がヌル的なら，外向きのベクトルはその表面に接する．このことは 3.10 節の練習問題 21 で考える．これらの特異性は，その定義にメトリックを入れず，垂直を一形式と見なす方がより自然であるとの観点を強固にするにすぎない．

3.6　$\binom{M}{N}$ テンソル

一形式の関数としてのベクトル　　上で議論した双対性は実際，完全なものである．われわれは一形式をベクトルの関数として定義したけれど，今度はベクトルが一形式を実数に写像する線形関数と見なされてもまったくさしさわりがないことを示してみよう．あるベクトル $\vec{V}$ が与えられたとき，一形式をもってくると実数ができる．

$$\vec{V}(\tilde{p}) \equiv \tilde{p}(\vec{V}) \equiv p_\alpha V^\alpha \equiv \langle \tilde{p}, \vec{V} \rangle \tag{3.54}$$

このようにしてベクトルをテンソルによって“作用される”ものという特別な位置から引きずりおろし，それをテンソル自身，特に一つの一形式から実数への線形関数として見なした．式 (3.54) の最後の記法は二つの対象が同等の地位にあることを強調するため，新しくつくった．

$\binom{M}{0}$ テンソル　　これを一般化して次のように定義する：

$\binom{M}{0}$ テンソルとは M 個の一形式から実数への関数である．

以前の $\binom{0}{N}$ テンソルに関するすべての議論は，ここでも適用される．簡単な $\binom{2}{0}$ テンソルは，$\vec{V} \otimes \vec{W}$ で，それは二つの変数 $\tilde{p}$ と $\tilde{q}$ が与えられると実数 $\vec{V}(\tilde{p})\vec{W}(\tilde{q}) \equiv \tilde{p}(\vec{V})\tilde{q}(\vec{W}) \equiv V^\alpha p_\alpha W^\beta q_\beta$ を与える．したがって $\vec{V} \otimes \vec{W}$ は成分 $V^\alpha W^\beta$ をもつ．$\binom{2}{0}$ テンソルに対する基底は，$\vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta$ である．$\binom{M}{0}$ テンソルの成分は基底一形式 $\tilde{\omega}^\alpha$ を変数としたときの値である．$\binom{M}{0}$ テンソルはその添字のすべてが上付であることに注意せよ．

$\binom{M}{N}$ テンソル　最後の一般化は：

◆　$\binom{M}{N}$ テンソルとは，M 個の一形式と N 個のベクトルから実数への関数である．

たとえば，$\mathbf{R}$ を $\binom{1}{1}$ テンソルとすると，数 $\mathbf{R}(\tilde{p};\vec{A})$ を与えるために，一つの一形式 $\tilde{p}$ と一つのベクトル $\vec{A}$ を必要とする．それは成分 $\mathbf{R}(\tilde{\omega}^{\alpha};\vec{e}_{\beta})\equiv R^{\alpha}{}_{\beta}$ をもつ．一般に $\binom{M}{N}$ テンソルの成分は，M 個の添字を上に N 個の添字を下にもつ．新しい系では，

$$\begin{aligned}R^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}&=\mathbf{R}(\tilde{\omega}^{\overline{\alpha}};\vec{e}_{\overline{\beta}})\\&=\mathbf{R}(\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\mu}\tilde{\omega}^{\mu};\Lambda^{\nu}{}_{\overline{\beta}}\vec{e}_{\nu})\\&=\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\mu}\Lambda^{\nu}{}_{\overline{\beta}}R^{\mu}{}_{\nu}\end{aligned}\tag{3.55}$$

したがって成分の変換は簡単である．すなわちおのおのの添字は和の規則によって許される仕方で並べられた添字をもった Λ によって変換される．今でも使われているいくつかの古い名前には次のようなものがある．上付の添字は（それらが基底ベクトルと**反対に**変換するので）“反変”，下付の添字は “共変” とよばれる．$\binom{M}{N}$ テンソルは，“M 階反変，N 階共変” であるといわれる．

巡回論法か？　この時点で，テンソル代数のすべてが，巡回的になっているのではないかと心配するかもしれない．一形式はベクトルから定義されるが，今度はベクトルが一形式から定義された．この “双対性” は，理論の核心であるが，巡回的ではない．物理学者がやっているようにすればよいのである．すなわち，ベクトルを変位 $\Delta\vec{x}$ など（たとえば $\vec{p}$ や $\vec{v}$）と同定し，それからテンソル代数の規則によりすべての $\binom{M}{N}$ テンソルを生成する．これらのテンソルは，ベクトルに与えたもとの意味から物理的意味を受け継いでいる．しかしわれわれは一形式に対しても，ある物理的対象（たとえば勾配）を附随させることができた．これから始めても，すべてのテンソル代数を生成することができる．数学の威力は最初のベクトルあるいは一形式が**何であるか**をいう必要がない（あるいは，いいたくない）という点である．それは単にそれらを操作する規則を与えている．たとえば，あるベクトルを $\vec{p}$ と思うということは，物理と数学の接点である．それはどのようにして現実世界の数学的モデルをつくるかということである．幾何学者がすることと同じである．彼らはこれらの抽象的なテンソ

ル空間の概念に曲った空間におけるベクトルとは何かという考えをつけ加える．ベクトルに対する現代の幾何学者の考えは，曲った空間のところにきたときに学ぶだろう．今のところは，（不正確ではあるが）ベクトルを $\Delta\vec{x}$ のようなものとしておいて，物理的な情況でのテンソルの扱いに熟練しよう．

3.7　添字の“上げ”と“下げ”

メトリックが，ベクトル $\vec{V}$ を一形式 $\tilde{V}$ に写像したと同じように，それはまた $\binom{N}{M}$ テンソルを $\binom{N-1}{M+1}$ テンソルに写像する．同様に逆写像は $\binom{N}{M}$ テンソルを $\binom{N+1}{M-1}$ テンソルに移す．ふつうそれらは同じ名前をつけられ，添字の位置だけで区別する．$T^{\alpha\beta}{}_{\gamma}$ を $\binom{2}{1}$ テンソルとすると

$$T^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \equiv \eta_{\beta\mu} T^{\alpha\mu}{}_{\gamma} \tag{3.56}$$

は，（$T^{\alpha\beta}{}_{\gamma}$ の第二の一形式変数をベクトルに移して得られる）$\binom{1}{2}$ テンソルの成分であり，

$$T_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} \equiv \eta_{\alpha\mu} T^{\mu\beta}{}_{\gamma} \tag{3.57}$$

は，（最初の添字を移した）別の（等価でない）$\binom{1}{2}$ テンソルの成分である．一方

$$T^{\alpha\beta\gamma} \equiv \eta^{\gamma\mu} T^{\alpha\beta}{}_{\mu} \tag{3.58}$$

は $\binom{3}{0}$ テンソルの成分である．これらの操作は，添字の“上げ”，“下げ”とよばれる．添字の上げ下げというときにはいつも，このメトリックによってつくられる写像のことを意味している．特殊相対論での規則は簡単である．“0”添字を上げ下げするときには成分の符号を変え，“1”，“2”，“3”の添字（一般に“i”添字）を上げ下げするときには成分は変らない．

メトリックの混合成分　　数 $\{\eta_{\alpha\beta}\}$ はメトリックの成分であり，$\{\eta^{\alpha\beta}\}$ はその逆の成分である．$\eta_{\alpha\beta}$ の添字を逆を使って上げることを考えよう．するとメトリックの“混合”成分が得られる．

$$\eta^{\alpha}{}_{\beta} \equiv \eta^{\alpha\mu} \eta_{\mu\beta} \tag{3.59}$$

しかしこの右辺は，お互いの逆行列である（このことがわからない読者は直接計算して以下の式を確かめよ）二つの行列の積であり，したがってそれは単位

行列である．添字の一つが上で一つが下だから，それはクロネッカーのデルタであり，次のように書かれる．

$$\blacklozenge \qquad \eta^{\alpha}{}_{\beta} \equiv \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{3.60}$$

もう一つの添字を上げると，単に恒等式，$\eta^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$ が得られる．したがって，$\eta^{\alpha\beta}$ を，$\mathbf{g}^{-1}$ によって $\binom{0}{2}$ テンソル $\mathbf{g}$ から写像された $\binom{2}{0}$ テンソルの成分と見なすことができる．したがって，$\mathbf{g}$ に対しては，その“反変”成分はその“共変”成分の行列の逆行列の成分に等しい．$\mathbf{g}$ はこのことが成り立つ唯一のテンソルである．

メトリックと非メトリックベクトル代数　なぜ一形式とベクトルとの対応を生成するのが，メトリックでなければならないかを考えてみるのも面白い．他の逆をもつ $\binom{0}{2}$ テンソルではどうしてだめなのだろう？ 順序を追ってこの考えを探ってみよう．

まず，そもそもなぜ対応が必要なのだろう？ “非メトリック”ベクトル代数があって，すべての双対空間と $\binom{M}{N}$ テンソルをもっていたとしよう．なぜ一形式とベクトルを対応づけるのだろう？ その答は，いつも対応づけるわけではなく，時と場合によるということだ．メトリックがなければ，一形式がベクトルに作用したときか，その逆のときにしか数はつくれないから，二つのベクトルの内積は定義されない．物理では，スカラー積が有用であり，したがってメトリックを必要とする．しかし，数理物理ではメトリックが重要でないベクトル空間も**いくつか**ある．一つの例は，古典力学や量子力学における位相空間である．

次になぜメトリックで他のテンソルではだめなのだろう？ もしメトリックが定義されずに，他の対称テンソルが，写像を行うなら，数学者は単にそのテンソルをメトリックとよんだだろう．すなわち，それを写像を生成するものとして定義したろう．数学者にとっては，メトリックとはベクトル空間の**構造**に余分につけられた一部なのである．数学の違った空間では，違ったメトリック構造をもつことができる．たとえば，**リーマン空間**は，すべてのベクトルに正定値の大きさを与えるメトリックをもつものとして特徴づけられる．ミンコフスキー空間のように不定値符号をもつものは，**擬リーマン空間**とよばれる．**反対**

称の“メトリック”すら定義できる．たとえば**スピノル空間**とよばれる二次元空間は，そのようなメトリックをもち，物理に基本的な重要性をもつことが明らかになっている．しかしその構造は，この本の範囲を超えている．ここでいいたいことは，もしベクトルとテンソルだけを議論していたのでは，特殊相対論は得られないということである．成分 $\eta_{\alpha\beta}$ をもったメトリックをもつといって，はじめて特殊相対論になるのである．もし別の成分を与えたら，別の空間，特に一般相対論の曲った空間が得られただろう．

3.8 テンソルの微分

関数 f は，$\binom{0}{0}$ テンソルであり，その勾配 $\tilde{\mathrm{d}}f$ は，$\binom{0}{1}$ テンソルである．関数の微分は1階（共変）ランクの高いテンソルをつくりだす．このことが任意のランクのテンソルの微分についても，あてはまることをみてみよう．

成分 $\{T^\alpha{}_\beta\}$ が位置の関数である $\binom{1}{1}$ テンソル $\mathbf{T}$ を考えよう．$\mathbf{T}$ を次のように書くことができる．

$$\mathbf{T} = T^\alpha{}_\beta \tilde{\omega}^\beta \otimes \vec{e}_\alpha \tag{3.61}$$

関数に対して行ったのと同様に，固有時間 τ をパラメーターとするある世界線に沿って動くことを考える．そのときの $\mathbf{T}$ の変化率

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}\tau} = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{\mathbf{T}(\tau+\Delta\tau) - \mathbf{T}(\tau)}{\Delta\tau} \tag{3.62}$$

を計算するのは難しくない．基底一形式とベクトルは，至るところで同じだから［すなわち，$\tilde{\omega}^\alpha(\tau+\Delta\tau) = \tilde{\omega}^\alpha(\tau)$］，これは次のようになる．

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\mathrm{d}T^\alpha{}_\beta}{\mathrm{d}\tau}\right) \tilde{\omega}^\beta \otimes \vec{e}_\alpha \tag{3.63}$$

ここで $\mathrm{d}T^\alpha{}_\beta/\mathrm{d}\tau$ は，関数 $T^\alpha{}_\beta$ の世界線に沿っての通常の微分である：

$$\mathrm{d}T^\alpha{}_\beta/\mathrm{d}\tau = T^\alpha{}_{\beta,\gamma} U^\gamma \tag{3.64}$$

ここで対象 $\mathrm{d}\mathbf{T}/\mathrm{d}\tau$ は，式 (3.62) で単に二つの $\binom{1}{1}$ テンソルの差として定義されているから，$\binom{1}{1}$ テンソルである．式 (3.63) と式 (3.64) から，任意のベクト

ル $\vec{U}$ に対して,

$$\mathrm{d}\mathbf{T}/\mathrm{d}\tau = (T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}\tilde{\omega}^{\beta} \otimes \vec{e}_{\alpha})U^{\gamma} \tag{3.65}$$

となり，これから

$$\nabla\mathbf{T} \equiv T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}\tilde{\omega}^{\beta} \otimes \tilde{\omega}^{\gamma} \otimes \vec{e}_{\alpha} \tag{3.66}$$

が $\binom{1}{2}$ テンソルであることが帰結される．このテンソルは, $\mathbf{T}$ の勾配とよばれる．

われわれは, $\mathrm{d}\mathbf{T}$ ではなく, $\nabla\mathbf{T}$ という記号を用いた．その理由は，前者の記号は数学者によってふつう別のものに対して使用されるからである．また式 (3.65) に対して次のような記号も用いられる：

$$\mathrm{d}\mathbf{T}/\mathrm{d}\tau \equiv \nabla_{\vec{U}}\mathbf{T} \tag{3.67}$$

$$\nabla_{\vec{U}}\mathbf{T} \to \{T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}U^{\gamma}\} \tag{3.68}$$

この導き方は，基底ベクトル（そしてそれゆえ，基底一形式）が至るところで一定という事実を使っている．われわれは一般相対論の曲った空間では，このことは仮定できず，この点をも考慮に入れることが理論の出発点になることを見いだすだろう．

3.9　文　　献

われわれのとったテンソル解析のアプローチは，それらの成分の変換性よりも，その幾何学的性質を強調している．この点をさらに深く勉強したい読者は, Misner ら (1973) のはじめの数章，あるいは Schutz (1980b) が参考になる．また Bishop と Goldberg (1981) もみよ．

相対論以外で，物理学者へのテンソルの紹介は，ほとんど“デカルト” テンソル，すなわち三次元デカルト座標でのテンソル成分に限られている．たとえば, Bourne と Kendall (1991) や Mathews と Walker (1965) をみよ．

座標変換に基礎をおいた古いスタイルのテンソル解析の非常によい参考書として Schouten (1954) がある．また Yano (1955) も参考になる．この観点から相対論のテンソルを扱ったものとして，Adler ら (1975), Landau と Lifshitz (1962), Stephani (2004) などがある．

3.10　練　習　問　題

1　(a) 任意の数の集合 $\{M_{\alpha\beta}; \alpha = 0, \cdots, 3; \beta = 0, \cdots, 3\}$ と二つの任意のベクトル成分の集合 $\{A^{\mu}; \mu = 0, \cdots, 3\}$ と $\{B^{\nu}; \nu = 0, \cdots, 3\}$ が与えられている．このとき次の二つの表現が同等でないことを示せ．

$$M_{\alpha\beta}A^{\alpha}B^{\beta} \equiv \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3} M_{\alpha\beta}A^{\alpha}B^{\beta}$$

および

$$\sum_{\alpha=0}^{3} M_{\alpha\alpha}A^{\alpha}B^{\beta}$$

(b) 次式を示せ．

$$A^{\alpha}B^{\beta}\eta_{\alpha\beta} = -A^0B^0 + A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3$$

2　すべての一形式のつくる空間がベクトル空間であることを示せ．

3　(a) すべての項を書き下すことによって，次式が正しいことを証明せよ：

$$\tilde{p}(A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}) = A^{\alpha}\tilde{p}(\vec{e}_{\alpha})$$

(b) $\tilde{p}$ の成分を $(-1, 1, 2, 0)$，$\vec{A}$ と $\vec{B}$ の成分を，それぞれ $(2, 1, 0, -1)$，$(0, 2, 0, 0)$ とする．(i) $\tilde{p}(\vec{A})$；(ii) $\tilde{p}(\vec{B})$；(iii) $\tilde{p}(\vec{A} - 3\vec{B})$；(iv) $\tilde{p}(\vec{A}) - 3\tilde{p}(\vec{B})$ を求めよ．

4　$\mathcal{O}$ で次のベクトルが与えられているとする：

$$\vec{A} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (2, 1, 1, 0),\ \vec{B} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (1, 2, 0, 0),\ \vec{C} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (0, 0, 1, 1),\ \vec{D} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (-3, 2, 0, 0)$$

(a) これらが線形独立であることを示せ．

(b) $\tilde{p}$ が次式を満たすとき，その成分を求めよ．

$$\tilde{p}(\vec{A}) = 1,\ \tilde{p}(\vec{B}) = -1,\ \tilde{p}(\vec{C}) = -1,\ \tilde{p}(\vec{D}) = 0$$

(c) 次のベクトル $\vec{E}$ に対して，$\tilde{p}(\vec{E})$ の値を求めよ．

$$\vec{E} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (1, 1, 0, 0)$$

(d) 一形式 $\tilde{p}$，$\tilde{q}$，$\tilde{r}$，$\tilde{s}$ が，次式を満たすとき，それらが線形独立であるかどうかを示せ．

$\tilde{q}(\vec{A}) = \tilde{q}(\vec{B}) = 0$, $\tilde{q}(\vec{C}) = 1$, $\tilde{q}(\vec{D}) = -1$, $\tilde{r}(\vec{A}) = 2$, $\tilde{r}(\vec{B}) = \tilde{r}(\vec{C}) = \tilde{r}(\vec{D}) = 0$, $\tilde{s}(\vec{A}) = -1$, $\tilde{s}(\vec{B}) = -1$, $\tilde{s}(\vec{C}) = \tilde{s}(\vec{D}) = 0$.

5 式 (3.10a) から式 (3.10d) に至る各ステップを確認せよ．

6 系 $\mathcal{O}$ の基底 $\{\vec{e}_\alpha\}$ と，次の一形式の空間の基底 $(\tilde{\lambda}^0, \tilde{\lambda}^1, \tilde{\lambda}^2, \tilde{\lambda}^3)$ を考える．

$$\tilde{\lambda}^0 \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (1,1,0,0),$$
$$\tilde{\lambda}^1 \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (1,-1,0,0),$$
$$\tilde{\lambda}^2 \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (0,0,1,-1),$$
$$\tilde{\lambda}^3 \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (0,0,1,1)$$

$\{\tilde{\lambda}^\beta\}$ は $\{\vec{e}_\alpha\}$ の双対基底ではないことに注意せよ．

(a) 任意の $\tilde{p}$ に対して，$\tilde{p} \neq \tilde{p}(\vec{e}_\alpha)\tilde{\lambda}^\alpha$ であることを示せ．

(b) $\tilde{p} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (1,1,1,1)$ とするとき，次のようになる数 l_α を見つけよ．

$$\tilde{p} = l_\alpha \tilde{\lambda}^\alpha$$

これらの数は，$\tilde{p}$ の $\{\tilde{\lambda}^\alpha\}$ 上の成分である．言い換えると，それらは $\{\tilde{\lambda}^\alpha\}$ に双対なベクトル基底に対する $\tilde{p}$ の値である．

7 式 (3.13) を証明せよ．

8 系 $\mathcal{O}$ の基底一形式 $\tilde{\mathrm{d}}t$ と $\tilde{\mathrm{d}}x$ を描け．

9 図 3.5 は，ある金属板上の温度 T の等しい（等温）曲線を示している．図の点 $\mathscr{P}$ と $\mathscr{Q}$ で，勾配 $\tilde{\mathrm{d}}T$ の成分を評価せよ．（ヒント：その成分は基底ベクトルとの縮約であり，基底ベクトルが交差する等温曲線の数で評価される．）

10 (a) 座標 $\{x^\alpha\}$ をもつ系 $\mathcal{O}$ が与えられたとき，次式を示せ．

$$\partial x^\alpha / \partial x^\beta = \delta^\alpha_\beta$$

(b) 任意の二つの系の間には，次の式 (3.18) が成り立つ．

$$\partial x^\beta / \partial x^{\overline{\alpha}} = \Lambda^\beta{}_{\overline{\alpha}}$$

(a) と合成関数の微分の規則から次式を示せ．

$$\Lambda^\beta{}_{\overline{\alpha}} \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_\mu = \delta^\beta_\mu$$

11 記法 $\partial\phi/\partial x^\alpha = \phi_{,\alpha}$ を使って，式 (3.14)，(3.15)，(3.18) を書き直せ．

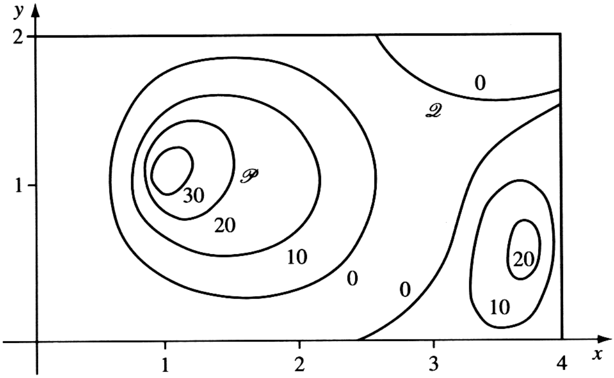


図 3.5　非一様に熱せられた金属板の等温曲線

12　S を三次元空間における二次元面 $x=0$ とし，$\tilde{n}\neq 0$ を，S の垂直一形式とする．

(a) $\vec{V}$ を S に接しないベクトルとすると，$\tilde{n}(\vec{V})\neq 0$ であることを示せ．

(b) $\tilde{n}(\vec{V})>0$ とすると，$\vec{V}$ と同じ S の側を指している任意の $\vec{W}$ に対して（すなわち，その x 成分が V^x と同じ符号をもつ任意の $\vec{W}$），$\tilde{n}(\vec{W})>0$ であることを示せ．

(c) S の任意の垂直一形式は，$\tilde{n}$ の定数倍であることを示せ．

(d) 以上のことを四次元時空の任意の三次元表面に対して一般化せよ．

13　幾何学的あるいは代数的議論によって，$\tilde{\mathrm{d}}f$ が $f=$ 一定の面に対して垂直であることを示せ．

14　$\tilde{p}\underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow}(1,1,0,0)$ と $\tilde{q}\underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow}(-1,0,1,0)$ を二つの一形式とする．二つのベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ を変数として使って，$\tilde{p}\otimes\tilde{q}\neq\tilde{q}\otimes\tilde{p}$ を示せ．次に $\tilde{p}\otimes\tilde{q}$ の成分を見つけよ．

15　式 (3.23) から式 (3.24) に至る理由づけをせよ．

16　(a) 次式で定義されるテンソルが，対称テンソルであることを示せ．

$$\mathbf{h}_{(s)}(\vec{A},\vec{B})=\frac{1}{2}\mathbf{h}(\vec{A},\vec{B})+\frac{1}{2}\mathbf{h}(\vec{B},\vec{A}) \tag{3.69}$$

(b) 次式で定義されるテンソルが，反対称テンソルであることを示せ．

$$\mathbf{h}_{(A)}(\vec{A},\vec{B})=\frac{1}{2}\mathbf{h}(\vec{A},\vec{B})-\frac{1}{2}\mathbf{h}(\vec{B},\vec{A}) \tag{3.70}$$

(c) 練習問題 14 で定義された $\tilde{p}\otimes\tilde{q}$ の対称部分と反対称部分の成分を見つけよ．

(d) $\mathbf{h}$ が反対称テンソルなら，任意のベクトル $\vec{A}$ に対して

$$\mathbf{h}(\vec{A},\vec{A})=0$$

であることを証明せよ.

(e) $\mathbf{h}_{(s)}$ と $\mathbf{h}_{(A)}$ の独立な成分の数を求めよ.

17 (a) $\mathbf{h}$ を任意の二つのベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$（ただし, $\vec{B} \neq 0$）に対して, 次の性質をもつ $\binom{0}{2}$ テンソルとする.

$$\mathbf{h}(\quad, \vec{A}) = \alpha \mathbf{h}(\quad, \vec{B})$$

ここで α は, $\vec{A}$ と $\vec{B}$ に依存する数である. このとき, 次のような一形式 $\tilde{p}$ と $\tilde{q}$ が存在することを示せ.

$$\mathbf{h} = \tilde{p} \otimes \tilde{q}$$

(b) $\mathbf{T}$ を $\binom{1}{1}$ テンソル, $\tilde{\omega}$ を一形式, $\vec{v}$ をベクトル, $\mathbf{T}(\tilde{\omega}; \vec{v})$ を $\mathbf{T}$ の $\tilde{\omega}$ と $\vec{v}$ 上での値とする. このとき, $\mathbf{T}(\ ; \vec{v})$ はベクトル, $\mathbf{T}(\tilde{\omega};\ )$ は一形式である. すなわち $\binom{1}{1}$ テンソルは, ベクトルからベクトルへの, 一形式から一形式への写像を与えることを示せ.

18 (a) メトリックテンソルによって次のベクトルから写像された一形式を見つけよ.

$$\vec{A} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (1, 0, -1, 0), \qquad \vec{B} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (0, 1, 1, 0), \qquad \vec{C} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (-1, 0, -1, 0)$$

$$\vec{D} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (0, 0, 1, 1)$$

(b) 次の一形式からメトリックテンソルの逆によって写像されたベクトルを見つけよ.

$$\tilde{p} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (3, 0, -1, -1), \qquad \tilde{q} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (1, -1, 1, 1), \qquad \tilde{r} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (0, -5, -1, 0)$$

$$\tilde{s} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (-2, 1, 0, 0)$$

19 (a) 行列の掛算をすることにより, $\{\eta^{\alpha\beta}\}$ が $\{\eta_{\alpha\beta}\}$ の逆であることを示せ.

(b) 式 (3.53) を示せ.

20 三次元ユークリッド空間のデカルト座標では, ベクトルと一形式の成分は等しいので, ふつうそれらを区別しない. このことを二段階にわたって示せ.

(a) もし行列 $\{\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}\}$ がその逆の転置行列に等しい（このような行列を直交行列という）なら, 次の二つの変換は同じものであることを示せ.

$$A^{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta} A^{\beta}$$

および

$$P_{\overline{\beta}} = \Lambda^{\alpha}{}_{\overline{\beta}} P_{\alpha}$$

(b) このような空間のメトリックは，成分 $\{\delta_{ij}, i, j = 1, \cdots, 3\}$ をもつ．一つのデカルト座標から，別のデカルト座標への変換が次式に従い，その式は $\{\Lambda^k{}_{\bar{i}}\}$ が直交行列であることを意味することを示せ．

$$\delta_{\bar{i}\bar{j}} = \Lambda^k{}_{\bar{i}}\Lambda^l{}_{\bar{j}}\delta_{kl}$$

特殊相対論で，これに対応することについては練習問題 32 をみよ．

21　(a) t–x 平面の直線 $t = 0$，$t = 1$，$x = 0$，$x = 1$ で囲まれる領域を考える．おのおのの境界について，単位垂直一形式とそれに附随するベクトルを t–x 平面内で見つけよ．

(b) 座標値 $(1, 0)$，$(1, 1)$，$(2, 1)$ をもつ事象を結ぶ直線で囲まれた領域を考える．この領域のヌル境界の外向き垂直一形式と，それに附随するベクトルを見つけよ．

22　ベクトルを一番最初に定義するかわりに，図 3.4 のような描像でもって一形式を定義することから始めたとする．そうするとベクトルは，一形式の線形実数値関数として導入され，ベクトル代数は (3.6a) と (3.6b) に類似な関係（すなわち，矢印と波線を入れ換えた関係）によって定義されただろう．このように定義されたベクトルの全体が，ベクトル空間をつくることを示せ．これは，ベクトルと一形式の間の双対性の別の例である．

23　(a) ある固定された M，N に対し，すべての $\binom{M}{N}$ テンソルの集合はベクトル空間をつくることを示せ．（それらのテンソルの加法と定数による乗法を定義する．）

(b) この空間の一つの基底が次の集合で与えられることを示せ．

$$\underbrace{\vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta \otimes \cdots \otimes \vec{e}_\gamma}_{M\ \text{ベクトル}} \otimes \underbrace{\tilde{\omega}^\mu \otimes \tilde{\omega}^\nu \otimes \cdots \otimes \tilde{\omega}^\lambda}_{N\ \text{一形式}}$$

（二つ以上の一形式の外積を定義しなければならない．）

24　(a) ある $\binom{2}{0}$ テンソルの成分 $M^{\alpha\beta}$ が行列で次のように与えられているとき，以下の量を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) 対称テンソル成分 $M^{(\alpha\beta)}$ と反対称テンソル成分 $M^{[\alpha\beta]}$

(ii) 成分 $M^\alpha{}_\beta$

(iii) 成分 $M_\alpha{}^\beta$

(iv) 成分 $M_{\alpha\beta}$

(b) その成分が $M^{\alpha}{}_{\beta}$ であるような $\binom{1}{1}$ テンソルについて，その対称部分，反対称部分を考えることに意味があるか？ もし，あるならそれらを定義し，そうでないなら，その理由を述べよ．

(c) メトリックテンソルの添字を上げて，次式を示せ．

$$\eta^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$$

25 **A** が $\binom{2}{0}$，**B** が $\binom{0}{2}$ テンソルなら，

$$A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}$$

が系に依存しない，すなわちスカラーとなることを示せ．

26 **A** を反対称 $\binom{2}{0}$ テンソル，**B** を対称 $\binom{0}{2}$ テンソル，**C** を任意の $\binom{0}{2}$ テンソル，**D** を任意の $\binom{2}{0}$ テンソルとするとき，以下を証明せよ：

(a) $A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} = 0$

(b) $A^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}C_{[\alpha\beta]}$

(c) $B_{\alpha\beta}D^{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}D^{(\alpha\beta)}$

27 (a) **A** を反対称な $\binom{2}{0}$ テンソルとする．メトリックテンソルを使って添字を下げた $\{A_{\alpha\beta}\}$ は，反対称な $\binom{0}{2}$ テンソルの成分であることを示せ．

(b) $V^{\alpha} = W^{\alpha}$ としたとき，$V_{\alpha} = W_{\alpha}$ となることを示せ．

28 式 (3.65) から式 (3.66) を導け．

29 テンソルの微分は，ライプニッツの（積の）規則に従って，

$$\nabla(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}) = (\nabla\mathbf{A})\otimes\mathbf{B} + \mathbf{A}\otimes\nabla\mathbf{B}$$

となることを示せ．

30 ある系 $\mathcal{O}$ で，ベクトル場 $\vec{U}$ と $\vec{D}$ の成分が

$$\vec{U} \to (1+t^2, t^2, \sqrt{2}t, 0)$$
$$\vec{D} \to (x, 5tx, \sqrt{2}t, 0)$$

であり，スカラー量 ρ が

$$\rho = x^2 + t^2 - y^2.$$

であるとする．このとき，

(a) $\vec{U}\cdot\vec{U}$，$\vec{U}\cdot\vec{D}$，$\vec{D}\cdot\vec{D}$ を計算せよ．$\vec{U}$ は四元ベクトル場であるとしてよいか？

$\vec{D}$ についてはどうか?

(b) 任意の時刻において $\vec{U}$ を四元速度とする粒子の空間的速度 $\boldsymbol{v}$ を求めよ．その速度は，$t \to 0$，$t \to \infty$ の極限でどのようにふるまうか?

(c) α のすべてに対して，U_α を求めよ．

(d) すべての α と β に対し，$U^\alpha{}_{,\beta}$ を計算せよ．

(e) すべての β に対し，$U_\alpha U^\alpha{}_{,\beta} = 0$ であることを示せ．また，すべての β に対し，$U^\alpha U_{\alpha,\beta} = 0$ であることも示せ．

(f) $D^\beta{}_{,\beta}$ の値を計算せよ．

(g) $(U^\alpha D^\beta)_{,\beta}$ をすべての α に対して計算せよ．

(h) $U_\alpha (U^\alpha D^\beta)_{,\beta}$ を計算し，設問(f)と比較せよ．答が似ているのはなぜか?

(i) $\rho_{,\alpha}$ をすべての α について計算せよ．また，$\rho^{,\alpha}$ も計算せよ．($\rho^{,\alpha} \equiv \eta^{\alpha\beta}\rho_{,\beta}$ を思い出せ．) $\{\rho^{,\alpha}\}$ は何の成分か?

(j) $\nabla_{\vec{U}}\rho$，$\nabla_{\vec{U}}\vec{D}$，$\nabla_{\vec{D}}\rho$，$\nabla_{\vec{D}}\vec{U}$ を計算せよ．

31　時間的な単位四元ベクトル $\vec{U}$ と成分が

$$P_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu$$

で与えられるテンソル $\mathbf{P}$ を考える．

(a) $\mathbf{P}$ が，任意のベクトル $\vec{V}$ を $\vec{U}$ に垂直な方向に射影する射影演算子であることを示せ．つまり，成分が

$$V_\perp^\alpha = P^\alpha{}_\beta V^\beta = (\eta^\alpha{}_\beta + U^\alpha U_\beta)V^\beta$$

であるベクトル $\vec{V}_\perp$ が

(i) $\vec{U}$ に垂直であることを示せ．

(ii) また，このベクトルは，$\mathbf{P}$ を作用しても不変であること，つまり

$$V_{\perp\perp}^\alpha \equiv P^\alpha{}_\beta V_\perp^\beta = V_\perp^\alpha$$

となることを示せ．

(b) 任意のヌルでないベクトル $\vec{q}$ に対して，そのベクトルに垂直な方向への射影テンソルは

$$\eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/(q^\alpha q_\alpha)$$

という成分をもつことを示せ．ヌルベクトルの場合には，どういう形で表されるか?

(c) $\vec{U}$ に垂直なベクトルに対しては，$\mathbf{P}$ がメトリックテンソルとなって，

$$\mathbf{P}(\vec{V}_\perp, \vec{W}_\perp) = \mathbf{g}(\vec{V}_\perp, \vec{W}_\perp)$$
$$= \vec{V}_\perp \cdot \vec{W}_\perp$$

であることを示せ.

32 (a) $\binom{0}{2}$ テンソルの成分の定義 $f_{\alpha\beta} = \mathbf{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)$ から，変換則は

$$f_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} = \Lambda^\mu{}_{\overline{\alpha}} \Lambda^\nu{}_{\overline{\beta}} f_{\mu\nu}$$

となることを示せ．これを行列で表現すると，成分が $\Lambda^\mu{}_{\overline{\alpha}}$ である行列を (Λ) として，

$$(\overline{f}) = (\Lambda)^T (f)(\Lambda)$$

となることも示せ.

(b) ローレンツ系の定義からメトリックテンソルの成分は $\eta_{\alpha\beta}$ となったので，このことはすべてのローレンツ系で成り立つ．したがって，より一般的なローレンツ変換を

$$\eta_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} = \Lambda^\mu{}_{\overline{\alpha}} \Lambda^\nu{}_{\overline{\beta}} \eta_{\mu\nu} \tag{3.71}$$

を満たすものとして定義することができる．速度 $v\vec{e}_x$ のブーストに対する行列がこの関係を満たしており，ここでの新しい定義が古い定義を含んでいることを示せ.

(c) (Λ) と (L) が式 (3.71) を満たす，すなわち $(\eta) = (\Lambda)^T(\eta)(\Lambda)$, $(\eta) = (L)^T(\eta)(L)$ である行列であるとする．行列 $(\Lambda)(L)$ もローレンツ変換の行列となることを示せ.

33 練習問題 32 (c) の結果から，ローレンツ変換は行列の積に対して群をつくることがわかる．これを**ローレンツ群**といい，$L(4)$ または $\mathrm{O}(1,3)$ で表す.

(a) ローレンツ群の単位元と式 (1.12) で表される行列の逆元を求めよ.

(b) ローレンツ変換の行列の行列式は ± 1 であることを示せ.

(c) 行列式の値が $+1$ となる元の集合は部分群をつくるが，行列式の値が -1 となる元ではそうならないことを示せ.

(d) 三次元直交群 $O(3)$ は，三次元ユークリッド空間のメトリックに対する同様な群である．練習問題 20 (b)で，その群は直交行列を使って表現されることがわかった．直交行列が群をつくること，および，$O(3)$ が $L(4)$ の部分群（に同型）であることを示せ.

34 ミンコフスキー空間で，座標 $u = t - x$, $v = t + x$ を考える.

(a) $\vec{e}_u$ を座標 $(u = 1, v = 0, y = 0, z = 0)$ と $(u = 0, v = 0, y = 0, z = 0)$ の事象をつなぐベクトル，$\vec{e}_v$ も同様なベクトルとする．$\vec{e}_u = (\vec{e}_t - \vec{e}_x)/2$, $\vec{e}_v = (\vec{e}_t + \vec{e}_x)/2$ であることを示し，t–x 面の時空図中に $\vec{e}_u$, $\vec{e}_v$ を描け.

(b) $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ はミンコフスキー空間の基底であることを示せ．

(c) この基底に対するメトリックの成分を求めよ．

(d) $\vec{e}_u$，$\vec{e}_v$ はヌルであるが直交していないことを示せ．（t–x 平面の**ヌル基底**とよばれる．）

(e) 四つの一形式 $\tilde{\mathrm{d}}u$，$\tilde{\mathrm{d}}v$，$\mathbf{g}(\vec{e}_u,\ )$，$\mathbf{g}(\vec{e}_v,\ )$ を $\tilde{\mathrm{d}}t$ と $\tilde{\mathrm{d}}x$ を使って表せ．

4

特殊相対論における完全流体

4.1　流　　体

一般相対論的天体物理学では，ほとんどの場合の第一近似として，重力源は完全流体だとしてよい．一般には，"流体" とは特別な**連続体**である．連続体とはきわめて多数の粒子の集合体であって，各粒子の運動をしらべることは不可能である．そのため，単位体積あたりの粒子数，エネルギー密度，運動量密度，圧力，温度といった "平均" 量あるいは "巨視的" 量によってその集合体の状態を記述するしかない．湖の水の運動状態や，それのつくり出す重力場は，個々の水分子の位置を指定しなくても，莫大な数の分子の平均量のみから決る．

とはいいながら，これらの物理量は湖の各点各点で変化しうるものである．圧力は水面より湖底で高く，温度も同様に変化する．流体の例として大気もあるが，大気の密度は場所の関数になっている．このことから，どれくらいの粒子をとって平均するべきかという問題が起る．個々の粒子が問題にならないくらい多数でなくてはならないのは明らかだが，その集合がほぼ均一であるほどの大きさでなくてはならない．すなわち，平均速度，運動エネルギー，粒子間隔，といったものが，粒子の集合体の中でどこをとっても同じでなくてはならない．そのような集合を "**要素**" という．この定義は正確さにやや欠けるが，密度，平均速度，温度といった量が一つの決った値を保っていると見なしてよいような粒子の集合体に対しては，役に立つ言い方である．希薄気体のように，そうし

た集合体が存在しないときは，連続体近似が破れる．

連続体近似では，各要素に密度や温度などの値を割り当てる．要素を十分小さいとしているので，数学的にいえば，連続体近似というのは各点で密度や温度の値を指定することに対応している．したがって，連続体は場所ごとに時間ごとに値を指定された場として定義される．

ここまでの連続体の概念には気体に限らず固体も含まれる．**流体**とは“流れている”連続体である．この定義は正確とはいえないので，液体と固体の差がはっきりしない．たいていの固体は十分に高い圧力下では流れるようになる．物質が剛性をもつのはなぜであろうか？　よく考えてみると，剛性は二つの要素の接触面に**平行**な力に起因していることがわかる．二つの接触した要素は相互に押したり引いたりできるが，その共通の境界面に沿ってずらそうとする力に対して逆らわなければ，連続体は剛性をもたない．圧力といわれる直接的な押し–引きの力と比較して，ずれに逆らう力が弱いものが**流体**である．ずれに逆らう**すべての**力がゼロで，近傍の流体要素間の相互作用としては圧力のみである流体を，**完全流体**と定義する．

4.2　ダスト：粒子数流束ベクトル $\vec{N}$

最も単純な流体を相対論的に扱うことから始めよう．ある一つのローレンツ系で静止している粒子の集合を“ダスト”と定義する．“ダスト”という言葉をこのように使用することが窓枠にたまったゴミを意味する使い方とどう結びついてできてきたかは，はっきりしないが，相対論ではこの使い方はごくふつうになっている．

粒子数密度 n　　これらの粒子についてまず知りたいことは，単位体積あたりの粒子数であろう．それは粒子の静止系では，単純に粒子を数えあげ，粒子の占める体積で割算すれば求まる．小領域ごとにこの操作をすると，場所ごとに違った値を得ることになるであろう．粒子は，あるところでは密集し，別のところではまばらにしかないからである．**粒子数密度 n** を

$$n \equiv \text{要素の MCR 系での粒子数の密度} \tag{4.1}$$

と定義する．

粒子が静止していない系 $\bar{\mathcal{O}}$ での粒子数密度はどうなるであろうか？　系 $\bar{\mathcal{O}}$ では粒子は同じ速度で運動している．静止系で数えあげたものと同じ粒子に着目すれば，粒子の**数**は明らかに同じであるが，粒子の占める体積は同じではない．粒子は最初，体積 $\Delta x \Delta y \Delta z$ の直方体の中に入っていたとしよう．ローレンツ収縮によってこの体積は $\Delta x \Delta y \Delta z \sqrt{1-v^2}$ に減少する．運動方向の長さは短くなるが，運動と垂直な方向の長さは変化しないからである（図 4.1）．そのため単位体積あたりの粒子の個数は静止系でのものに比べて，$[\sqrt{1-v^2}]^{-1}$ 倍になる．

$$\frac{n}{\sqrt{1-v^2}} = \text{粒子の速度が } v \text{ の系での粒子数密度} \tag{4.2}$$

面を横切る粒子数流束　　粒子が運動しているとき，次に知りたいことはある決った方向にどれだけの粒子が運動しているかということである．これは次のように流束を定義することで正確に扱える．**ある面を横切る粒子の流束とは，単位時間あたりその面の単位面積を横切る粒子数のことである．**流束は慣性系に依存し（“面積” も “時間” も系に依存する概念である），また面の方向にも依存していることは（粒子の速度の方向に平行な面を横切る粒子はない），明

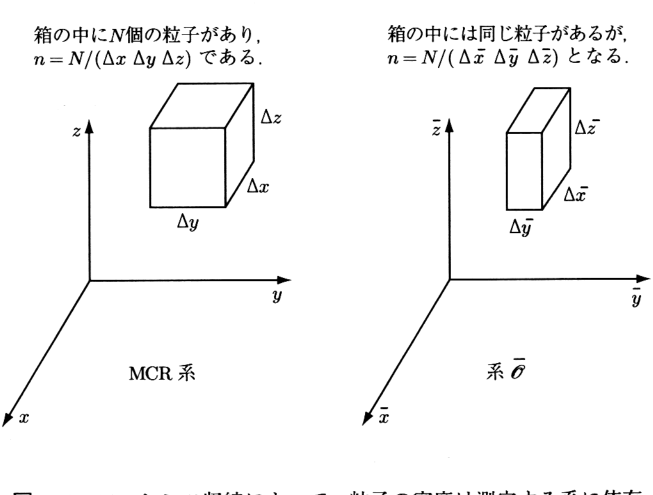


図 4.1　ローレンツ収縮によって，粒子の密度は測定する系に依存してしまう．

らかである．ダストの静止系では，すべての粒子が静止しているのだから，流束はゼロである．系 $\overline{\mathcal{O}}$ ですべての粒子が $\bar{x}$ 方向に速度 v で運動しているとし，簡単化のため $\bar{x}$ 軸に垂直な面 $\mathscr{S}$ を考えよう（図 4.2）．破線で囲まれた長方形は時間 $\Delta\bar{t}$ に $\mathscr{S}$ の面積 ΔA を横切るすべての粒子を含んでいる．その体積は $v\Delta\bar{t}\Delta A$ で，この系での粒子数密度は $n/\sqrt{1-v^2}$ なので，$(n/\sqrt{1-v^2})v\Delta\bar{t}\Delta A$ 個の粒子を含む．**単位**時間に単位面積を通過する粒子数は，$\bar{x}$ 一定の面を横切る流束で，

$$(\text{流束})^{\bar{x}} = \frac{nv}{\sqrt{1-v^2}}$$

と表される．さらに一般的には，粒子は系 $\overline{\mathcal{O}}$ で $\bar{y}$ 方向の速度ももつとしよう．このときには図 4.3 の破線の中には，時間 $\Delta\bar{t}$ に面 $\mathscr{S}$ の ΔA を横切る粒子がすべて含まれている．これは“平行六面体”であって，その体積は（底面積）×（高さ）で求められる．その高さは，$\bar{x}$ 方向の大きさで，$v^{\bar{x}}\Delta\bar{t}$ である．したがって，

$$(\text{流束})^{\bar{x}} = \frac{nv^{\bar{x}}}{\sqrt{1-v^2}} \tag{4.3}$$

が得られる．

粒子数流束の四元ベクトル $\vec{N}$　　次のように定義されるベクトル $\vec{N}$

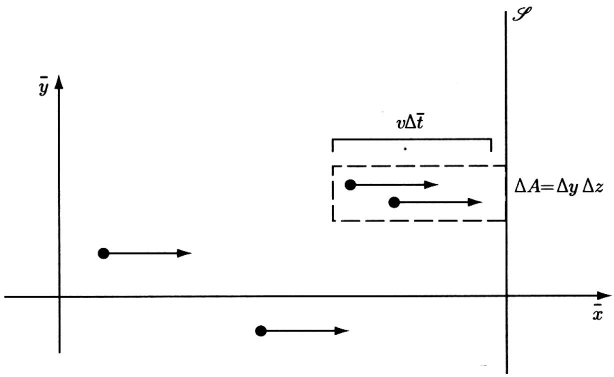


図 4.2　流束を簡単な場合について示した．粒子が $\bar{x}$ 方向のみに運動しているとすれば，面 $\mathscr{S}$ 上から $v\Delta\bar{t}$ の距離内のすべての粒子は，時間 $\Delta\bar{t}$ の間に面 $\mathscr{S}$ を横切ることになる．

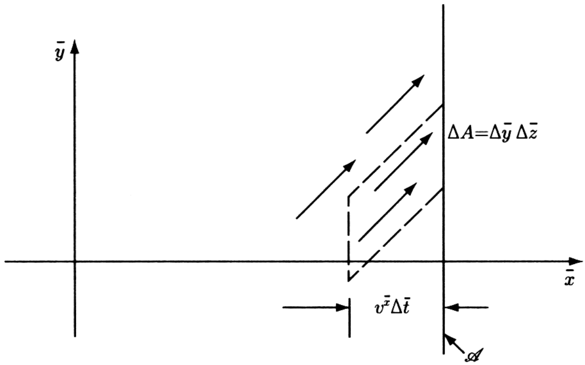


図 4.3　一般的な流束の場合，$\bar{x}$ 一定の面を粒子が横切るのは，速度の $\bar{x}$ 成分があるためである．

$$\vec{N} = n\vec{U} \tag{4.4}$$

を考えよう．ここで，$\vec{U}$ は粒子の四元速度である．系 $\bar{\mathcal{O}}$ での粒子の三元速度が (v^x, v^y, v^z) であるとき，

$$\vec{U} \underset{\bar{\mathcal{O}}}{\longrightarrow} \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v^x}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v^y}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v^z}{\sqrt{1-v^2}}\right)$$

である．それで，

$$\vec{N} \underset{\bar{\mathcal{O}}}{\longrightarrow} \left(\frac{n}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{nv^x}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{nv^y}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{nv^z}{\sqrt{1-v^2}}\right) \tag{4.5}$$

となる．こうして，どの系においても，$\vec{N}$ の時間成分は粒子数密度であり，空間成分はそれぞれの座標軸に垂直な面を横切る流束を表している．これは概念的に重要な結論である．ガリレイ的な物理学では，粒子数密度はスカラーであり，すべての系で同じ値をもつ（ローレンツ収縮がないから）のに対し，流束はそうではない．粒子の速度は系に依存する概念であるので，流束は系に**依存する**三元ベクトルである．相対論的に扱うことで，この二つの概念を，系に依存しない一つの四元ベクトルに統一できた．このように，見掛け上関連のない概念を，密接に結びついた概念に統一することは，自然を理解するうえできわめて重要な発展である．

“系に依存しない” という言葉に含めた意味を再確認しておくほうがよいであろう．ベクトル $\vec{N}$ は幾何学的対象で，その存在は系とは独立である．つまり，テンソルとして一形式に作用して得られる値は系に依存しない．もちろんその成分は系に依存**する**．相対論が生れるまでは，物理学者は流束を三元ベクトルとして考えていた．そのため流束は次に述べるような意味で，系に依存したベクトルとして処理しなければならなかった．四元ベクトルがいかなる系にも依存しないように，三元ベクトルとしての流束は空間座標の向きとは独立した存在であった．しかし，粒子の速度は異なる系をとれば違ってくるので，流束三元ベクトルは相対運動をしている系ごとに違っている．昔の立場では流束ベクトルを，ある慣性系に対してという形で定義しなくてはならなかった．現在の相対論学者からみれば，**一つ**の四元ベクトルがあるだけである．系への依存性がでてくるという以前の考え方は，$\vec{N}$ の 4 成分のうちの 3 個のみに着目したためということになる．ガリレイ的な系に依存しない粒子数密度と系依存性のある流束とを，一つの系依存性のない四元ベクトル $\vec{N}$ に統一したこのやり方は，“エネルギー” と “運動量” を統一して四元運動量にしたのと同じである．

最後に一つ注意を促しておきたい．

◆
$$\vec{N}\cdot\vec{N} = -n^2, \qquad n = (-\vec{N}\cdot\vec{N})^{1/2} \tag{4.6}$$

となるのは明らかである．したがって，n はスカラーである．エネルギーと “慣性質量” が系に依存しているにもかかわらず，“静止質量” がスカラーであるのと同じように，粒子数密度は系に依存するのに反し，n はスカラーで “静止粒子数密度” になっている．今後は**いつも** n は MCR 系での粒子数密度に等しいスカラーの数であると定義しよう．圧力や温度，またその他の流体を特徴づける量にも同じ定義を使う．これらについては，またあとで検討する．

4.3　一形式と面

時間的流束としての粒子数密度　粒子数密度が時間的流束であることを明らかにすれば，粒子数密度と流束の統一についての上述の議論を完全にできる．これをしらべるために，$\bar{x}$ 一定の面を横切る流束を今度は $\bar{t}$ 軸と $\bar{x}$ 軸のみを使っ

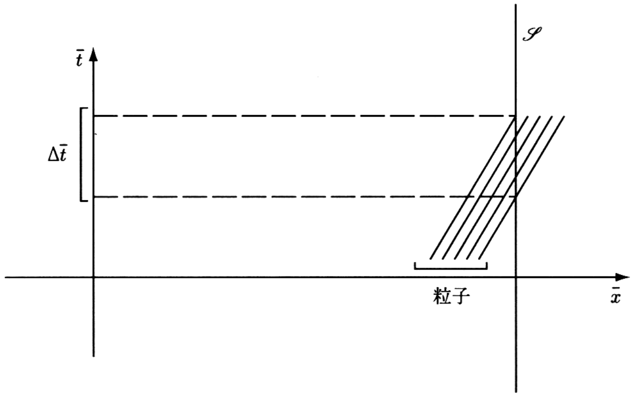


図 4.4 図 4.2 を $\bar{y}$ 軸を落して，時空図で描き直したもの

た**時空図**（図 4.4）で考えてみよう．$\bar{x}$ 軸に垂直な面 $\mathscr{S}$ の世界線が示されている．$\bar{y}$ 軸と $\bar{z}$ 軸を落しているので，その世界線は任意の時刻 $\bar{t}$ では一点で表されている．時間 $\Delta\bar{t}$ の間に面 $\mathscr{S}$ を通過する粒子の世界線も描きこんである．流束は時間間隔 $\Delta\bar{t}=1$ の間に面 $\mathscr{S}$ を横切る世界線の数である．実際には，その面は二次元曲面だから，“世界軌道” は三次元的で，今はその切口のみを描いたものである．したがって，**流束**はこの三次元曲面の単位 “体積” を横切る世界線の数である．ここで体積というのは単位長さの辺 $(\Delta\bar{t}=1, \Delta\bar{y}=1, \Delta\bar{z}=1)$ をもった立方体を意味しているのはいうまでもない．したがって単位三次元体積を横切る世界線の数で流束を定義できる．こうしておくと，この三次元体積としてふつうの空間の体積（ある特定の時刻 $\bar{t}$ での $\Delta\bar{x}=1, \Delta\bar{y}=1, \Delta\bar{z}=1$）を使っても差し支えがない．このときの状況を図 4.5 に示した．ここでは流束は，$\Delta\bar{x}=1$ の間隔を通過する粒子数である（$\bar{y}$ 軸と $\bar{z}$ 軸は落してある）．ところがこれは，与えられた時刻に，単位体積に “含まれる” 粒子数，つまり粒子数密度にほかならない．したがって “時間的” 流束は粒子数密度であることがわかった．

曲面を定義する一形式　ここまでの曲面の扱いはやや泥臭いものであった．不変性を重んじる立場を推し進めていくためには，世界線が横切る曲面をもう少し数学的に満足できる形で表現する必要がある．その表現は一形式で与えら

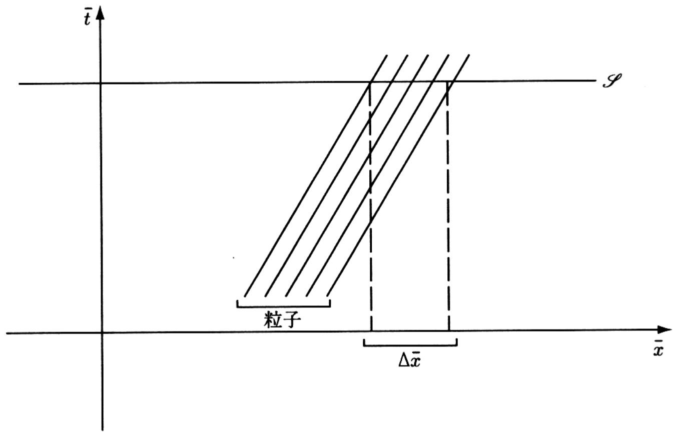


図 4.5　$\bar{t} =$ 一定の面を横切る流束としての粒子数密度

れる．一般的にいうと，曲面はある方程式

$$\phi(t, x, y, z) = \text{一定}$$

の解として定義される．関数 ϕ の勾配，$\tilde{\mathrm{d}}\phi$，は垂直一形式である．ある意味では $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ が $\phi =$ 一定なる曲面を**定義している**．一形式はその曲面に垂直な方向を与えているからである．もちろん $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ にどんな数を掛けたものも同じ曲面を定義してしまうので，ふつうには曲面がヌルでなければ，単位垂直一形式

$$\tilde{n} \equiv \tilde{\mathrm{d}}\phi / |\tilde{\mathrm{d}}\phi| \tag{4.7}$$

を使う．ここで $|\tilde{\mathrm{d}}\phi|$ は $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ の大きさで，

$$|\tilde{\mathrm{d}}\phi| = |\eta^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}|^{1/2} \tag{4.8}$$

である．($\tilde{n}$ と MCR 系での粒子数 n を混同してはいけない．これらは歴史的な偶然のため同じ文字が使用されているが，まったく異なったものである．)

三次元のベクトル解析（たとえば，ガウスの法則）と同じように，“面積要素”を表面の面積と単位長さの垂線の積として定義できる．この場合，座標が x^{α}，x^{β}，x^{γ}（α, β, γ は異なったある**特別の**値だとする）である三次元空間の体積要

素は

$$\tilde{n}\mathrm{d}x^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta}\mathrm{d}x^{\gamma} \tag{4.9}$$

であって，**単位体積**（$\mathrm{d}x^{\alpha}=\mathrm{d}x^{\beta}=\mathrm{d}x^{\gamma}=1$）は $\tilde{n}$ となる．（これらの $\mathrm{d}x$ は勾配ではなく積分される無限小量である．）

面を横切る流束　三次元のガウスの法則では，たとえば面を横切る電場の流束は，$\boldsymbol{E}$ と単位垂直の内積 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}$ であった．この事情はここでも同じである．ϕ 一定の面を横切る（粒子の）流束は $\langle\tilde{n},\vec{N}\rangle$ である．これを確かめるには ϕ として一つの座標 $\bar{x}$ をとってみよう．$\bar{x}$ 一定の面の垂直は $\tilde{\mathrm{d}}\bar{x}$ で，$\tilde{\mathrm{d}}\bar{x} \underset{\bar{\mathcal{O}}}{\longrightarrow} (0,1,0,0)$ だからこれは単位垂直である．したがって $\langle\tilde{\mathrm{d}}\bar{x},\vec{N}\rangle = N^{\alpha}(\tilde{\mathrm{d}}\bar{x})_{\alpha} = N^{\bar{x}}$ で，これは前にみたように $\bar{x}$ 面を横切る流束である．$\phi=\bar{t}$ を選べば，粒子数つまり $\bar{t}$ 一定面を横切る流束 $N^{\bar{0}}$ が得られるのは明らかである．

ベクトルを一形式の実数への関数として定義したが，流束はその具体的な例となっている．ベクトル $\vec{N}$ が与えられると，面を横切る流束を計算するには，その面に対する単位垂直一形式を求め，$\vec{N}$ と縮約すればよい．さらに，すべての量を系に依存しないように，また粒子の系の性質 $\vec{N}$ を面の性質 $\tilde{n}$ から切り放すように表現してきた．これと同じことは次の節にもたくさん出てくる．

一形式による系の表現　流体についてしらべる前に，次のことを知っていると便利である．これまで慣性系をその四元速度で定義していたが，一形式を使っても定義できる．つまり，四元速度に対する一形式 $\mathbf{g}(\vec{U},\ )$ である．これの成分は

$$U_{\alpha}=\eta_{\alpha\beta}U^{\beta}$$

となって，この系では

$$U_0=-1, \qquad U_i=0$$

である．これは明らかに $-\tilde{\mathrm{d}}t$ に等しい（その成分が同じだから）．したがって，$\tilde{\mathrm{d}}t$ を与えることで系を定義することができる．これにより，ものごとがすっきりする．$\tilde{\mathrm{d}}t$ は t の一定の面，つまり同時刻の面の集りであると見なせる．この面が，空間の回転の自由度（このことはふつう無視している）を除いて系を定義しているのは明らかである．実際，ある意味では系を定義するのに $\tilde{\mathrm{d}}t$ は $\vec{U}$ を使うより自然なものである．たとえば，四元運動量が $\vec{p}$ の粒子のエネルギーは，

$$E = \langle \tilde{\mathrm{d}}t, \vec{p} \rangle = p^0 \tag{4.10}$$

である．ここには式 (2.35) に現れた

$$E = -\vec{p} \cdot \vec{U}$$

のようなめざわりな負号はでてこない．

4.4　再びダストについて：ストレス–エネルギーテンソル

ここまでしらべてきたのはダスト粒子の個数についてのみであった．しかし，ダストはエネルギーも運動量ももつし，そのエネルギーと運動量は一般相対論では重力源となる．そこで，それらの量を系に依存しないで表現することを考えなくてはならない．簡単化のために，すべてのダスト粒子は同じ質量 m をもつと仮定する．

エネルギー密度　　MCR 系では，各粒子のエネルギーは単に m で，単位体積あたりの個数は n である．したがって，単位体積あたりのエネルギーは mn である．これを一般に ρ で表す．

$$\rho \equiv \text{MCR 系でのエネルギー密度} \tag{4.11}$$

このように ρ は n（そして m）と同じくスカラーである．ダストの場合には，

$$\rho = nm \quad (\text{ダスト}) \tag{4.12}$$

と表される．粒子のランダムな運動があり，したがって，運動エネルギーのある，もっと一般の流体の場合には，式 (4.12) は平均的な静止系をとっても成り立たない．

系 $\bar{\mathcal{O}}$ においては粒子数密度は $n/\sqrt{1-v^2}$ であるが，各粒子のエネルギーは $m/\sqrt{1-v^2}$ となる．粒子が運動しているからである．したがって，エネルギー密度は $mn/(1-v^2)$ で

$$\frac{\rho}{1-v^2} = \text{粒子の速度が } v \text{ にみえる系でのエネルギー密度} \tag{4.13}$$

となる．この変換は $\sqrt{1-v^2} = \Lambda^{\bar{0}}{}_0$ という因子を二つ含んでいる．体積とエネルギーの**両方**が変換されるからである．したがって，エネルギー密度をベクトルの成分として表現することはできない．実際，エネルギー密度は $\binom{2}{0}$ テンソルの成分なのである．このことはテンソルの定義から容易にわかる．エネルギーを定義するときには，エネルギー運動量の四元ベクトルの第ゼロ成分を取り出すために一形式が必要であった．密度は時間一定の面を横切る流束なのだから，密度を定義するときにも一形式を用いた．これと同じように，エネルギー流束には二つの一形式が必要である．一つは“エネルギー”を定義するために，またもう一つは面を定義するためである．運動量密度についても同じことがいえる．運動量のどの成分かを決めるために一つの一形式が，そして密度を定めるのにもう一つの一形式が必要である．まったく同様に運動量流束も考えられる．ある面を横切る運動量の割合である．これらすべては二つの一形式を必要としている．したがって，ストレス–エネルギーテンソルというテンソル $\mathbf{T}$ があって，適当な一形式を変数として代入したとき，得られる値がこれらの数値なのである．

ストレス–エネルギーテンソル　ストレス–エネルギーテンソルを定義するのに最も便利なのは，ある任意の系での成分を使うことである．

◆ $$\mathbf{T}(\tilde{\mathrm{d}}x^\alpha, \tilde{\mathrm{d}}x^\beta) = T^{\alpha\beta} \equiv x^\beta\text{一定の面を横切る}\alpha\text{運動量流束} \tag{4.14}$$

（ここで α 運動量といったのはもちろん四元運動量の α 成分 $p^\alpha \equiv \langle \tilde{\mathrm{d}}x^\alpha, \vec{p}\rangle$ のことである．）これが本当にテンソルであることは 4.10 節の練習問題 5 で証明される．

この定義が前に述べたことと同じであることをしらべてみよう．T^{00} を考える．この量は $t=$ 一定の面を横切るゼロ運動量（エネルギー）の流束と定義された．これはまさにエネルギー密度にほかならず，

$$T^{00} = \text{エネルギー密度} \tag{4.15}$$

である．同じようにして，T^{0i} は $x^i =$ 一定の面を横切るエネルギー流束で，

$$T^{0i} = x^i\text{面を横切るエネルギー流束} \tag{4.16}$$

となっている．また T^{i0} は $t=$ 一定の面を横切る i 運動量流束であり，i 運動量密度は

$$T^{i0} = i \text{ 運動量密度} \tag{4.17}$$

である．最後に T^{ij} は i 運動量の j 流束で

$$T^{ij} = j \text{ 面を横切る } i \text{ 運動量流束} \tag{4.18}$$

である．

ある系で $\mathbf{T}$ の成分を定義しておけば，ほかのどの系でも完全に定義できる．ダストについては，MCR 系での $\mathbf{T}$ の成分は特に簡単になる．粒子の運動がないのですべての i 運動量はゼロであり，すべての流束の空間成分はゼロとなる．つまり

$$(T^{00})_{\text{MCRF}} = \rho = mn$$
$$(T^{0i})_{\text{MCRF}} = (T^{i0})_{\text{MCRF}} = (T^{ij})_{\text{MCRF}} = 0$$

である．$\vec{p} = m\vec{U}$ を粒子の四元運動量としたとき，テンソル $\vec{p} \otimes \vec{N}$ の成分が MCR 系で前述のようになることは容易にわかる．そこで

◆　　$$\text{ダスト：} \mathbf{T} = \vec{p} \otimes \vec{N} = mn\vec{U} \otimes \vec{U} = \rho\vec{U} \otimes \vec{U} \tag{4.19}$$

が得られる．このことから

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= \mathbf{T}(\tilde{\omega}^\alpha, \tilde{\omega}^\beta) \\ &= \rho\vec{U}(\tilde{\omega}^\alpha)\vec{U}(\tilde{\omega}^\beta) \\ &= \rho U^\alpha U^\beta \end{aligned} \tag{4.20}$$

と結論できる．

系 $\bar{\mathcal{O}}$ では

$$\vec{U} \underset{\bar{\mathcal{O}}}{\rightarrow} \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v^x}{\sqrt{1-v^2}}, \cdots\right)$$

だから，

$$\left.\begin{aligned} T^{\bar{0}\bar{0}} &= \rho U^{\bar{0}} U^{\bar{0}} = \rho/(1-v^2) \\ T^{\bar{0}\bar{i}} &= \rho U^{\bar{0}} U^{\bar{i}} = \rho v^i/(1-v^2) \\ T^{\bar{i}\bar{0}} &= \rho U^{\bar{i}} U^{\bar{0}} = \rho v^i/(1-v^2) \\ T^{\bar{i}\bar{j}} &= \rho U^{\bar{i}} U^{\bar{j}} = \rho v^i v^j/(1-v^2) \end{aligned}\right\} \qquad (4.21)$$

となる．これらはエネルギー密度，エネルギー流束，運動量密度，運動量流束をその定義から計算したときに求められる値である．（エネルギー密度についてはこの節の最初に計算した．）重要なことを注意しておく．$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$ であって，$\mathbf{T}$ は対称である．このことはダストのときだけでなく一般に成り立つことがあとでわかる．

4.5 一般の流体

今までやってきたことは，粒子の集合として一番簡単な場合であった．これを流体に一般化するためには，次の事柄を取り入れなくてはならない．(i) 流体の全体の運動のほかに，各粒子がランダムな運動をしていること．(ii) 粒子間のさまざまな力があって，それはポテンシャルエネルギーの形で入ってくる．

マクロな量の定義　4.1 節で流体要素の概念を扱った．各流体要素ごとに，その静止系（総運動量の空間成分がゼロ）があり，それがその要素の MCR 系である．この系は**瞬時的**にのみ共動している．流体要素は加速されうるので，すぐに別の慣性系が MCR 系になるようになる．さらに，二つの別の流体要素は，相対的な運動をするので，共通の MCR 系をもつことはない．すなわち，MCR 系は一つの流体要素に特有のもので，どの系が MCR 系であるかは，場所と時間の関数となる．**相対論では，流体要素に伴うすべてのスカラー量**（粒子数密度，エネルギー密度，温度といった量）**は MCR 系での値を使って定義される．**そこで，表 4.1 に定義を与えた．本書では一種類の粒子からなる一成分流体のみを扱う．したがって，相互に侵入しあうような状況は考えない．

熱力学第一法則　この法則はエネルギーの保存を述べたものである．MCR 系において，流体要素はその周囲とエネルギーを次の二つの方法でやりとりする．熱伝導（ΔQ の熱量を吸収する）と仕事（$p\Delta V$ の仕事を行う．ここで，V

表 4.1　流体のマクロな量

記号	名　称	定　　義
$\vec{U}$	流体要素の四元速度	MCR 系の四元速度
n	粒子数密度	MCR 系での単位体積あたりの粒子数
$\vec{N}$	流束ベクトル	$\vec{N} \equiv n\vec{U}$
ρ	エネルギー密度	全質量エネルギー（静止質量，ランダム運動のエネルギー，化学的エネルギー，……）の密度
Π	粒子 1 個あたりの内部エネルギー	$\Pi \equiv (\rho/n) - m \rightarrow \rho \equiv n(m+\Pi)$ この Π は静止質量以外のすべてのエネルギーの総称である．
ρ_0	静止質量密度	$\rho_0 = mn$ m は定数なので，静止質量のみにかかわる "エネルギー" である．したがって，$\rho = \rho_0 + n\Pi$
T	温度	MCR 系でのふつうの熱力学的な定義（本文参照）
p	圧力	MCR 系でのふつうの流体力学的な定義（詳細は後述）
S	比エントロピー	1 粒子あたりのエントロピー（本文参照）

は要素の三次元体積である）である．要素の全エネルギーを E とすると，ΔQ は流入したエネルギーで，$p\Delta V$ は流失したエネルギーであるから，変化は小さいと仮定すると，

$$\left.\begin{aligned} &\Delta E = \Delta Q - p\Delta V \\ &\text{または} \\ &\Delta Q = \Delta E + p\Delta V \end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

と書くことができる．さて，その要素に全部で N 個の粒子が含まれており，粒子数が変化しなければ（粒子の生成や消滅がないとして），

$$V = \frac{N}{n}, \qquad \Delta V = -\frac{N}{n^2}\Delta n \tag{4.23}$$

と表せる．さらには，

$$E = \rho V = \rho N/n$$

$$\Delta E = \rho\Delta V + V\Delta\rho$$

でもある．この二つの結果から，

$$\Delta Q = \frac{N}{n}\Delta\rho - N(\rho+p)\frac{\Delta n}{n^2}$$

であることがわかる．ここで $q \equiv Q/N$ と書くと，それは粒子 1 個の吸収する熱量であるが，

$$n\Delta q = \Delta\rho - \frac{\rho+p}{n}\Delta n \tag{4.24}$$

が得られる．

さてここで変化は“無限小”だとしよう．一般に流体の状態は二つのパラメーターで指定できることがわかっている．たとえば，ρ と T や ρ と n である．ほかの量はすべて，たとえば ρ と n の関数である．このことは式 (4.24) の右辺

$$\mathrm{d}\rho - (\rho+p)\mathrm{d}n/n$$

が ρ と n にのみ依存していることを示している．1 階の微分方程式の一般論から，この量は**つねに積分因子**をもつことがわかる．すなわち，ρ と n のみの二つの関数 A と B があり，それを使って，

$$\mathrm{d}\rho - (\rho+p)\mathrm{d}n/n \equiv A\mathrm{d}B$$

がすべての ρ と n についての恒等式となるのである．ふつう熱力学では，温度を A/n で，比エントロピーを B で**定義する**ので，

◆ $$\mathrm{d}\rho - (\rho+p)\mathrm{d}n/n = nT\mathrm{d}S \tag{4.25}$$

あるいは言い換えると，

$$\Delta q = T\Delta S \tag{4.26}$$

と表される．流体要素に吸収される熱量がエントロピーの増加に比例しているのである．

ここでは T と S を数学的に定義することで導入した．もっと詳しい議論をすれば，T がふつうの意味の温度であり，S が熱力学第二法則，つまりいかなる系でも**全**エントロピーは増大するという法則において使用される量であることを示すことができる．第二法則についてはこれ以上言及することはしない．エントロピーをここで使用したのは，エネルギー保存則を述べている第一法則の

積分だからである．特に，式 (4.25) と式 (4.26) は後に使用する．

一般のストレス–エネルギーテンソル　　式 (4.14) における $T^{\alpha\beta}$ の定義は，完全に一般的なものである．この量を特に MCR 系でみてみよう．MCR 系では流体要素の全体的な運動はないし，粒子の運動量の空間成分もない．したがって，**MCR** 系では

(1)　$T^{00}=$ エネルギー密度 $=\rho$

(2)　$T^{0i}=$ エネルギー流束，MCR 系での運動はないが，エネルギーは熱伝導で輸送されうる．したがって，T^{0i} は基本的には MCR 系での熱伝導項である．

(3)　$T^{i0}=$ 運動量密度，粒子はやはり MCR 系で運動量をもたないが，熱が伝わると移動するエネルギーは運動量を運ぶ．$T^{i0}\equiv T^{0i}$ となることは次に示す．

(4)　$T^{ij}=$ 運動量流束，この項は重要かつ面白いものである．次に詳しく議論する．これを**ストレス**という．

T の空間成分 T^{ij}　　定義から，T^{ij} は j 面を横切る i 運動量流束である．二つの立方体の流体要素が面 $\mathscr{S}$ で接しているとしよう（図 4.6）．一般にはそれらは相互に力を及ぼしあっている．図には A が B に及ぼす力 F を書きこんでいる．（いうまでもなく，B は同じ大きさで反対向きの力を A に及ぼしている．）力は運動量の変化率である（速度がゼロの MCR 系で考えるからニュートンの

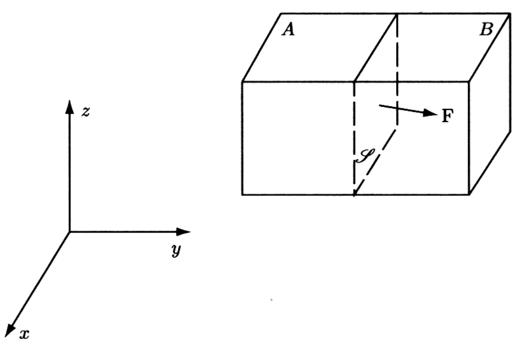


図 4.6　流体要素 A から隣接した要素 B に及ぼす力 F は，媒質と外力の性質によって，いろいろな方向をとりうる．

運動の法則が使える）ので，A は単位時間あたり F の割合で，B に運動量を注ぎ込んでいる．もちろん，B は新たに運動量を得た結果，新たな速度になったりならなかったりするが，それは A 以外のまわりから B に流入する運動量に左右される．B の運動は明らかにすべての力の作用で決るわけである．とはいいながら，おのおのの力が B に運動量を加えているのであって，面 $\mathscr{S}$ を通して A から B に F の割合で運動量が流れるのである．$\mathscr{S}$ の面積が $\mathscr{A}$ であれば，$\mathscr{S}$ を横切る運動量流束は $F/\mathscr{A}$ である．$\mathscr{S}$ が x^j 一定の面であれば，流体要素 A の T^{ij} は $F^i/\mathscr{A}$ となる．

T^{ij} の意味を簡単にいえば，相互に接する流体要素間の力である．前にも述べたようにこの力は要素の接する面に垂直に働く必要はない．（粘性やその他の剛性は面に平行な力を及ぼす．）しかし，力が面に垂直ならば，T^{ij} は $i=j$ のとき以外にはゼロとなる．（このことをよく考えてみよ．すぐあとでこの事実を利用する．）

MCR 系での $T^{\alpha\beta}$ の対称性　　さてここで $\mathbf{T}$ が対称テンソルであることを証明しよう．一つの系でその成分が対称であることを示せばよい．任意の $\tilde{r}$，$\tilde{q}$ に対して $\mathbf{T}(\tilde{r},\tilde{q})=\mathbf{T}(\tilde{q},\tilde{r})$ であることは，ほかのどの系においてもその成分が対称であることを意味する．一番扱いやすいのは MCR 系である．

(a) T^{ij} の対称性．図 4.7 に一辺の長さ l の立方体の流体要素を描いてある．

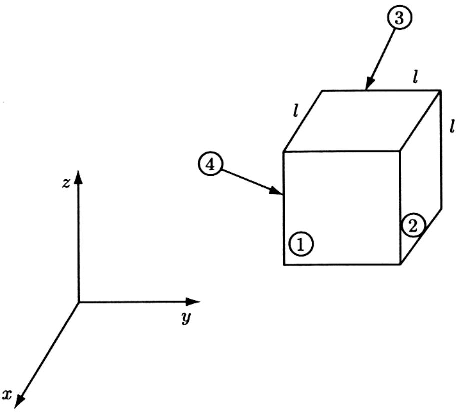


図 4.7　流体要素

面①（$x=$一定の面）を通して隣の要素に及ぼす力は $F^i_1=T^{ix}l^2$ である．ここで l^2 はその面の面積である．この式で $\mathbf{F}$ は必ずしも面に垂直ではないから，i は 1，2，3 のすべてをとりうる．同様に面②を通して隣の要素に及ぼす力は $F^i_2=T^{iy}l^2$ となる．（あとで $l\to 0$ の極限をとるので，要素は十分小さいことを忘れないように．）要素はまた隣の要素に $-x$ 方向にも力を及ぼす．これを F^i_3 と書くことにする．同じようにして，y の負の方向を向いた面には F^i_4 が作用する．流体要素に作用する力は，それぞれ $-F^i_1$，$-F^i_2$，$\cdots$ となる．まずわかることは，$l\to 0$ となったときに，要素に作用する合力がゼロにならなければ，この微小な要素の加速度が無限大になってしまうので，$F^i_3\approx -F^i_1$ であることである．次に流体要素の中心を通って，z 軸のまわりのトルクを計算する．（立方体の上下両面に作用する力は，このトルクに影響しないので，この二つの力は考えなかった．）トルクの計算をするために，座標の原点を立方体の中心に選ぶ．$-\boldsymbol{F}_1$ によるトルクは $-(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_1)^z=-xF^y_1=-lT^{yx}l^2/2$ である．ここでは $\boldsymbol{r}\to(l/2,0,0)$ だとして（特にこの場所は $y=0$ であることに注意），力は面の中心に作用すると考えた．$-\boldsymbol{F}_3$ によるトルクも同じで $-l^3T^{yx}/2$ となる．$-\boldsymbol{F}_2$ によるトルクは $-(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_2)^z=+yF^x_2=lT^{xy}l^2/2$ である．同様に $-\boldsymbol{F}_4$ によるトルクも同じで $l^3T^{xy}/2$ となる．したがって，トルクの総計は

$$\tau_z=l^3(T^{xy}-T^{yx}) \tag{4.27}$$

である．

z 軸のまわりの要素の慣性モーメントは質量 $\times l^2$ に比例していて

$$I=\alpha\rho l^5$$

と書ける．ここで α はある定数で，ρ は密度（全エネルギー密度でも静止質量密度でもここでの議論には影響しない）である．したがって，角加速度は

$$\ddot{\theta}=\frac{\tau_z}{I}=\frac{T^{xy}-T^{yx}}{\alpha\rho l^2} \tag{4.28}$$

と表される．α は定数で，ρ は T^{xy} や T^{yx} と同じく要素の大きさと無関係であるので，もし

$$T^{xy}=T^{yx}$$

でなければ，$l \to 0$ のときに無限に発散してしまう．流体中で流体要素が小さいものほど速く回転しているということは明らかにありえないことだから，ストレスはつねに**対称**で，

$$T^{ij} = T^{ji} \tag{4.29}$$

であることがわかる．ここでは物質の特別な性質は使っていないので，このことは流体でも固体でも同様に成り立つ．また相対論のみでなくニュートン理論でも正しいといえる．ニュートン理論では T^{ij} はストレステンソルとよばれる三次元の $\binom{2}{0}$ テンソルの成分である．これは工学系の人にはおなじみのものである．相対論的に拡張された $\mathbf{T}$ の名称はここから来ている．

(b) 運動量密度とエネルギー流束の同等性．これはずっと簡単に示すことができる．エネルギー流束は（エネルギー密度）×（その流れの速度）である．しかしエネルギーと質量は同じであるから，これは質量密度にその運動の速度を掛けたものである．言い換えれば，運動量密度である．したがって $T^{0i} = T^{i0}$ である．

エネルギー–運動量の保存　$\mathbf{T}$ は流体のもつエネルギーと運動量を表しているから，何らかの形でこれを使って，エネルギーと運動量の保存則を表すことができるはずである．実際これはかなり容易にできる．図 4.8 には立方体の流体要素を断面のみで示した．（z 方向は描いていない．）エネルギーはすべての辺を通して流れる．面④を横切る流れの割合は $l^2 T^{0x}(x=0)$ で，面②では，

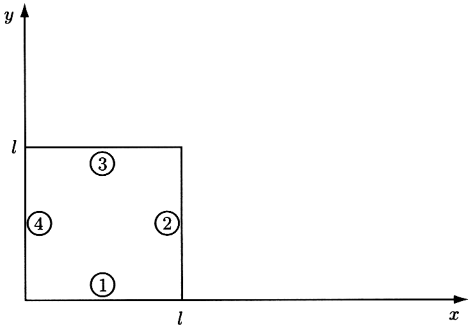


図 4.8　立方体の流体要素の $z =$ 一定の面での切口

$-l^2T^{0x}(x=l)$ である．二番目の項はマイナスとなるが，T^{0x} が面②を横切って，この体積から流れ出す x の正の方向のエネルギーの流れを表しているからである．同様にして，y 方向のエネルギーの流れは $l^2T^{0y}(y=0)-l^2T^{0y}(y=l)$ となる．これらの割合の総和が，内部のエネルギーの増加の割合 $\partial(T^{00}l^3)/\partial t$ である．（エネルギー保存を述べたもの．）したがって，

$$\frac{\partial}{\partial t}l^3T^{00}=l^2[T^{0x}(x=0)-T^{0x}(x=l)+T^{0y}(y=0)\\-T^{0y}(y=l)+T^{0z}(z=0)-T^{0z}(z=l)] \tag{4.30}$$

が得られる．l^3 で割って $l\to 0$ の極限をとると

$$\frac{\partial}{\partial t}T^{00}=-\frac{\partial}{\partial x}T^{0x}-\frac{\partial}{\partial y}T^{0y}-\frac{\partial}{\partial z}T^{0z} \tag{4.31}$$

となる．（これを導くときに微分の定義

$$\lim_{l\to 0}\frac{T^{0x}(x=0)-T^{0x}(x=l)}{l}=-\frac{\partial}{\partial x}T^{0x} \tag{4.32}$$

を使った.）式 (4.31) は書き直すと

$$T^{00}{}_{,0}+T^{0x}{}_{,x}+T^{0y}{}_{,y}+T^{0z}{}_{,z}=0$$

すなわち

$$T^{0\alpha}{}_{,\alpha}=0 \tag{4.33}$$

と表される．これが，エネルギー保存則を表した式である．

同様に運動量も保存される．今とまったく同じ数学的操作が使える．ただ添字の “0” を保存則を考える運動量の成分に対応する空間の添字に変えてやればよい．一般的な保存則は

◆
$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=0 \tag{4.34}$$

となる．この式は特殊相対論ではすべての物質に適用できる．これは四次元の発散であることに注意しておきたい．この式と，保存則の積分形を与えるガウスの定理との関係はあとで議論する．

粒子数の保存　　流体が運動しているときに流体要素中の粒子数は変化するが，流体中の全粒子数が変化しないということもありうる．特に，図 4.8 で流

体要素の粒子数の変化の割合は，境界を通じてのやり取りのみ，つまり出入りする正味の流束のみに依存している．この保存則は式 (4.34) と同じように導かれる．したがって，

$$\frac{\partial}{\partial t}N^0 = -\frac{\partial}{\partial x}N^x - \frac{\partial}{\partial y}N^y - \frac{\partial}{\partial z}N^z$$

すなわち

◆
$$N^{\alpha}{}_{,\alpha} = (nU^{\alpha})_{,\alpha} = 0 \tag{4.35}$$

と表される．今後取り扱う流体は，この保存則を満たすもののみに限る．これはそれほど厳しい制限ではない．必要なら n として，いつでもバリオン数密度をとることができるからである．

高エネルギー物理にあまりなじみのない人のためにいうと，“バリオン”とは物理学で重い粒子につけられた一般的な名称である．最もふつうには中性子と陽子の二つである．それら以外は非常に不安定なので，ふつうの物理では重要なものではなくなる．しかしそれらが崩壊したときには中性子や陽子となり，静止質量や粒子の性質は保存されないけれど，バリオンの総数は保存される．理論物理では，バリオン数が必ずしも保存しないことを示唆している．たとえば強い相互作用と，弱い相互作用，そして電磁相互作用を統一する，いわゆる“大統一理論”が陽子の有限の寿命を予言していたり，またブラックホールへ崩壊したり，ブラックホールが蒸発したりするとき（11 章参照）には，バリオン数は保存されないということがある．しかし，そのような現象はまだ観測されていないし，たいていの場合には重要であるとは思えない．

4.6 完 全 流 体

最後に一番関心のある流体について考えよう．**相対論での完全流体とは MCR 系で，粘性も，熱伝導もない流体のことである**．これはふつうの熱力学での理想気体を一般化したものである．これはダストについで扱うのがやさしい流体である．先の定義に現れた二つの制限によって，次に示すように，そのストレス–エネルギーテンソルは非常に簡単なものとなる．

熱伝導がないこと　$\mathbf{T}$ の定義から MCR 系では $T^{0i}=T^{i0}=0$ であることがただちに導かれる．エネルギーは粒子の流れに伴ってのみ流れるからである．熱力学第一法則を議論したときに，粒子数が保存されると，比エントロピーは式 (4.26) によって熱の流れに結びつくことを示した．このことは，完全流体で粒子数の保存の式 (4.35) が成り立っていれば，流体が流れるときに，S は時間的に一定でなければならないことを意味している．このことが保存則から出てくることは，すぐあとに示す．

粘性がないこと　粘性は粒子の境界面に沿った力である．その力がないということは，力はつねに境界面に垂直である．つまり $i=j$ でなければ T^{ij} はゼロでなくてはならないことを意味する．したがって，T^{ij} は対角行列でなくてはならない．対角であるのは**すべての** MCR 系においてである．“粘性がない” という言い方は，空間軸のとりかたに無関係だからである．すべての系で対角化された行列は，単位行列に係数を掛けたもののみである．つまりその対角成分はすべて等しい．したがって，面 x は x 方向の力のみを及ぼしあい，面 y と z についても同様である．これらの単位面積あたりの力はすべて等しく，**圧力** p とよばれる．よって $T^{ij}=p\delta^{ij}$ が得られる．ゼロ粘性の仮定によって，(3×3 対称行列 T^{ij} の独立な要素の数) 6 個の量を，ただ一つの圧力だけに減らすことができた．

$\mathbf{T}$ の形　MCR 系では，$\mathbf{T}$ の成分は，いま示したように

$$(T^{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}\rho & 0 & 0 & 0\\ 0 & p & 0 & 0\\ 0 & 0 & p & 0\\ 0 & 0 & 0 & p\end{pmatrix} \tag{4.36}$$

である．MCR 系で

$$T^{\alpha\beta}=(\rho+p)U^{\alpha}U^{\beta}+p\eta^{\alpha\beta} \tag{4.37}$$

であることを示すのはさほど難しくはない．たとえば，$\alpha=\beta=0$ ならば $U^0=1$，$\eta^{00}=-1$ で，$T^{\alpha\beta}=(\rho+p)-p=\rho$ となり，式 (4.36) と一致する．他の α と β についても式 (4.37) が式 (4.36) を与えることは確かめられる．しかし式 (4.37) は，系に依存しない形式で表されているから

◆
$$\mathbf{T} = (\rho + p)\vec{U} \otimes \vec{U} + p\mathbf{g}^{-1} \tag{4.38}$$

が完全流体のストレス–エネルギーテンソルである．

圧力の意味についてひと言　式 (4.38) と式 (4.19) を比べてみると“ダスト”が圧力ゼロの完全流体であることがわかる．このことから，粒子の運動にランダムさが全然ないときにのみ，完全流体の圧力がゼロであることがわかる．圧力は粒子のランダムな速度に起因しているのである．仮想的に無衝突と考えられるほど希薄な気体でも圧力はある．圧力は運動量流束であるからである．その原因が力であるか，境界を横切る粒子であるかは重要ではない．

保存則　式 (4.34) から

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = [(\rho + p)U^\alpha U^\beta + p\eta^{\alpha\beta}]_{,\beta} = 0 \tag{4.39}$$

となる．この式はテンソル計算の初歩の練習問題になりうる．式 (4.39) は各 α について，4 本の式を表している．まずは，

$$(nU^\beta)_{,\beta} = 0 \tag{4.40}$$

も仮定して式 (4.39) の第 1 項を書いてみると，

$$\begin{aligned} [(\rho + p)U^\alpha U^\beta]_{,\beta} &= \left[\frac{\rho + p}{n}U^\alpha nU^\beta\right]_{,\beta} \\ &= nU^\beta \left(\frac{\rho + p}{n}U^\alpha\right)_{,\beta} \end{aligned} \tag{4.41}$$

となる．さらに，$\eta^{\alpha\beta}$ は定数行列であるから，$\eta^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} = 0$ である．ついでながら，このことは，

$$U^\alpha{}_{,\beta} U_\alpha = 0 \tag{4.42}$$

であることも含む．この式の証明には

$$U^\alpha U_\alpha = -1 \Rightarrow (U^\alpha U_\alpha)_{,\beta} = 0 \tag{4.43}$$

つまり

$$(U^\alpha U^\gamma \eta_{\alpha\gamma})_{,\beta} = (U^\alpha U^\gamma)_{,\beta}\eta_{\alpha\gamma} = 2U^\alpha{}_{,\beta} U^\gamma \eta_{\alpha\gamma} \tag{4.44}$$

を使う．最後の変形は $\eta_{\alpha\beta}$ の対称性から，$U^\alpha{}_{,\beta}U^\gamma\eta_{\alpha\gamma} = U^\alpha U^\gamma{}_{,\beta}\eta_{\alpha\gamma}$ であることを使って得られる．さて，式 (4.44) の最後の項は

$$2U^\alpha{}_{,\beta}U_\alpha$$

と書き換えられるので，式 (4.43) からゼロとなり，式 (4.42) が証明できた．式 (4.42) は次のように利用できる．式 (4.41) を使うと最初の保存則の式は

$$nU^\beta\left(\frac{\rho+p}{n}U^\alpha\right)_{,\beta} + p_{,\beta}\eta^{\alpha\beta} = 0 \tag{4.45}$$

と変形される．この四つの式から特に有用な一つの式を導くことができる．U_α を掛け，α について和をとるのである．こうすると式 (4.45) の MCR 系での時間成分が求められ，

$$nU^\beta U_\alpha\left(\frac{\rho+p}{n}U^\alpha\right)_{,\beta} + p_{,\beta}\eta^{\alpha\beta}U_\alpha = 0 \tag{4.46}$$

となる．この最後の項は，

$$p_{,\beta}U^\beta$$

で，これは p の流体要素の世界線に沿った微分 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\tau$ であることを知っている．第 1 項で U^α を β で微分したものはゼロ［式 (4.42) から］となるので，$U^\alpha U_\alpha = -1$ を使うと

$$U^\beta\left[-n\left(\frac{\rho+p}{n}\right)_{,\beta} + p_{,\beta}\right] = 0 \tag{4.47}$$

が得られる．この式をさらに計算すると

$$-U^\beta\left[\rho_{,\beta} - \frac{\rho+p}{n}n_{,\beta}\right] = 0 \tag{4.48}$$

となる．別の表現をすると

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\tau} - \frac{\rho+p}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{4.49}$$

と表される．これを式 (4.25) と比べると，

◆
$$U^\alpha S_{,\alpha} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{4.50}$$

であることがわかる．したがって，粒子数を保存する完全流体では比エントロピーが保存することがいえた．これを**断熱**（adiabatic）という．運動中の流体要素のエントロピーが一定であるから，ふつうはエントロピーについて考える必要はない．しかし，熱力学におけるエネルギー保存則が，式 (4.39) で表される保存則の式の U^α に平行な成分で表されるということは，重要なので憶えておくべきである．

式 (4.39) の表す 4 本の式の残りの 3 本の式は次のようになる．式 (4.45) をもう一度書くと

$$nU^\beta \left(\frac{\rho+p}{n}U^\alpha\right)_{,\beta} + p_{,\beta}\eta^{\alpha\beta} = 0$$

である．$U^i = 0$ だが，$U^i{}_{,\beta} \neq 0$ である MCR 系へ移って考えよう．MCR 系では，この式の第ゼロ成分は，先に示したようにこの式を U_α で縮約したものである．したがって，i 成分の式

$$nU^\beta \left(\frac{\rho+p}{n}U^i\right)_{,\beta} + p_{,\beta}\eta^{i\beta} = 0 \tag{4.51}$$

のみを問題にすればよい．$U^i = 0$ だから，$(\rho+p)/n$ の β 微分は考える必要がなくなって，

$$(\rho+p)U^i{}_{,\beta}U^\beta + p_{,\beta}\eta^{i\beta} = 0 \tag{4.52}$$

となる．添字 i を下付にすると読みやすくなる．（こうしても内容の変化はない．）$\eta^\beta{}_i = \delta^\beta_i$ であるから，

$$(\rho+p)U_{i,\beta}U^\beta + p_{,i} = 0 \tag{4.53}$$

が得られる．最後に，$U_{i,\beta}U^\beta$ は四元加速度 a_i の定義であることを思い出すと，

◆
$$(\rho+p)a_i + p_{,i} = 0 \tag{4.54}$$

となる．非相対論的な流体力学を知っていれば，この式は

$$\rho\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\nabla}p = 0 \tag{4.55}$$

の一般化になっていることがわかるであろう．ここでは

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} \tag{4.56}$$

である．唯一違うのは ρ のかわりに $(\rho + p)$ が使われていることである．相対論では $(\rho + p)$ が“慣性質量密度”としてふるまう．式 (4.54) から $(\rho + p)$ が大きくなればなるだけ，その物体を加速するのが困難になるからである．式 (4.54) は本質的には $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ であって，$-p_{,i}$ が単位体積の流体要素に作用する力になっている．すなわち，おおよそでいえば，p は流体要素がその隣合った要素に及ぼす力であるから，$-p$ がその要素に作用する力である．しかし，要素の反対側の要素も逆向きに力を及ぼしているので，流体要素に両側から作用する p に変化があるときにのみ，流体を加速する正味の力が現れるのである．$-\nabla p$ が力なのはそういう理由による．

4.7　一般相対論の重要性

一般相対論は重力の相対論的理論である．最初から一般相対論に話をもっていくことができなかったのは，テンソルと，特殊相対論での流体と，曲った空間をよく理解していなかったからである．まだ曲率（次章で説明する）を学ばなくてはならないのだが，ここまでくれば，先を見通して，これから学んでいく理論をおおざっぱに見わたすことができる．

まず述べておきたいのは一般相対論において $\mathbf{T}$ がきわめて重要だということである．ニュートン理論での場の源は密度 ρ である．この密度は質量密度と考えていたから，われわれの使っている ρ_0 に非常に近い量である．しかし，静止質量とエネルギーは相互に転換可能であることを考えると，静止質量のみを源とすることは，相対論的立場からは変則的になってしまう．事実，そのようにしてつくった理論では高精度の実験結果（のちに示す）と矛盾してしまう．したがって，場の源は**全**エネルギー，つまり全質量エネルギー密度 T^{00} でなくてはならない．しかしテンソルの一成分のみを場の源としたのでは，不変性を破った重力理論になってしまう．T^{00} を計算するための特別の系を選びだしてやる必要がでてくるからである．そこで Einstein は，場の源が $\mathbf{T}$ であるべきだと考えた．つまり，ストレス，圧力，運動量がすべて源として作用しなければならないというのである．Einstein は，このことを曲った空間に対する洞察と結

びつけて，一般相対論を発見したのである．

二番目に，一般相対論においてニュートン理論以上に基本的な役割を果す圧力について述べておく．つまり，圧力は場の源になりうるし，また式 (4.54) の $(\rho+p)$ の項にも現れてくるからである．高密度の星を考えると，重力場が強いので大きな圧力勾配が要求される．その大きさは，圧力を無視したときに流体要素をもつ加速度 a_i で測ることができる．場を考えて a_i が決れば，それに対抗するために必要な圧力勾配は，重力を無視したときに，反対向きの加速度

$$-a_i = \frac{p_{,i}}{\rho+p}$$

を生じさせるだけのものである．この式から圧力勾配 $p_{,i}$ がわかる．$(\rho+p)$ は ρ より大きいから，勾配は相対論の方がニュートン理論に比べて急でなくてはならない．さらに，$\mathbf{T}$ のすべての成分が重力場の源になるから，この大きな圧力は重力場に加わって，星を支えるためには（ニュートン理論での星に比べて）さらに大きな圧力が必要となる．$p \ll \rho$（下記参照）の星では，このことはほとんど影響しない．しかし，p が ρ と同じくらいの大きさになると，圧力の増大は自滅的となる．つまりどんな圧力勾配も星を支えきれなくなり，重力崩壊せざるをえなくなる．この記述はもちろん多くの詳細な計算をはしょっているのだが，特殊相対論的な流体を考えるだけで，一般相対論が重力にもたらす根本的な変更を垣間みることができるのである．

p と ρ の相対的な大きさにふれておこう．1.14 節の練習問題 1 でみたようにふつうの状況では，$p \ll \rho$ である．事実，$p \approx \rho$ となるのは，非常に高密度の物質（中性子星）か，非常に高温のため粒子が光速に近い速度で運動している物質（“相対論的” ガス）についてのみである．

4.8 ガウスの法則

流体についての最後の課題は，式 (4.34) と式 (4.35) で微分形で表された保存則を積分で表示することである．3 次元のベクトル解析と同じで，発散の体積積分を表面積分に直すことをガウスの法則とよぶ．定理の証明は三次元の場合とまったく同じであるので，詳しく示すことはしないが，

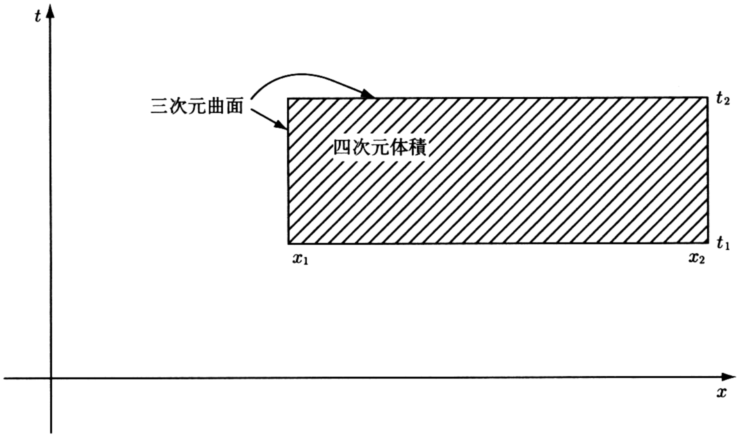


図 4.9 時空のある領域の境界

◆
$$\int V^{\alpha}{}_{,\alpha} \mathrm{d}^4 x = \oint V^{\alpha} n_{\alpha} \mathrm{d}^3 S \tag{4.57}$$

で，$\tilde{n}$ は 4.3 節ででてきた単位垂直一形式であり，$\mathrm{d}^3 S$ は四次元体積を囲む三次元超曲面の三次元体積を示す．ここで垂直というのは，三次元の場合と同じように**外向き**を意味している．図 4.9 に，式 (4.57) の意味を示すために簡単な体積を描いた．この体積は t, x, y, z 一定の 4 組の超曲面に囲まれている．簡単に描けるのは 2 次元なので，2 組のみを示した．t_2 面に垂直なのは $\tilde{\mathrm{d}}t$ である．t_1 面に垂直なのは $-\tilde{\mathrm{d}}t$ となる．“外向き” は明らかに時間の過去向きだからである．x_2 面に垂直なのは $\tilde{\mathrm{d}}x$ で，x_1 面に垂直なのは $-\tilde{\mathrm{d}}x$ である．したがって，式 (4.57) の表面積分は

$$\begin{aligned}&\int_{t_2} V^0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \int_{t_1} (-V^0) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &\quad + \int_{x_2} V^x \mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \int_{x_1} (-V^x) \mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &\quad + \text{境界のほかの面での同様な項}\end{aligned}$$

と表される．この式は

$$\int [V^0(t_2) - V^0(t_1)] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$+\int [V^x(x_2) - V^x(x_1)]\mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \cdots \tag{4.58}$$

と書き換えられる．ここで $\vec{V}$ として $\vec{N}$ をとると，$N^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0$ は上記の表現がゼロになることを意味し，そのことは，三次元体積の中の粒子数の変化（最初の積分）は，その境界を通しての流束（第二番目以降の項）によることで説明できる．エネルギー保存則についていえば，N^{α} を $T^{0\alpha}$ で置き換えて，$T^{0\alpha}{}_{,\alpha} = 0$ を使う．式 (4.58) と同じような説明ができるのは明らかである．ガウスの法則によって，エネルギー保存の積分表示が得られるのである．

4.9 文　献

連続体の力学と保存則については，Misner ら（1973）のような，たいていの一般相対論の教科書で扱われている．熱力学や流体力学の基礎が不十分な人には，それぞれ Fermi（1956）と Landau と Lifshitz（1959）という古典がある．次の 4.10 節の練習問題 25 を除くと，電磁気についてはほとんどふれないが，電磁場もストレス–エネルギーテンソルをもち，保存則が特にきれいに表現される．Landau と Lifshitz（1962）や Jackson（1975）を参照のこと．散逸のある相対論的流体については特有の困難があるが，詳しく研究する価値はある．Israel と Stewart（1980）参照．連続体の別のモデルは無衝突ガスであり，Andréasson (2005) に一般相対論でどのように扱うかが説明されている．

4.10 練 習 問 題

1 連続体近似が次の物理系に適用できるかどうかについて述べよ．

(a) 太陽系の惑星運動，(b) 火山の溶岩流，(c) ラッシュアワーの幹線道路の車の流れ，(d) 各道路に信号のある交差点での車の流れ，(e) プラズマの力学．

2 x 一定の面を横切る流束を“x 方向の流束”とよぶことが多い．ベクトルと一形式の知識を使って，流束についての述べ方としては不適当であることを説明せよ．

3 (a) ガリレイ的な運動量の概念が相対論的な概念と違って，系にどのように依存するかを説明せよ．

(b) 速度の小さいときに，相対論的な定義はガリレイ的な定義とほぼ同じであるのに，どのようにしてこんなことが可能なのか？（**ガリレイ的な四元運動量を定義せよ.**）

4　四元速度が $\vec{U}_{\rm obs}$ である観測者の測定するダストの粒子数密度は $-\vec{N}\cdot\vec{U}_{\rm obs}$ であることを示せ.

5　式 (4.14) がテンソルを定義していることの証明を，この量が二つの変数に関して線形であることを示すことで完成せよ.

6　式 (4.19) をその前の式を使って導け.

7　式 (4.21) を導け.

8　(a) 式 (4.25) と式 (4.26) が

$$\tilde{\mathrm{d}}\rho-(\rho+p)\tilde{\mathrm{d}}n/n=nT\tilde{\mathrm{d}}S=n\tilde{\Delta}q$$

という一形式を使った式で書けることを議論せよ.

(b) 一形式 $\tilde{\Delta}q$ は勾配ではないこと，つまりどんな関数 q に対しても $\tilde{\mathrm{d}}q$ ではないことを示せ.

9　α が空間を表す添字のとき式 (4.34) はニュートンの第二法則となることを示せ.

10　式 (4.35) で $|v|\ll 1$ の極限を考えると

$$\partial n/\partial t+\partial(nv^i)/\partial x^i=0$$

となることを示せ.

11　(a) 空間軸の回転では行列 δ^{ij} は変化しないことを示せ.

(b) この性質をもつ行列は δ^{ij} に定数を掛けたもののみであることを示せ.

12　式 (4.36) から式 (4.37) を導け.

13　式 (4.44) の変形ができることを説明せよ.

14　式 (4.46) が MCR 系での式 (4.45) の時間成分であることを議論せよ.

15　式 (4.47) から式 (4.48) を導け.

16　MCR 系では，$U^i=0$ である．しかし，$U^i{}_{,\beta}=0$ とできないのはなぜか?

17　$a^\mu=U^\mu{}_{,\beta}U^\beta$ と定義した．非相対論的極限（速度の小さい極限）をとって，

$$a^i=\dot{v}^i+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)v^i=\mathrm{D}v^i/\mathrm{D}t$$

であることを示せ．ここで演算子 D/Dt は，流体力学でふつうに使われる “ラグランジュ” 微分または “物質” 微分である.

18　$-\nabla p$ が MCR 系で流体要素の単位体積に作用する正味の力であることを示して，4.6 節の最後の議論を精密化せよ.

19　式 (4.58) がガウスの法則［式 (4.57)］を証明するのに使えることを示せ.

20　(a) 粒子数が保存しないで，MCR 系で単位時間・単位体積あたり ε の割合で局

所的に生成されるとしたら，保存則の式 (4.35) は

$$N^{\alpha}{}_{,\alpha} = \varepsilon$$

となることを示せ．

(b) (a) を一般化して物体のエネルギー運動量が保存しない（たとえば，物体が外界と相互作用するため）とき，

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = F^{\alpha}$$

で定義される四元ベクトルの相対論的な力 F^{α} がある．MCR 系で F^{α} の成分について説明せよ．

21 慣性系 $\mathcal{O}$ で次の系のストレス–エネルギーテンソルの成分を計算せよ．

(a) $\mathcal{O}$ で見て同じ速度 $\boldsymbol{v} = \beta \boldsymbol{e}_x$ で運動している粒子の集団．粒子の共動系でみてこれらの粒子の静止質量密度を ρ_0 とする．連続体として扱うために十分に高い密度だと仮定してよい．

(b) N 個の同じ質量 m の粒子が，x–y 面内で $\mathcal{O}$ の原点を中心として，角速度 ω で半径 a の円周を反時計まわりに運動している円環．この円環は断面が半径 $\delta a \ll a$ の円形のドーナツ型で，その内部では粒子は一様で，連続体近似が成り立つ程度に密に分布している．それらの粒子を軌道運動させている力のストレス–エネルギーを含めないこと．(計算の途中で，(a) の ρ_0 を $N, a, \omega, \delta a$ で表すことになる．)

(c) そのような円環が二つあり，それらの半径は同じ a で，一つは時計まわりで，もう一つは反時計まわりに回転している場合．粒子は衝突やほかの相互作用をしないとする．

22 多くの物理系は，衝突のない粒子の集団として，理想化して考えることができる (たとえば，黒体輻射，希薄プラズマ，銀河や球状星団)．そうした系では各点ごとに，ランダムな速度分布をしていて，MCR 系では方向の優位性がないと仮定して，ストレス–エネルギーテンソルが完全流体のものであることを示せ．すべての粒子が同じ速度 v と質量 m をもつとして，p と ρ を m，v，n の関数として表せ．光子ガスでは $p = \rho/3$ であることを示せ．

23 式 $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ を使って，閉じた系（空間の閉じた領域の外部では $T^{\mu\nu} = 0$ となる系をいう）で次の量を計算せよ．

(a) $\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int T^{0\alpha}\mathrm{d}^3x = 0$（エネルギー運動量保存）

(b) $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\displaystyle\int T^{00}x^i x^j \mathrm{d}^3x = 2\int T^{ij}\mathrm{d}^3x$（テンソルビリアル定理）

(c) $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\displaystyle\int T^{00}(x^i x_i)^2 \mathrm{d}^3x = 4\int T^i{}_i x^j x_j \mathrm{d}^3x + 8\int T^{ij} x_i x_j \mathrm{d}^3x$

24　天体の明るさの観測とは，天体から出た輻射の流束 T^{0i} を地球で測定することである．この問題は流束が天体と地球の相対速度にどのように依存するかをしらべるものである．

(a) 一定の光度 L (1 秒あたりの全エネルギー) をもつ星の静止系 $\mathcal{O}$ で，事象 $(t,x,0,0)$ でのその星からの輻射のストレス–エネルギーテンソルの成分は，$T^{00}=T^{0x}=T^{x0}=T^{xx}=L/(4\pi x^2)$ であることを示せ．星は原点に静止している．

(b) $\vec{X}$ が輻射の放出と受信の事象をつなぐヌルベクトルだとする．事象点 $(x,x,0,0)$ で観測された輻射については $\vec{X} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (x,x,0,0)$ であることを示せ．(a) のストレス–エネルギーテンソルは，系に依存しない表現

$$\mathbf{T} = \frac{L}{4\pi}\frac{\vec{X}\otimes\vec{X}}{(\vec{U}_s\cdot\vec{X})^4}$$

をもつことを示せ．ここで，$\vec{U}_s$ は星の四元速度で，$\vec{U}_s \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (1,0,0,0)$ である．

(c) 星から速度 v で x 方向に遠ざかっている地球に固定された観測者 $\bar{\mathcal{O}}$ が，同じく $\bar{x}$ 軸にある星について，同じ輻射を測定するとする．$\vec{X} \to (R,R,0,0)$ として，R を x の関数として求めよ．また $T^{\bar{0}\bar{x}}$ を R を使って表せ．R と $T^{\bar{0}\bar{x}}$ の v 依存性について説明せよ．

25　特殊相対論における電磁気学（この問題は何らかの形でマクスウェル方程式を知っている人のみを対象としている.）真空中の電場 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ に対するマクスウェル方程式は，3 次元のベクトル記号で書くと

$$\begin{aligned} &\nabla\times\boldsymbol{B}-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}=4\pi\boldsymbol{J}\\ &\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}=0\\ &\nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho\\ &\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \end{aligned} \tag{4.59}$$

である．単位系は $\mu_0=\varepsilon_0=c=1$ である．(ここで，ρ は電荷密度で，$\boldsymbol{J}$ は電流密度である.)

(a) **反対称の** $\binom{2}{0}$ テンソル $\mathbf{F}$ を時空中で式 $F^{0i}=E^i\,(i=1,2,3)$，$F^{xy}=B^z$，$F^{yz}=B^x$，$F^{zx}=B^y$ によって定義することができる．この定義からこの系での他の成分 $F^{\mu\nu}$ をすべて求め，行列の形で表せ．

(b) z 軸のまわりの角度 θ の回転は一種のローレンツ変換で，行列

$$A^{\beta'}{}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で表される．**F** の新しい成分

$$F^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\mu}\Lambda^{\beta'}{}_{\nu}F^{\mu\nu}$$

が新しい電場と磁場の三次元ベクトル成分を定義し［(a) で与えた規則に従って］，それらが古い **E** と **B** を三次元空間で回転したとき得られる成分と同じであることを示せ．（このことは **F** が空間回転することによって，**E** と **B** が空間回転することを示している．）

(c) 電流四元ベクトル $\vec{J}$ を $J^0 = \rho$，$J^i = (\mathbf{J})^i$ で定義するとき，マクスウェル方程式の二つの式は

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 4\pi J^{\mu} \tag{4.60}$$

となることを示せ．

(d) 残りのマクスウェル方程式は

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0 \tag{4.61}$$

であることを示せ．この式には **4 個の**独立な式しか含まれないことに**注意**せよ．すなわち，一つの添字をたとえば 0 に選んだとする．すると，残りの三つの値 $(1,2,3)$ を μ, ν, λ に**任意**の順序で割り当てると，（全体の符号を別として）そのたびごとに同じ式が得られる．実際に試してみること．これは $F_{\mu\nu}$ の反対称性のためである．

(e) こうしてマクスウェル方程式をテンソル形式で表した．電荷の保存 $J^{\mu}{}_{,\mu} = 0$［粒子数流束ベクトル $\vec{N}$ に対しての類似の式 (4.35) を思い起すとよい］は式 (4.60) で保証されることを示せ．（ヒント：$F_{\mu\nu}$ の反対称性を使え．）

(f) どの系でも電荷密度は J^0 である．したがって，時空の全電荷は $Q = \int J^0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ である．ここで積分範囲は $t =$ 一定の超曲面全体である．この超曲面の単位垂直を $\tilde{\mathrm{d}}t = \tilde{n}$ で定義すると，

$$Q = \int J^{\alpha} n_{\alpha} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{4.62}$$

となることを示せ．

(g) ガウスの法則と式 (4.60) を使って，$t =$ 一定の超曲面の中の任意の閉じた二次元曲面 $\mathscr{S}$ の内部の全電荷は $\mathscr{S}$ 全体にわたって積分をして，

$$Q = \oint_{\mathscr{S}} F^{0i} n_i \mathrm{d}\mathscr{S} = \oint_{\mathscr{S}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}\mathscr{S}$$

で求めることができることを示せ．ここで n は超曲面の中の $\mathscr{S}$ の単位垂直である．[前問の (f) の $\tilde{n}$ とは同じではない．]

(h) 上記 (a) で使った系に対して x 方向に速度 v で運動している系 $\overline{\mathscr{O}}$ へ $F^{\mu\nu}$ をローレンツ変換せよ．この系において，(a) と同じようなやり方で，三次元ベクトル $\overline{\mathbf{E}}$ を成分 $\overline{E}^{i} = F^{\bar{0}\bar{i}}$ で，また $\overline{\mathbf{B}}$ も同様な成分で定義せよ．そして $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ がローレンツ変換でどうふるまうかをしらべよ．それらは混じり合ってしまう．こうして $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ 自身はローレンツ不変ではなく，ファラデー・テンソルという $\mathbf{F}$ の成分でしかなく，相対論で電磁場の不変な表現はこのファラデー・テンソルであることになる．注意深く考えれば，物理的にそれらの量が不変では**ありえない**ことがわかる．特に，磁場は運動する電荷によってつくられるが，一つの系で動いている電荷は，ほかの系では静止していることがあり，ある系で存在する磁場が他の系では存在しなくなる．**すべての**系で同じなのはファラデー・テンソルであり，その成分のみが変換されるのである．

5

曲率の導入

5.1 重力と曲率の関係

今までわれわれは特殊相対論を議論してきた．特殊相対論では，力は目立った役割を果さず，重力を力として導入しなかった．特殊相対論の構成要素の一つは時空全体を満たす慣性系の存在である．時空の全体は一つの系で記述され，そのすべての座標点はつねに原点に対して静止しており，各点での時計は原点の時計と同じ割合で進む．基本的な仮説から間隔 Δs^2 の概念が導かれ，それがある物理的な記述に不変な幾何学的意味を与える．たとえば，二つの事象の時間的間隔は，その二つの事象を通る時計が測る時間であり，二つの事象の空間的間隔は，それらが同時にみえる系でそれらを結ぶ棒の長さである，間隔を計算する数学的手段はメトリックであり，特殊相対論のメトリックは，こうして棒の長さと時計の読みによって物理的に定義される．これが特殊相対論の威力であり，テンソル記法（たとえば，"粒子数密度" や "流束" における $\vec{N}$ での置き換え）の美しさと簡潔さの一つの理由である．次のようにすれば，ある座標系を使って，考えようとするすべての事象と世界線を書きこんだ一枚の紙の上で，任意のメトリックを定義することがつねに可能である．すなわち，ある任意に選んだ座標の関数の集合としてその成分 $g_{\alpha\beta}$ を与えればよい．しかしこの任意のメトリックは，物理的な計算を行うには有用ではないだろう．$\eta_{\alpha\beta}$ の有用性は，それと実験との密接な関係にあり，われわれの $\eta_{\alpha\beta}$ の導出は，実験に

強く依存している．

この実験との緊密性は，もちろん理論の試金石になりうる．$\eta_{\alpha\beta}$ は，棒と時計についてある予言をするから，その正当性を確かめることができる．特に，すべての時計が同じ割合で進むような系をつくることができるのだろうか？　これは特殊相対論と重力場に関しての決定的な質問であり，非一様な重力場内では実験によるその答は，ノーであることが示される．この意味で，重力場は，一つの**大域的**な慣性系をつくることができるという特殊相対論と矛盾する．時空の小さな領域（重力の非一様性が小さくて測定できないほど十分狭い領域）では，つねに“局所的”な特殊相対論的系がつくられることをみるだろう．この意味で，局所的な特殊相対論をより一般的な理論につくりあげなくてはならない．その第一歩は，重力場の中では，時計は同じ割合で進まないことを証明することである．

重力赤方偏移の実験　Einstein によって最初に示唆された理想化された実験を行うことを考えよう．(i) 図 5.1 のような地表から高さ h の塔を建てる．その頂上に静止質量 m の粒子を置く．(ii) この粒子をそこから加速度 g で自由落

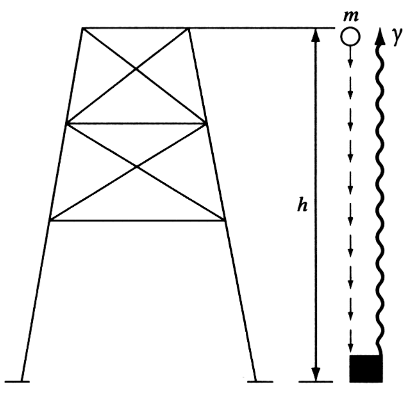


図 5.1　質量 m が高さ h の塔から落される．一番下での全質量はエネルギーに変えられ，光子として頂上へもどされる．光子がさかのぼるとき，落下するさいに質量が得たエネルギーを失わなければ永久運動となる．したがって質量場をさかのぼるさいに光は赤方偏移する．

下させる．それは，速度 $v=(2gh)^{1/2}$ で地面にとどく．したがって，地面にいる実験家の測るその全エネルギー E は，$m+\frac{1}{2}mv^2+O(v^4)=m+mgh+O(v^4)$ である．(iii) 地面にいる実験家はこの全エネルギーを何らかのうまい方法で同じエネルギーの一つの光子に変え，それを上方に打ち上げる．（ちょうどゴムまりが跳ね返るときのように，地球は光子の運動量を吸収するが，そのエネルギーは吸収しないのでこのような過程は保存則を破らない．このような“手品的なやり方”に納得できない人は，エネルギーの一部 ε だけが光子に変ったとき，どのようにこの議論が進むか検討せよ.）(iv) エネルギー E' で塔の頂上に光子がとどいたとき，またその光子を手品師的に静止質量 $m'=E'$ の粒子に変える．そのとき $m'=m$ でなければならない．そうでなければ，このような実験をすることにより得られるエネルギー増加分を使うことによって永久機関がつくられる．ところが永久機関がありえないことから $E'=m$，あるいは光子に対して

◆
$$\frac{E'}{E}=\frac{h\nu'}{h\nu}=\frac{m}{m+mgh+O(v^4)}=1-gh+O(v^4) \qquad (5.1)$$

が予言される．地球の重力場をさかのぼる光子はそのエネルギーを失い（驚くには当たらず），その結果，波長がのびる（赤方偏移する）．

われわれの思考実験は実行するには理想化されすぎているが，式 (5.1) によって予言された赤方偏移を直接，測定することは可能である．これは，Pound と Rebka（1960）により最初になされ，Pound と Snider（1965）により精度があげられた．その実験では，距離 $h=22.5\,\mathrm{m}$ をさかのぼる光子がつくりだす差 $\nu'-\nu$ を高精度で測定するため，メスバウアー効果が用いられた．その結果，式 (5.1) は約 1％ の誤差で確かめられた．

1960 年から 1990 年に至る時代の技術の進歩によって，重力赤方偏移は日常とかけ離れたきわめて小さな補正項的な存在から，社会的に重要な位置を占める効果へと変化してきた．それは，GPS の位置誘導システムにおいて，重力赤方偏移の効果を考慮しなければ精度を数分以下にすることができなくなってきたからである．GPS では軌道衛星に載せた高精度の原子時計のネットワークを使用しており，地上の装置による誘導には 5 機以上の衛星から受け取る時刻の信号を利用するのである．以下で説明するように，重力赤方偏移の意味することは，地上を離れた高い位置での時間の進み方は，地球表面での時間の進み方

に比べて，ほんの少しだけ速いというものである．このことを考慮しなければ，地上の観測者が受け取る時刻が正しくなくなることになる．GPS が正しく運用されること自体が重力赤方偏移のきわめて高い精度での検証になっているのである．相対論と GPS の詳細な議論は Ashby（2003）を参照．

この重力赤方偏移の実験的検証はエネルギー保存の観点と矛盾しない．しかし，それは次にみるように重力の簡単な特殊相対論的理論を見つけるという可能性に対しては致命的打撃である．

地上で静止したローレンツ系が存在しないこと　もし特殊相対論が重力場内でも正しいとすれば，地上に静止した“実験室”系が，ローレンツ系であると仮定するのは自然だろう．Schild（1967）による次の議論から，この仮定が誤りであることが容易に示される．図 5.2 において，この仮想的な系の時空図を描いた．ここで空間の一次元だけを横軸に書いてある．光を波と考え，パウンド–レブカ–スナイダーの実験における，二つの引き続く波の“波頭”が塔の頂上にのぼる様子をみてみよう．塔の底と頂上は静止しているから，この図では二つの縦線として描かれる．光は波線として示され，わざと適当に曲げて描いてある．これは，重力が未知の仕方で光に影響を与え，ヌル経路からずれる可能性を許すためである．しかし光がどんなに重力によって影響されたとしても，重力場がある時刻と別の時刻で変らないことから，その効果は両方の光に対してまったく同じでなければならない．したがって二つの波頭の経路は平行移動すれば一致し，ミンコフスキー幾何学を仮定すると，$\Delta t_{\mathrm{top}} = \Delta t_{\mathrm{bottom}}$ が結論される．一方，二つの波頭間の時間は，測定される振動数の逆数 $\Delta t = 1/\nu$ である．パウンド–レブカ–スナイダーの実験から $\nu_{\mathrm{bottom}} > \nu_{\mathrm{top}}$ が確立されているので，$\Delta t_{\mathrm{top}} > \Delta t_{\mathrm{bottom}}$ がわかる．こうしてミンコフスキー幾何学からの結論は誤りであり，地上に静止している基準系はローレンツ系ではない．

このことは特殊相対論の最期であろうか?　完全にはそうではない．われわれは，地球上に静止したローレンツ系が慣性系でないことを示したにすぎない．どんな慣性系も存在しないことは示していない．実際，ある限られた意味で慣性系であるような系が存在する．次のところでそれを見つけるためにもう一つの物理的な議論を用いる．

等価原理　慣性系の一つの重要な性質は，そのなかで静止している粒子は

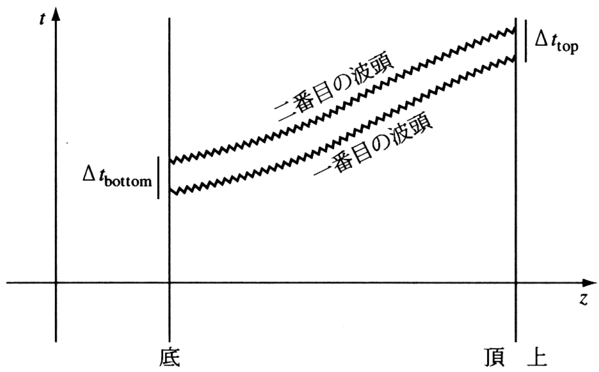


図 5.2 時間的に変化しない重力場では，電磁波の引き続く二つの“波頭”は同一の経路を運動しなければならない．赤方偏移［(式 5.1)］のため，頂上でのそれらの間の時間間隔は，底での間隔よりも長くなる．したがって頂上での観測者は，底にある時計がゆっくり進むように“みる”．

力が働かない限り，静止し続けることである．このことを利用するためには，力とは何かということを明確にしなくてはならない．ふつう重力は力と見なされるが，Galileo がピサの斜塔の有名な実験で示したように，次の点であらゆる他の力とはきわだって異なっている．つまり，すべての同じ初速度をもった物体は，その内部の組成の違いによらず重力場内で同じ軌跡を描く．一方，他のすべての力では，ある物体は影響を受けるが，他の物体は影響を受けない．たとえば電磁気力は荷電物体に影響するが，電気的に中性の物体には影響を与えず，荷電粒子の軌跡はその質量と電荷の比によっており，すべての粒子に対して同じではない．同様に物理学における他の二つの基本的な力（いわゆる“強い”相互作用と“弱い”相互作用）も異なった粒子に異なった仕方で働く．それらのすべての力に対して，つねに力によって影響されない粒子の軌跡を実験的に決めることができる．すなわち，ある慣性系で静止し続ける粒子を見つけることができる．しかし重力に対しては，このことは成立しない．地上で静止している慣性系を定義するという試みは無意味である．なぜなら，どんな自由粒子（光子でさえ）も慣性系の物理的な“目印”になりえないからである．

しかし粒子が一様な速度で運動し続けるという系は存在する．重力場内で自

由に落下している系がそうである．この系は自由粒子（少なくともニュートンの重力法則が成り立つような低速度の粒子）と同じ割合で加速されているから，すべての自由粒子はこの系に対して一様な速度をもつことが導かれる．この系は，少なくとも慣性系の一つの候補である．次の節で光子はこの系で赤方偏移を受けないことを示す．このことはこの系をよりいっそう都合のよい候補にする．Einstein はこのような系が慣性系であるという仮説をとることによって一般相対論をつくりあげた．

自由落下系が慣性系であるというわれわれの議論は，たぶん逆にいったほうが読者にとってはなじみやすいだろう．重力のない真空の空間で，一様に加速している宇宙船を考える．船の中の観測者からみれば，そのなかに重力があるようにみえる．物体は船の後方にその内部組成にかかわらず同じ加速度で落ちていく[1]．さらに船に対して止っている物体は船とともに加速させ続けるために必要な力に等しい“重さ”をもつ．“現実の”重力のように，この力は物体の質量に比例する．本当の慣性系は，粒子と同じ加速度で船の後方に自由落下している系である．このことから，一様な重力場は慣性系に対して一様に加速している系に等価であることがわかる．これが重力と加速度の間の**等価原理**であり，アインシュタイン理論の基礎である．Galileo と Newton はそのことを表現するのに別の言葉を用いただろうが，等価原理はニュートン重力の基本の一つである．

より現代的な言葉では，いま述べたことは**弱い等価原理**とよばれる．ここで「弱い」というのは，重力の作用を受けたとき，その物体がどうふるまうかを考える立場だからである．Einstein には，重力の完全な理論をつくり出そうとするとき，等価原理を物理学の他の法則の中に取り入れなくてはならないことがわかっていた．現在われわれがアインシュタインの等価原理とよんでいるのは，自然界の他の力が重力場中でどのようにふるまうかを知る方法があるということである．具体的にいえば，物理法則を記述する微分方程式が，自由落下系では，特殊相対論における場合，つまり重力の作用していない場合と同じ形になるという仮定のことである．われわれはこの強い形での等価原理を第 7 章で使

---

1)　これはいわゆるエトベッシュの実験で，非常な高精度で実験的に確かめられている．Dicke (1964) を参照せよ．

用する．

自由落下系が光子に対してさえ慣性系であることの証明にもどる前に，二つの重要な注意をしておかなければならない．第一にわれわれの議論は局所的にのみ正しいということだ．それは地球の重力場は一様ではないから，ある特定の自由落下系で，その中心からある距離だけ離れた粒子は一様な速度にとどまっていない．このことは以下で詳しく議論する．第二に任意の点で無限に多くの自由落下系が存在する．それらは違った速度と違った空間軸の方向をもつが，すべて地球に対して同じ加速度をもつ．

再び赤方偏移の実験　パウンド–レブカ–スナイダーの実験について違った見方をしてみよう．この実験を自由落下系でみてみる．自由落下系は少なくとも慣性系のいくつかの特徴を備えていることはみてきた．光子が上向きに発射されたときに静止していて，その後に自由に落下する系を考える．光子は距離 h を登るから，頂上につくまでに時間 $\Delta t = h$ を要する．この時間に，系は実験装置に対して下向きに速度 gh を得る．したがって自由落下系に対する光子の振動数は赤方偏移の公式から次のように得られる．

$$\frac{\nu(\text{自由落下})}{\nu'(\text{頂上での装置})} = \frac{1+gh}{\sqrt{1-g^2h^2}} = 1 + gh + O(v^4) \tag{5.2}$$

式 (5.1) を使って，［式 (5.1) を導いたときのように］高次の項を無視すれば，ν(底で発射された光子) $= \nu$(自由落下系で光子が頂上についたとき) が得られる．したがって自由落下系で赤方偏移は起らない．これは自由落下系が慣性系であるという仮説に堅固な基礎を与える．

局所慣性系　上の議論から，重力赤方偏移の実際は特殊相対論と重力との両立をさまたげるものではないことが示唆される．地上に静止した系は慣性系ではなく，自由落下系（そこでは赤方偏移がなく，図 5.2 からは何の矛盾も生れない）が本当の慣性系であることを単に受け入れなければならないのだろう．残念ながら地上の違った場所での自由落下系は違った方向に落下するという簡単な理由のため，このことは特殊相対論を完全に救うことにならない．すなわち地球の重力場の中で至るところ自由に落下し，さらにその座標点間の距離が時間的に一定であるという意味で剛体的で単一の大域的な系は存在しない．**大域的な慣性系をつくることは不可能であり**，したがって，たかだかわれわれに

できることは**局所的な**慣性系をつくることである．次にこの系について述べる．

地球の重力場の中で自由落下している系を考える．特殊相対論での慣性系は時空の全体を覆うが，この自由落下系はあまり水平方向に広がっていると垂直に落下しないから，慣性系ではない．図 5.3 で，この系は B で自由落下しているが，A と C ではテスト粒子の軌道上を運動しない．さらに重力の加速度は高さとともに変るから，あまり垂直方向に広がっていると慣性系にとどまっていられない．もしそれが，ある高さで粒子とともに落下していたとすると，別の高さではそうならない．最後にこの系は時間的にもあまり広がりをもってはいけない．というのは落下するにつれ，系が地球に近づくために上で述べた両方の制限が，もっときつくなるからである．これらの制限のすべては重力場の非一様性によるものである．非一様性が無視できる限りにおいて，自由落下系は慣性系と見なすことができる．**どんな**重力場も時間と空間の十分小さな領域にわたっては一様と見なすことができる．したがっていつも**局所**慣性系をつくることができる．それらは流体の瞬時的共動座標系（MCR 系）に類似したものである．この場合，系は小さな領域と短い時間でだけ慣性系である．どのくらい小さいかは，(a) 重力場の非一様性の大きさと，(b) 系の非慣性的な性格を検出するのに用いる実験装置の感度による．原理的には，**どんな**非一様性も検出可能だから，系は無限に小さな領域でのみ数学的に慣性系であると見なされる．しかし現在の技術では地表近くで自由落下している系は高い精度で慣性系であると見なすことができる．このことは後の章でもっと量的に考える．ここでは，重力のどんな理論も**局所慣性系**，すなわち一点において特殊相対論の慣性系であるような系をもたなければならないということを強調しておく．

潮汐力　重力場の非一様性は潮の満干を起すので，潮汐力とよばれる．（もし地球が一様な重力場中にあれば，自由落下し，潮の満干は起らない．月と太陽の重力場の地球の直径にわたる**違い**によって潮の満干が起る．）この潮汐力が大域的な慣性系をつくることを阻んでいる．したがって，この力こそ一般相対論における重力の根本的な現れであると見なされる．

曲率の役割　自由粒子の世界線は，慣性系がつくれるかどうかを決める役割を担っている．特殊相対論では，お互いに平行に動き始めた二つの自由粒子の世界線は，どんなにいっても平行のままにとどまっている．これはまさにユー

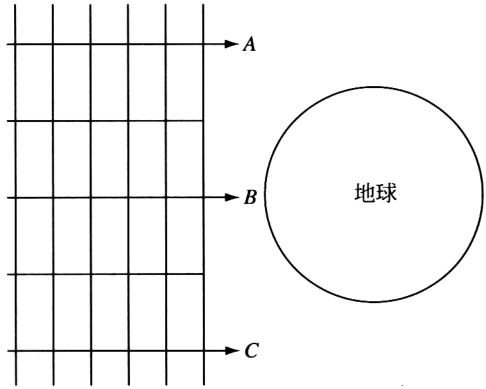


図 5.3 剛体的な系は地球の場の中では剛体的なままでは自由落下できない

クリッド幾何学での直線のもつ性質である．したがって，時空の**幾何学**を自由粒子の世界線によって定義されるものとして議論することはもっともらしい．幾何学の言葉では，ミンコフスキー空間は，ユークリッドの平行線の公理に従うから，**平坦**な空間である．しかしそのメトリックはユークリッド空間のそれではないから，ユークリッド空間ではない．光子は固有長さゼロのまっすぐな世界線上を動く．したがって特殊相対論は，平坦な非ユークリッド幾何学に従う．

非一様な重力場では，平行に動き始めた二つの近接した粒子の世界線は，一般に平行にとどまっていない．したがって，重力のある時空は平坦ではない．ユークリッド幾何学で平行線の公理を落すと，曲った空間が得られる．たとえば，球の表面は曲っている．球面上での局所的な直線をのばしていくと大円になり，二つの大円は必ず交わる．それにもかかわらず，任意の点に十分近い範囲では，幾何学は平坦であると見なすことができる．一つの街の地図は，平らな一枚の紙の上に大きなひずみなしに表すことができる．同じことを地球全体についてしようとすれば完全に失敗する．球はこのように局所的に平坦である．このことは，すべてのいわゆるリーマン空間[2]について成立する．それらはすべて局所的に平坦であるが，はじめ平行にある局所的な直線群（**測地線**とよば

2) B. Riemann（1286〜1866）はユークリッドの平行線の公理を落した結果の詳しい研究を発表した最初の人である．

れる）はふつう平行にとどまっていない．

Einstein の大きな功績は，リーマン空間と重力の物理との類似性に気づいたことであった．彼は自由に落下している粒子の軌跡が，曲った幾何学の測地線であると見なした．時空は局所慣性系をもち，その上では自由粒子の軌跡は直線であるが，大域的には，それらは平行にとどまっていない．したがって，それらの軌跡は局所的にのみ直線である．

われわれは Einstein に従って，曲った時空を用いて粒子の軌跡に与える重力の効果を表すような重力理論を探していこう．このためには明らかに曲率の数学を学ばなければならない．これを最も簡単に導入するには，われわれの直観がものをいう平坦な空間で，曲線座標系を研究すればよい．この方法によってわれわれが必要とするほとんどすべての数学的概念が展開され，曲った空間へたどりつくのを簡単にするだろう．したがって，この章の残りでユークリッド平面について考える．（しばらくの間）特殊相対論も，不定正値の内積も考えない．この章でわれわれが求めようとしているのは，メトリックではなく，平行性である．このアプローチは，極座標での ∇^2 の表現のような奇妙な公式のよりわかりやすい導出を与えるという余得もある！

5.2　極座標でのテンソル代数

ユークリッド平面を考える．通常の座標は，x と y であるが，極座標 $\{r,\theta\}$ がしばしば便利である．

$$\left.\begin{aligned} r &= (x^2+y^2)^{1/2}, \qquad & x &= r\cos\theta \\ \theta &= \arctan\frac{y}{x}, \qquad & y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

小さな増分 Δr と $\Delta\theta$ は，次式により Δx と Δy に比例する．

$$\left.\begin{aligned} \Delta r &= \frac{x}{r}\Delta x + \frac{y}{r}\Delta y = \cos\theta\Delta x + \sin\theta\Delta y \\ \Delta\theta &= -\frac{y}{r^2}\Delta x + \frac{x}{r^2}\Delta y = -\frac{1}{r}\sin\theta\Delta x + \frac{1}{r}\cos\theta\Delta y \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

この式は 1 次のオーダーまで正しい．

他の座標系を使うことも可能である．一般の座標系を，ξ と η と書こう．

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi(x,y), \qquad \Delta\xi = \frac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\xi}{\partial y}\Delta y \\ \eta &= \eta(x,y), \qquad \Delta\eta = \frac{\partial\eta}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\eta}{\partial y}\Delta y \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

(ξ,η) が，質のよい座標であるためには，任意の二つの違った点 (x_1,y_1) と (x_2,y_2) が，式 (5.5) によって違ったペア (ξ_1,η_1) と (ξ_2,η_2) に対応させられる必要がある．たとえば，$\xi = x$, $\eta = 1$ という定義では，違った 2 点 $(x = 1,\ y = 2)$, $(x = 1,\ y = 3)$ はともに $(\xi = 1,\ \eta = 1)$ となるから，質のよい座標ではない．数学的には，式 (5.5) で $\Delta\xi = \Delta\eta = 0$ なら，同一の点，すなわち，$\Delta x = \Delta y = 0$ でなければならないことを意味する．これは式 (5.5) の行列式が 0 でなければよい．

$$\det\begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{pmatrix} \neq 0 \tag{5.6}$$

この行列式は座標変換（5.5）の**ヤコビアン**（Jacobian）とよばれる．もしヤコビアンが一点でゼロになるなら，変換はそこで**特異**であるという．

ベクトルと一形式　ベクトルを定義する古い方法は，それが**任意の**座標変換の下で，変位と同じように変換するとして決めることである．すなわち，ベクトル $\overrightarrow{\Delta r}$ [3] は $(\Delta x, \Delta y)$ なる変位，あるいは極座標では $(\Delta r, \Delta\theta)$，あるいは一般に $(\Delta\xi, \Delta\eta)$ と表される．すると**微小な** $(\Delta x, \Delta y)$ に対して，式 (5.5) から明らかに

$$\begin{pmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

したがって

$$(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}) = \begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

として変換の行列を定義すると，任意の $\vec{V}$ に対して特殊相対論のときと同様に変換を次のように書くことができる．

---

3)　ユークリッド平面でのベクトルを矢印で表し，ギリシャ文字を添字（1 と 2 という番号に対する）として使って，和においてはすべての値（つまり，両方）をとることを明らかにする．

$$V^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\beta} V^{\beta} \tag{5.9}$$

ここでプライムのついていない添字は (x, y) を，プライムがついている添字は (ξ, η) を表す．また添字は，値 1 と 2 しかとることができない．ベクトルは，その成分が式 (5.9) に従って変換するようなものと定義することができる．しかしながら，もっと自然で洗練された方法がある．それが現代的な方法で，今からそれを導入しよう．

スカラー場 ϕ を考える．座標 (ξ, η) が与えられると，つねにその微分 $\partial\phi/\partial\xi$, $\partial\phi/\partial\eta$ をつくることができる．そこで一形式 $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ をその成分が，(ξ, η) 座標で

$$\tilde{\mathrm{d}}\phi \to (\partial\phi/\partial\xi,\ \partial\phi/\partial\eta) \tag{5.10}$$

なる幾何学的な対象として**定義**する．これによって無限の一形式が一般的に定義され，そのおのおのの一形式は別々のスカラー場からつくられる．成分の変換は合成関数の偏微分の規則から自動的に出てくる．

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi} = \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{5.11}$$

$\partial\phi/\partial\eta$ に対しても同様にできる．これを表現するには行列を使って行ベクトルの変換を利用するのが便利であり

$$(\partial\phi/\partial\xi \quad \partial\phi/\partial\eta) = (\partial\phi/\partial x \quad \partial\phi/\partial y)\begin{pmatrix} \partial x/\partial\xi & \partial x/\partial\eta \\ \partial y/\partial\xi & \partial y/\partial\eta \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

となる．というのも，一形式の変換行列は式 (5.8) の類推から，(x, y) 座標を (ξ, η) 座標で微分した量による行列

$$(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\xi} & \dfrac{\partial x}{\partial\eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\xi} & \dfrac{\partial y}{\partial\eta} \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

だからである．この行列を使用すると，式 (5.12) の変換は

$$(\tilde{\mathrm{d}}\phi)_{\beta'} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}(\tilde{\mathrm{d}}\phi)_{\alpha} \tag{5.14}$$

と表される．行ベクトルが行列の先にくるように，この式の中にある和は変換

行列の第一番目の添字についてとられることに注意するとよい．

特殊相対論では，ローレンツ変換行列が対称であったために，われわれは行ベクトルを意識する必要がなかったのは面白いことである．しかしながら，一番単純な場合以外になると，一形式の成分は行ベクトルの要素であることを知っておく必要がある．とはいえ，添字が二つ以上あるテンソルを扱おうとすると，行列による表現は容易ではなくなる．一般相対論では，四つの添字や時には五つの添字をもったテンソルを扱う必要がでてくる．そのため通常は，式 (5.14) のように変換式を代数的に表現するので，読者は本書の以下の部分で行列表記に出会うことはほとんどないであろう．

この節でわかるのは，現代的な観点では，テンソル代数の基礎は一形式の定義にあるということである．**一つの**ベクトル $(\Delta x, \Delta y)$ を定義して，それからの類推でほかが得られる古い方法よりも，これはより自然である．そこでは，一形式の集合全体が微分でもって定義され，一形式の変換性は自動的に導かれる．

次にベクトルは，一形式から実数への線形関数として定義される．この意味は次の節で明らかにされる．まず，このやり方は特殊相対論でのときと同じであり，したがってベクトルは実際に変換則 (5.9) に従うことに注意しておこう．$(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta})$ と $(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'})$ がお互いの逆であることを具体的にみておくことは重要である．(われわれはここで転置行列 $(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'})$ を必要とする．これは特殊相対論でも現れるが，ローレンツ変換を表す行列は対称であり，その転置行列はもとの行列に等しいので区別する必要がなかった．一般の座標変換では，$(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'})$ は対称ではない．) 二つの行列の積は

$$\begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial x/\partial\xi & \partial x/\partial\eta \\ \partial y/\partial\xi & \partial y/\partial\eta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial\xi} + \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial\eta} + \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial\eta} \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial\xi} + \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial\eta} + \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial\eta} \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

合成関数の微分の規則と偏微分の定義から，この行列は次のようになる．

$$\begin{pmatrix} \partial\xi/\partial\xi & \partial\xi/\partial\eta \\ \partial\eta/\partial\xi & \partial\eta/\partial\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

曲線とベクトル　ふつうの曲線の概念は，平面上の連続した点の列である．われわれはこれを**経路**とよび，曲線という言葉をパラメーターをもった経路のためにとっておく．すなわちわれわれは現代的な数学の用語に従い，**曲線**を実軸のある区間から平面上の経路への写像として定義する．これは，曲線とはその上の各点に実数が附随している経路であることを意味する．この実数をパラメーター s という．すると各点は，s の関数として表される座標をもつ．

$$\text{◆}\quad \text{曲線}:\{\xi = f(s), \eta = g(s), a \leqslant s \leqslant b\} \tag{5.17}$$

これが平面上の曲線を定義する．もし（点を変えずに）パラメーターだけを，古い s の関数として $s' = s'(s)$ に変えたとすると，次式が得られる．

$$\{\xi = f'(s'), \eta = g'(s'), a' \leqslant s' \leqslant b'\} \tag{5.18}$$

ここで，f' と g' は**新しい**関数であり，$a' = s'(a)$，$b' = s'(b)$ である．この写像された**像**（それが通る平面上の点）は変っていないが，数学的にこれは**新しい**曲線である．したがって同じ経路をもつ無限の曲線が存在する．

スカラー場 ϕ の曲線に沿っての微分は，$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}s$ である．これは，s に依存する．したがって，パラメーターを変えると，その微分も変る．これを次のように書く．

$$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}s = \langle \tilde{\mathrm{d}}\phi, \vec{V}\rangle \tag{5.19}$$

ここで，$\vec{V}$ はその成分が $(\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}s, \mathrm{d}\eta/\mathrm{d}s)$ のベクトルである．このベクトルは曲線にのみ依存する．一方，$\tilde{\mathrm{d}}\phi$ は ϕ にのみ依存する．したがって，$\vec{V}$ は曲線を特徴づけるベクトルであり，**接**ベクトルとよばれる．（明らかにこのベクトルは曲線に接している．図 5.4 参照．）したがってベクトルは，ϕ が与えられたと

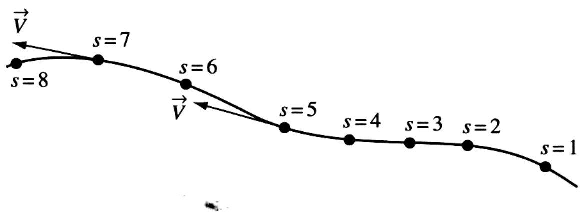


図 5.4　曲線とそのパラメーターとその接ベクトル

き，$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}s$ をつくりだすものと見なすことができる．これが現代的な観点で，曲線の接ベクトルは，$\mathrm{d}/\mathrm{d}s$ と**書かれる**べきものである．いくつかの相対論の教科書では，この記法が用いられている．しかしわれわれの目的のために，単に $\vec{V}$ をその成分が $(\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}s, \mathrm{d}\eta/\mathrm{d}s)$ であるような接ベクトルとしておこう．平面上の経路は，その各点でお互いに平行であるが，長さの違った無限の接ベクトルをもつことに注意せよ．それらは違ったパラメーターをもった**違った**曲線の接ベクトルと見なされる．したがって経路とパラメーターが与えられているから，曲線は**一意的な**接ベクトルをもつ．さらに一点で同じ接ベクトルをもつ曲線でさえ至るところで同じではない．テイラー展開 $\xi(s+1) \approx \xi(s) + \mathrm{d}\xi/\mathrm{d}s$ から，$\vec{V}(s)$ は近似的に曲線に沿って s から $s+1$ までのびていることがわかる．

座標変換の下で，s は変化しないが（その定義には，座標は何の関係もない），$\vec{V}$ の成分は合成関数の微分の規則に従って変化する．

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}\xi/\mathrm{d}s \\ \mathrm{d}\eta/\mathrm{d}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x/\mathrm{d}s \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}s \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

これは以前のベクトルに対する変換則（5.7）と同じである．

まとめると，現代的な観点とは，ベクトルはある曲線の**接線**であり，$\tilde{\mathrm{d}}\phi$ をその変数としてとったとき，$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}s$ を与えるような関数である．このことをいっておくと，極座標をもっと徹底的に考えることができる．

極座標基底一形式と極座標基底ベクトル．　座標の基底は明らかに次式に従う．

$$\vec{e}_{\alpha'} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\vec{e}_{\beta}$$

あるいは

$$\vec{e}_r = \Lambda^x{}_r\vec{e}_x + \Lambda^y{}_r\vec{e}_y \tag{5.21}$$

$$= \frac{\partial x}{\partial r}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\vec{e}_y$$

$$= \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y \tag{5.22}$$

同様に

$$\vec{e}_\theta = \frac{\partial x}{\partial\theta}\,\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial\theta}\,\vec{e}_y$$

$$= -r\sin\theta\,\vec{e}_x + r\cos\theta\,\vec{e}_y \tag{5.23}$$

ここで次の関係を用いたことに注意せよ．

$$\Lambda^x{}_r = \frac{\partial x}{\partial r} \tag{5.24}$$

同様に，逆の向きに変換するときには次式が必要になる．

$$\Lambda^r{}_x = \frac{\partial r}{\partial x} \tag{5.25}$$

変換行列はきわめて簡単である．単にどの添字が上付で，どれが下付かを憶えておけば，用いるべき正しい微分が得られる．

同様に基底一形式は

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{d}}\theta &= \frac{\partial\theta}{\partial x}\tilde{\mathrm{d}}x + \frac{\partial\theta}{\partial y}\tilde{\mathrm{d}}y \\ &= -\frac{1}{r}\sin\theta\,\tilde{\mathrm{d}}x + \frac{1}{r}\cos\theta\,\tilde{\mathrm{d}}y\end{aligned} \tag{5.26}$$

となる．［通常の解析学の式 (5.4) との類似に注意せよ．］同様にして

$$\tilde{\mathrm{d}}r = \cos\theta\,\tilde{\mathrm{d}}x + \sin\theta\,\tilde{\mathrm{d}}y \tag{5.27}$$

各点での基底を図に描くことができる（図 5.5）．基底ベクトルを描くことは問題なくできる．基底一形式は，$\tilde{\mathrm{d}}r$ と $\tilde{\mathrm{d}}\theta$ に対して，それぞれ $r=$ 一定，$\theta=$ 一定の面を示すことによって最も簡単に描かれる．これらの面は違った場所では違った方向をもっている．

ここで注意しておかねばならない大事なことがある．それは基底が一点から一点へと変っていくことだ．図 5.5 の点 A での基底ベクトルは，点 C でのそれと平行ではない．これは，それらが座標の増加する方向を向いているが，その方向は各点で異なるからである．さらに基底の大きさも一定ではない．たとえば，式 (5.23) から

$$|\vec{e}_\theta|^2 = \vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_\theta = r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2 \tag{5.28a}$$

したがって，$\vec{e}_\theta$ は原点から離れるほど，その長さが長くなる．そのわけは，r

と θ に関して成分 (0, 1) をもつ基底ベクトル $\vec{e}_\theta$ は，基本的には一単位，すなわち 1 ラジアンの θ 方向の変位だからである．このためには大きな距離では小さな距離でよりも，より長くなければならない．したがってわれわれは**単位**基底をもたない．次のことは容易に確かめられる．

$$|\vec{e}_r| = 1, \qquad |\tilde{\mathrm{d}}r| = 1, \qquad |\tilde{\mathrm{d}}\theta| = r^{-1} \tag{5.28b}$$

ある与えられたベクトルは，原点の近くでのほうが，遠くでよりも θ の大きな範囲を覆うから，$|\tilde{\mathrm{d}}\theta|$ は $r = 0$ の近くで大きくなる（より密集している）．

メトリックテンソル　上のドット積は，デカルト座標 x, y でのメトリックを知ることによって計算された：

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1, \qquad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$$

あるいはテンソル記法では

$$\mathbf{g}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \qquad (\text{デカルト座標}) \tag{5.29}$$

$\mathbf{g}$ の極座標での成分は何だろうか？　それは単に

$$g_{\alpha'\beta'} = \mathbf{g}(\vec{e}_{\alpha'}, \vec{e}_{\beta'}) = \vec{e}_{\alpha'} \cdot \vec{e}_{\beta'} \tag{5.30}$$

であり，あるいは式 (5.28) から

$$g_{rr} = 1, \qquad g_{\theta\theta} = r^2 \tag{5.31a}$$

そして式 (5.22) と式 (5.23) から

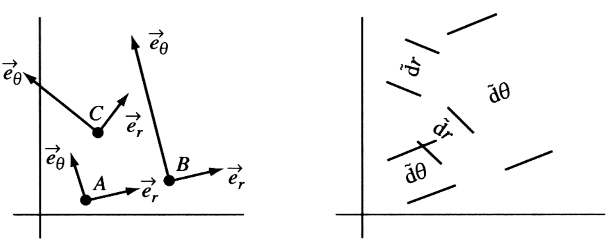


図 5.5　極座標に対する基底ベクトルと基底一形式

$$g_{r\theta} = 0 \tag{5.31b}$$

したがって，$\mathbf{g}$ の成分を次のように書くことができる．

$$(g_{\alpha\beta})_{polar} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \tag{5.32}$$

$\mathbf{g}$ の成分と座標を同時に示す便利な方法は，線要素を用いることである．これは，任意の“無限小”の変位 $\mathrm{d}\vec{l}$ の大きさのことである．

◆
$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{l}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}s^2 &= |\mathrm{d}r\vec{e}_r + \mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta|^2 \\ &= \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 \end{aligned} \tag{5.33}$$

ここでの $\mathrm{d}r$ と $\mathrm{d}\theta$ を一形式基底 $\tilde{\mathrm{d}}r$，$\tilde{\mathrm{d}}\theta$ と混同しないように，この式の中のものは，極座標での $\mathrm{d}\vec{l}$ の成分であり，“d” は単に “無限小 Δ” を意味するにすぎない．

式 (5.33) を導くもう一つの教育的な方法がある．一般の $\binom{0}{2}$ テンソルが，基底 $\binom{0}{2}$ テンソル $\tilde{\mathrm{d}}x^\alpha \otimes \tilde{\mathrm{d}}x^\beta$ の和として書かれた式 (3.26) を思い出そう．メトリックに対して，これは次のようになる．

$$\mathbf{g} = g_{\alpha\beta}\tilde{\mathrm{d}}x^\alpha \otimes \tilde{\mathrm{d}}x^\beta = \tilde{\mathrm{d}}r \otimes \tilde{\mathrm{d}}r + r^2\tilde{\mathrm{d}}\theta \otimes \tilde{\mathrm{d}}\theta$$

これは表面的に式 (5.33) に似ているが，違う式である．すなわちこれは作用素であって，その成分が $\mathrm{d}r$ と $\mathrm{d}\theta$ であるベクトル $\mathrm{d}\vec{l}$ に作用すると式 (5.33) が得られる．残念なことに，この二つの表現は，実質よりも似すぎている．これは，この分野での記法が，混乱して発達してきたためである．ほとんどの教科書や研究論文では，まだメトリックの成分を示すのに式 (5.33) の “旧式の” 形を使っている．われわれもそれに従っていく．

メトリックは，次の逆をもつ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix} \tag{5.34}$$

したがって，$g^{rr} = 1$，$g^{r\theta} = 0$，$g^{\theta\theta} = 1/r^2$．これから，一形式とベクトルの間の写像をつくることができる．たとえば，ϕ をスカラー場とし，$\tilde{\mathrm{d}}\phi$ をその勾

配とすると，ベクトル $\vec{\mathrm{d}}\phi$ は次の成分をもつ．

$$(\vec{\mathrm{d}}\phi)^{\alpha} = g^{\alpha\beta}\phi_{,\beta} \tag{5.35}$$

あるいは，

$$\begin{aligned}(\vec{\mathrm{d}}\phi)^{r} &= g^{r\beta}\phi_{,\beta} = g^{rr}\phi_{,r} + g^{r\theta}\phi_{,\theta}\\ &= \partial\phi/\partial r \end{aligned}\tag{5.36a}$$

$$\begin{aligned}(\vec{\mathrm{d}}\phi)^{\theta} &= g^{\theta r}\phi_{,r} + g^{\theta\theta}\phi_{,\theta}\\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\end{aligned}\tag{5.36b}$$

したがって，$(\phi_{,r},\ \phi_{,\theta})$ は一形式の成分であるが，そのベクトル勾配は成分 $(\phi_{,r},\ \phi_{,\theta}/r^2)$ をもつ．ユークリッド空間でさえ，一般にベクトルは，それに附随する一形式とは違った成分をもつ．デカルト座標は，それらの成分が一致する唯一の座標である．

5.3　極座標におけるテンソル解析

極座標の基底ベクトルが，至るところ一定でないということは，ベクトルを微分しようとするさいに，問題となってくる．たとえば，簡単なベクトル場 $\vec{e}_x$ を考えよう．これは，任意の点で一定のベクトル場である．極座標では，それは成分 $\vec{e}_x \to (\Lambda^{r}{}_{x}, \Lambda^{\theta}{}_{x}) = (\cos\theta,\ -r^{-1}\sin\theta)$ をもつ．$\vec{e}_x$ は一定にもかかわらず，これは明らかに一定ではない．その理由は，それらが一定でない基底上の成分だからである．もしその成分を，たとえば，θ に関して微分しても，$\partial\vec{e}_x/\partial\theta$ は決して得られない．それは恒等的にゼロでなければならないからである．この例から，ベクトルの成分を微分しても必ずしもベクトルの微分とならないことがわかる．一定でない基底ベクトルも微分しなければならないのである．これは曲った座標そして曲った空間を理解する鍵である．以下でこの考えを系統的にしていく．

基底ベクトルの微分　$\vec{e}_x$ と $\vec{e}_y$ は，一定のベクトル場であるから，容易に

$$\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r = \frac{\partial}{\partial r}(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y) = 0 \tag{5.37a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_r = \frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y)$$
$$= -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y = \frac{1}{r}\vec{e}_\theta \tag{5.37b}$$

これらは，図 5.6 に示したような簡単な幾何学的な意味をもつ．二つの近傍の点 A と B で，$\vec{e}_r$ はそれぞれ原点への方向と正反対の方向を向いているから，少しだけ違った方向にある．$\vec{e}_r$ の θ に関する微分は A と B での $\vec{e}_r$ の差を $\Delta\theta$ で割ったものにすぎない．この場合の差は，明らかに $\vec{e}_\theta$ に平行なベクトルであり，式 (5.37b) はもっともらしい．

同様に

$$\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_\theta = \frac{\partial}{\partial r}(-r\sin\theta\,\vec{e}_x + r\cos\theta\,\vec{e}_y)$$
$$= -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y = \frac{1}{r}\vec{e}_\theta \tag{5.38a}$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta = r\cos\theta\,\vec{e}_x - r\sin\theta\,\vec{e}_y = -r\,\vec{e}_r \tag{5.38b}$$

図 5.6 のような図を描いて，これらの公式を表してみよ．

一般のベクトルの微分　　$\vec{e}_x$ の微分にもどろう．

$$\vec{e}_x = \cos\theta\,\vec{e}_r - \frac{1}{r}\sin\theta\,\vec{e}_\theta \tag{5.39}$$

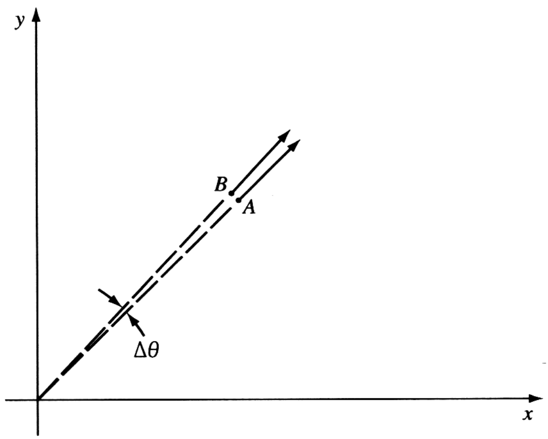


図 5.6　θ が $\Delta\theta$ だけ変化したときの $\vec{e}_r$ の変化

だから，

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_x = \frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\theta)\,\vec{e}_r + \cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(\vec{e}_r) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\sin\theta\right)\vec{e}_\theta - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(\vec{e}_\theta) \tag{5.40}$$

$$= -\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\left(\frac{1}{r}\vec{e}_\theta\right) - \frac{1}{r}\cos\theta\vec{e}_\theta - \frac{1}{r}\sin\theta(-r\vec{e}_r) \tag{5.41}$$

ここで式 (5.37) と式 (5.38) を用いた．これを整理すると

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_x = 0 \tag{5.42}$$

となり，期待通りの結果が得られる．式 (5.40) で第一項と第三項は，極座標基底での $\vec{e}_x$ の**成分**を微分することからでてくる．他の項は，極座標基底ベクトル自身の微分であり，成分の微分を打ち消すために必要である．

極座標で成分 (V^r, V^θ) をもつ一般のベクトル $\vec{V}$ を考える．その微分は，式 (5.40) からの類推から

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(V^r\vec{e}_r + V^\theta\vec{e}_\theta)$$
$$= \frac{\partial V^r}{\partial r}\vec{e}_r + V^r\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial r} + \frac{\partial V^\theta}{\partial r}\vec{e}_\theta + V^\theta\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial r}$$

$\partial\vec{V}/\partial\theta$ に対しても同様である．添字記法で書くと

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(V^\alpha\vec{e}_\alpha) = \frac{\partial V^\alpha}{\partial r}\vec{e}_\alpha + V^\alpha\frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial r}$$

（もちろんここで，α は r と θ をとる．）

これは，$\vec{V}$ の微分が，その成分 V^α の微分だけではないことを明らかに示している．r は単に一つの座標だから，上の式を次のように一般化できる．

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}\vec{e}_\alpha + V^\alpha\frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} \tag{5.43}$$

ここで，今の場合には x^β は，$\beta = 1$, 2 に対して，それぞれ r, θ である．

クリストッフェル記号　いうまでもなく，式 (5.43) の最後の項は，非常に

重要である．$\partial\vec{e}_\alpha/\partial x^\beta$ それ自身もベクトルだから，これは基底ベクトルの線形結合として書くことができる．この線形結合の係数を表すため，${\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}$ という記号を導入しよう．

$$\frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = {\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}\vec{e}_\mu \tag{5.44}$$

${\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}$ の解釈は，$\partial\vec{e}_\alpha/\partial x^\beta$ の μ 番目の成分ということである．この量は三つの添字を必要とする．第一の（α）は微分される基底ベクトルを表し，第二の（β）はどの座標でもって微分するかを表し，第三の（μ）はその微分されてできたベクトルの成分を表す．この量 ${\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}$ は非常に有用であり，クリストッフェル記号という名前が与えられている．それらがテンソルの成分かどうかという質問は，もう少しあとにのばそう．

極座標でのそれらは，もちろんすでに計算している．式 (5.37) と式 (5.38) から

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\quad \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial r} = 0 \Rightarrow {\Gamma^\mu}_{rr} = 0 \quad (\text{すべての}\ \mu\ \text{に対して})\\
&(2)\quad \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\vec{e}_\theta \Rightarrow {\Gamma^r}_{r\theta} = 0, \qquad {\Gamma^\theta}_{r\theta} = \frac{1}{r}\\
&(3)\quad \frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial r} = \frac{1}{r}\vec{e}_\theta \Rightarrow {\Gamma^r}_{\theta r} = 0, \qquad {\Gamma^\theta}_{\theta r} = \frac{1}{r}\\
&(4)\quad \frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta} = -r\vec{e}_r \Rightarrow {\Gamma^r}_{\theta\theta} = -r, \qquad {\Gamma^\theta}_{\theta\theta} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{5.45}$$

式 (5.44) の定義において，すべての添字は，同じ座標系に関するものでなければならない．こうして，$\vec{e}_r$ と $\vec{e}_\theta$ の微分を $\vec{e}_x$ と $\vec{e}_y$ の一定性を用いて計算したけれど，デカルト基底は最後に式 (5.45) のどこにも顔を出していない．これらの微分を，極座標以外のどの座標も用いることなしに，表すことができることにクリストッフェル記号の重要性がある．

共変微分　　クリストッフェル記号の定義式 (5.44) を用いると，式 (5.43) の微分は，次のように書ける．

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}\vec{e}_\alpha + V^\alpha{\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}\vec{e}_\mu \tag{5.46}$$

最後の項では，α と μ に関する二つの和がある．ダミー添字を書き換えると，もっと見やすくなる．すなわち μ を α に，α を μ に変えることによって次式が

得られる．

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}\vec{e}_\alpha + V^\mu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\vec{e}_\alpha \tag{5.47}$$

このように添字を変えると，両方の項から $\vec{e}_\alpha$ がくくれて次のように書ける．

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\mu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\right)\vec{e}_\alpha \tag{5.48}$$

したがって，ベクトル場 $\partial\vec{V}/\partial x^\beta$ は，次の成分をもつ．

$$\partial V^\alpha/\partial x^\beta + V^\mu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} \tag{5.49}$$

偏微分に対する記法は，$\partial V^\alpha/\partial x^\beta = V^\alpha{}_{,\beta}$ であった．この記法は，そのままにしておいて，次の**新しい**記号を定義する．

◆
$$V^\alpha{}_{;\beta} \equiv V^\alpha{}_{,\beta} + V^\mu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} \tag{5.50}$$

すると，このセミコロン記号でもって，式 (5.48) は次のように非常に簡潔に書くことができる．

◆
$$\partial\vec{V}/\partial x^\beta = V^\alpha{}_{;\beta}\vec{e}_\alpha \tag{5.51}$$

ここで，もし β をある与えられた固定した数とすれば，$\partial\vec{V}/\partial x^\beta$ はベクトル場である．しかし，β が**とりうる**値は二つある．したがって 3.10 節の練習問題 17 のように，ベクトル場 $\vec{e}_\beta$ をベクトル $\partial\vec{V}/\partial x^\beta$ に写像する $\binom{1}{1}$ テンソル場があって，それに附随するものとして $\partial\vec{V}/\partial x^\beta$ を見なすこともできる．このテンソル場を V の**共変微分**とよび，$\nabla\vec{V}$ と表す．すると，その成分は次のように書ける．

$$(\nabla\vec{V})^\alpha{}_\beta = (\nabla_\beta\vec{V})^\alpha = V^\alpha{}_{;\beta} \tag{5.52}$$

デカルト基底では，この成分は単に，$V^\alpha{}_{,\beta}$ である．しかし，曲線基底では基底ベクトルの微分も考慮に入れなければならず，式 (5.50) のクリストッフェル記号が関与する座標系での $\nabla\vec{V}$ の成分は，$V^\alpha{}_{;\beta}$ である．このことの重要性は，この後のすべての基礎であるので，過小評価すべきではない．$\nabla\vec{V}$ と書かれる一つの $\binom{1}{1}$ テンソルが存在する．デカルト座標でのその成分は，$\partial V^\alpha/\partial x^\beta$ である．一般の座標 $\{x^{\mu'}\}$ ではその成分は $V^{\alpha'}{}_{;\beta'}$ と書かれ，次の二つの同等な方

法のどちらかで得られる．(i) 式 (5.50) とその座標での $\Gamma^{\alpha'}{}_{\mu'\beta'}$ がどんなものであるかの知識を用いて，$\{x^{\mu'}\}$ で直接計算する．あるいは (ii) デカルト座標から $\{x^{\mu'}\}$ への通常のテンソルの変換則によって求める．

スカラーの共変微分は何だろうか？　共変微分と座標に関する偏微分との違いは，基底ベクトルが変化することのためだけによる．スカラーは，基底ベクトルに依存しないから，その共変微分は偏微分と同じであり，その勾配である．すなわち

$$\nabla_\alpha f = \partial f/\partial x^\alpha; \qquad \nabla f = \tilde{\mathrm{d}} f \tag{5.53}$$

発散とラプラシアン　さらに先に進む前に，これまでのことを前に学んだことと関係づけよう．デカルト座標ではベクトル V^α の発散は $V^\alpha{}_{,\alpha}$ である．これは，$V^\alpha{}_{,\beta}$ の二つの添字を縮約して得られるスカラーである．縮約は，座標系に依存しない操作だから，$\vec{V}$ の発散は別の座標系でも $\nabla\vec{V}$ の二つの添字を縮約することによって計算される．その結果は，値 $V^{\alpha'}{}_{;\alpha'}$ をもったスカラーである．これがデカルト座標での数 $V^\alpha{}_{,\alpha}$ と同じであることは重要である．

$$V^\alpha{}_{,\alpha} \equiv V^{\beta'}{}_{;\beta'} \tag{5.54}$$

ここでプライムのつかない添字はデカルト座標を，プライムつきの添字は任意の座標系に関するものである．

極座標では（ここでは，便宜上プライムを落して書く），

$$V^\alpha{}_{;\alpha} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} V^\mu$$

ここで，式 (5.45) から，

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^\alpha{}_{r\alpha} &= \Gamma^r{}_{rr} + \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^\alpha{}_{\theta\alpha} &= \Gamma^r{}_{\theta r} + \Gamma^\theta{}_{\theta\theta} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.55}$$

したがって，

$$\begin{aligned} V^\alpha{}_{;\alpha} &= \frac{\partial V^r}{\partial r} + \frac{\partial V^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} V^r \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r V^r) + \frac{\partial}{\partial \theta} V^\theta \end{aligned} \tag{5.56}$$

これは読者にとっておなじみの公式だろう．たぶん，よりなじみが薄いのは，ラプラシアンだろう．これは勾配の発散である．われわれはベクトルの発散しか知らない．勾配は一形式である．したがって，まずその一形式をベクトルに直さねばならない．スカラー ϕ が与えられると，成分 $(\phi_{,r},\ \phi_{,\theta}/r^2)$ をもったベクトル勾配が得られる．[式 (5.53) と 5.2 節の最後の部分をみよ．] これを発散の公式 (5.56) の中のベクトルの成分として用いると，

$$\nabla\cdot\nabla\phi \equiv \nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta} \tag{5.57}$$

これが，平面極座標でのラプラシアンである．もちろんこれは次式に恒等的に等しい．

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \tag{5.58}$$

一形式と高階のテンソルの微分　　スカラー ϕ は，基底ベクトルに依存しないから，その微分 $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ は，その共変微分 $\nabla\phi$ に等しい．われわれはほとんどいつも記号 $\nabla\phi$ を用いる．一形式の微分を計算するために（これはベクトルと同様，単にその成分の微分ではない)，一形式とベクトルからスカラーがつくられるという性質を利用する．$\tilde{p}$ を一形式，$\vec{V}$ を任意のベクトルとすると，固定した β に対して，$\nabla_\beta\tilde{p}$ は再び一形式，$\nabla_\beta\vec{V}$ はベクトル，$\langle\tilde{p},\ \vec{V}\rangle \equiv \phi$ はスカラーである．どんな（任意の）座標系でも，このスカラーは単に

$$\phi = p_\alpha V^\alpha \tag{5.59}$$

である．したがって，積の微分の規則から次式が得られる．

$$\nabla_\beta\phi = \phi_{,\beta} = \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta}V^\alpha + p_\alpha\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \tag{5.60}$$

ここで，式 (5.50) を用いて，$\partial V^\alpha/\partial x^\beta$ を，$\nabla_\beta\vec{V}$ の成分である $V^\alpha{}_{,\beta}$ に置き換える．

$$\nabla_\beta\phi = \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta}V^\alpha + p_\alpha V^\alpha{}_{;\beta} - p_\alpha V^\mu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} \tag{5.61}$$

項を整理し直して，クリストッフェル記号を含んでいる項のダミー添字を書き直すと，

$$\nabla_\beta\phi = \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta} - p_\mu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\right)V^\alpha + p_\alpha V^\alpha{}_{;\beta} \tag{5.62}$$

この式で，括弧の中以外のすべての項は，任意のベクトル場 $\vec{V}$ に対して，テンソルの成分として**知られている**．成分の乗法と加法は，つねに新しいテンソルを与えるから，括弧の中の項もあるテンソルの成分でなければならない．もちろんこれが，$\tilde{p}$ の共変微分である．

◆
$$(\nabla_\beta \tilde{p})_\alpha \equiv (\nabla \tilde{p})_{\alpha\beta} \equiv p_{\alpha;\beta} = p_{\alpha,\beta} - p_\mu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \tag{5.63}$$

すると式 (5.62) は次のように書ける．

◆
$$\nabla_\beta (p_\alpha V^\alpha) = p_{\alpha;\beta} V^\alpha + p_\alpha V^\alpha{}_{;\beta} \tag{5.64}$$

こうして共変微分は，式 (5.60) と同じ積に対する規則に従う．デカルト座標では，単に成分の偏微分であり，そのときには式 (5.64) は式 (5.60) に帰着すべきだから，これは当然である．

式 (5.50) と (5.63) の二つの公式を比べよう．

$$V^\alpha{}_{;\beta} = V^\alpha{}_{,\beta} + V^\mu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}$$
$$p_{\alpha;\beta} = p_{\alpha,\beta} - p_\mu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$$

これにはある類似点と相違点がある．微分の添字 β は Γ の**最後の**添字であることを思いだすと，その他の添字はメトリックで上げ下げしないとすれば，あるべき位置にある．唯一の違いは符号である．$\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}$ が基底ベクトルの微分に附随していたことを思い出すと助けになる．そうすると，$-\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ が基底一形式が基底ベクトルと“逆に”変換することを意味する．縮約 $\langle \tilde{\omega}^\alpha, \vec{e}_\beta \rangle = \delta^\alpha_\beta$ が**一定**で，その微分はゼロでなければならないことを考えれば，これはもっともなことである．

式 (5.63) を導いたのと同じ手順をたどれば，次式が得られる．

◆
$$\nabla_\beta T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu,\beta} - T_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} - T_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha{}_{\nu\beta} \tag{5.65}$$

◆
$$\nabla_\beta A_{\mu\nu} = A^{\mu\nu}{}_{,\beta} + A^{\alpha\nu} \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} + A^{\mu\alpha} \Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} \tag{5.66}$$

◆
$$\nabla_\beta B^\mu{}_\nu = B^\mu{}_{\nu,\beta} + B^\alpha{}_\nu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - B^\mu{}_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\nu\beta} \tag{5.67}$$

これらをよくみると，**非常に**規則的であることがわかるだろう．おのおのの添

字ごとに，一つの Γ を入れ，上付の添字はベクトルのように，下付の添字は一形式のように取り扱えばいい．式 (5.65) は幾何学的には，$\nabla_\beta T_{\mu\nu}$ が $\binom{0}{3}$ テンソル $\nabla\mathbf{T}$ の成分であるという意味である．ここで $\mathbf{T}$ は，$\binom{0}{2}$ テンソルである．同様に，式 (5.66) では，$\mathbf{A}$ は $\binom{2}{0}$ テンソル，$\nabla\mathbf{A}$ は成分 $\nabla_\beta A^{\mu\nu}$ をもった $\binom{2}{1}$ テンソルである．

5.4 クリストッフェル記号とメトリック

今まで発展させてきた定式化は，共変微分を定義するために，メトリックテンソルの性質を何ら使っていない．しかしメトリックは，ベクトルを一形式に変えるから，それらの微分の間の関係にかかわっているはずである．したがって，メトリックをどうにかして含むようにしなければならない．特にデカルト座標では，一形式とそれに対応するベクトルの成分は等しく，また ∇ は単に成分の微分だから，それらの共変微分の成分は等しくなければならない．このことは，$\vec{V}$ を任意のベクトルとし，$\tilde{V} = \mathbf{g}(\vec{V},\quad)$ をそれに対応する一形式としたとき，デカルト座標で次式が成り立つことを意味する．

$$\nabla_\beta \tilde{V} = \mathbf{g}(\nabla_\beta \vec{V},\quad) \tag{5.68}$$

しかし式 (5.68) はテンソル方程式だから，これは**あらゆる**座標で成り立っていなければならない．これから次式が結論される．

$$V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu} V^{\mu}{}_{;\beta} \tag{5.69}$$

これは式 (5.68) の成分表示である．

上の言葉での説明が満足いかないなら，方程式を使ってもう一度それを確かめてみよう．プライムなしの添字 α, β, γ, $\cdots$ がデカルト座標，プライムのついた添字 α', β', γ', $\cdots$ が**任意の**座標を表すとする．

まず任意の座標系で成り立つ関係式

$$V_{\alpha'} = g_{\alpha'\mu'} V^{\mu'} \tag{5.70}$$

から始める．デカルト座標では

$$g_{\alpha\mu} = \delta_{\alpha\mu}, \qquad V_\alpha = V^\alpha$$

またデカルト座標では，クリストッフェル記号が消えるから

$$V_{\alpha;\beta} = V_{\alpha,\beta}, \qquad V^\alpha{}_{;\beta} = V^\alpha{}_{,\beta}$$

したがって

$$V_{\alpha;\beta} = V^\alpha{}_{;\beta}$$

が結論される．これはデカルト座標でのみ成り立つ式である．これをあらゆる座標系で成り立つ式に変換するために，デカルト座標で次式が成り立つことに注意する．

$$V^\alpha{}_{;\beta} = g_{\alpha\mu} V^\mu{}_{;\beta}$$

したがってデカルト座標では

$$V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu} V^\mu{}_{;\beta}$$

この式はテンソル方程式であり，一つの座標系で成り立てば，あらゆる座標系で成り立つ．これはまさに式 (5.69) である．

$$V_{\alpha';\beta'} = g_{\alpha'\mu'} V^{\mu'}{}_{;\beta'} \tag{5.71}$$

この結果は重要な意味をもつ．式 (5.70) で β' で共変微分とすると，

$$V_{\alpha';\beta'} = g_{\alpha'\mu';\beta'} V^{\mu'} + g_{\alpha'\mu'} V^{\mu'}{}_{;\beta'}$$

これと式 (5.71) を比べると，（$\vec{V}$ は任意のベクトルだから）あらゆる座標系で

◆
$$g_{\alpha'\mu';\beta'} \equiv 0 \tag{5.72}$$

でなければならないことがわかる．これは式 (5.68) の結果である．デカルト座標では，上の式は自明な恒等式である．

$$g_{\alpha\mu;\beta} \equiv g_{\alpha\mu,\beta} = \delta_{\alpha\mu,\beta} \equiv 0$$

しかし，他の座標では自明ではない．したがって，われわれの定式化の一貫性

の検証として，このことを確かめよう．

式 (5.65) を用いて（プライムなしの添字を一般の座標の添字として用いる），

$$g_{\alpha\beta;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} - \Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu} g_{\alpha\nu} \tag{5.73}$$

極座標でいくつかの例を計算してみよう．$\alpha = r$，$\beta = r$，$\mu = r$ ととると，

$$g_{rr;r} = g_{rr,r} - \Gamma^{\nu}{}_{rr} g_{\nu r} - \Gamma^{\nu}{}_{rr} g_{r\nu}$$

$g_{rr,r} = 0$ とすべての ν に対して $\Gamma^{\nu}{}_{rr} = 0$ だから，これは明らかにゼロである．それほど自明でないのは，$\alpha = \theta$，$\beta = \theta$，$\mu = r$ の場合である．

$$g_{\theta\theta;r} = g_{\theta\theta,r} - \Gamma^{\nu}{}_{\theta r} g_{\nu\theta} - \Gamma^{\nu}{}_{\theta r} g_{\theta\nu}$$

$g_{\theta\theta} = r^2$，$\Gamma^{\theta}{}_{\theta r} = 1/r$，$\Gamma^{r}{}_{\theta r} = 0$ から，

$$g_{\theta\theta;r} = (r^2)_{,r} - \frac{1}{r}(r^2) - \frac{1}{r}(r^2) = 0$$

このように，ほとんど魔法のように成り立つ．しかしこれが魔法ではないと認識することが大事である．これはデカルト座標で $g_{\alpha\beta,\mu} = 0$ ということと任意の座標系では $g_{\alpha\beta;\mu}$ が同じテンソル $\nabla \mathbf{g}$ の成分であるという事実から直接導かれることである．

ここで少し間をおいて，今までのことをまとめてみるのも有用だろう．われわれはユークリッド空間での平行性の理解の下に任意の座標での共変微分を導入した．そしてユークリッド空間のメトリックが共変的に一定であることを示した［式 (5.72)］．曲った（リーマン）空間のときには，平行性についてもっと注意深く議論しなければならないが，式 (5.72) はその場合にも成り立つ．したがって，たとえばこれからみていくような結果はすべて曲った空間でも成り立つ．

メトリックからのクリストッフェル記号の計算　　式 (5.73) が消えることからきわめて重要な結果が導かれる．式 (5.73) は，$g_{\alpha\beta,\mu}$ を $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ から決めるために用いられる．この逆，すなわち $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ から $g_{\alpha\beta,\mu}$ でもって表すために用いられるとみることもできる．このことはクリストッフェル記号を計算する簡単な方法を与える．それを示すために，まず**任意の座標系**で $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \equiv \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}$ とい

う重要な結果を証明しよう．この対称性を証明するため，スカラー場 ϕ を考える．その一階微分 $\nabla\phi$ は成分 $\phi_{,\beta}$ をもつ一形式である．二階共変微分 $\nabla\nabla\phi$ は成分 $\phi_{,\beta;\alpha}$ をもつ $\binom{0}{2}$ テンソルである．デカルト座標で，その成分は

$$\phi_{,\beta,\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\phi$$

であり，偏微分は交換可能だから α と β について対称である．しかしあるテンソルが一つの座標で対称なら，すべての座標で対称だから，**任意の**座標で

$$\phi_{,\beta;\alpha} = \phi_{,\alpha;\beta} \tag{5.74}$$

式 (5.63) の定義を用いて，任意の座標系で

$$\phi_{,\beta,\alpha} - \phi_{,\mu}\Gamma^\mu{}_{\beta\alpha} = \phi_{,\alpha,\beta} - \phi_{,\mu}\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$$

この式で再び**任意**の座標で

$$\phi_{,\alpha,\beta} = \phi_{,\beta,\alpha}$$

だから，結局，任意の ϕ に対して

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\phi_{,\mu} = \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}\phi_{,\mu}$$

これから求める結果が証明される．

◆ $$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha} \qquad (\text{任意の座標系で}) \tag{5.75}$$

　この関係を使い，そして少し高等的な添字の書き換えをして，式 (5.73) を反転する．式 (5.73) で添字の違った置換をした三つの式を書く．

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\mu} &= \Gamma^\nu{}_{\alpha\mu}g_{\nu\beta} + \Gamma^\nu{}_{\beta\mu}g_{\alpha\nu} \\ g_{\alpha\mu,\beta} &= \Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}g_{\nu\mu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\beta}g_{\alpha\nu} \\ -g_{\beta\mu,\alpha} &= -\Gamma^\nu{}_{\beta\alpha}g_{\nu\mu} - \Gamma^\nu{}_{\mu\alpha}g_{\beta\nu} \end{aligned}$$

これらの式を足し，$\mathbf{g}$ の対称性，$g_{\beta\nu} = g_{\nu\beta}$ を用いて項をまとめると

$$g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}$$

$$= (\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu})g_{\nu\beta} + (\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha})g_{\nu\mu} + (\Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu} + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\beta})g_{\alpha\nu}$$

この式で右辺のはじめの2項はΓの対称性 (5.75) のため消え，次式が得られる．

$$g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} = 2g_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu}$$

これを2で割り，$g^{\alpha\gamma}$ を掛け（α に関して和をとる）

$$g^{\alpha\gamma}g_{\alpha\nu} \equiv \delta^{\gamma}_{\nu}$$

を用いると，望みの式が得られる．

◆
$$\frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}) = \Gamma^{\gamma}{}_{\beta\mu} \tag{5.76}$$

これが $\mathbf{g}$ の成分の偏微分によるクリストッフェル記号の表現である．たとえば，極座標では，

$$\Gamma^{\theta}{}_{r\theta} = \frac{1}{2}g^{\alpha\theta}(g_{\alpha r,\theta} + g_{\alpha\theta,r} - g_{r\theta,\alpha})$$

$g^{r\theta} = 0$，$g^{\theta\theta} = r^{-2}$ だから，

$$\begin{aligned}\Gamma^{\theta}{}_{r\theta} &= \frac{1}{2r^2}(g_{\theta r,\theta} + g_{\theta\theta,r} - g_{r\theta,\theta}) \\ &= \frac{1}{2r^2}g_{\theta\theta,r} = \frac{1}{2r^2}(r^2)_{,r} = \frac{1}{r}\end{aligned}$$

これは前に導いた $\Gamma^{\theta}{}_{r\theta}$ と同じ値である．$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}$ を計算するこの方法は，非常に有効であり，式 (5.76) は憶えておくに十分値する．この式は曲った空間でもまったく同じ形をとる．

$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}$ のテンソル性　$\vec{e}_{\alpha}$ はベクトルだから，$\nabla\vec{e}_{\alpha}$ は成分 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ をもった $\binom{1}{1}$ テンソルである．ここで α は固定され，μ と β が成分の添字である．α を変えるとテンソル $\nabla\vec{e}_{\alpha}$ が変るが，μ あるいは β を変えると問題にしている成分だけが変る．したがって，β と μ を成分の添字，α を問題にしている特定のテンソルを表すラベルと見なすことができる．基底ベクトル $\vec{e}_{\alpha}$ のおのおのに対して，一つずつそのようなテンソルが存在する．しかしこの見方はあまり有用ではない．というのは座標変換に対して基底は変化し，新しい座標での重要な量は古いテンソル $\nabla\vec{e}_{\alpha}$ から複雑な方法で得られる**新しい**テンソル $\nabla\vec{e}_{\beta'}$ だからである．

それらは成分だけが違うのではなく，**別々の**テンソルである．したがって一つの系での集合 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ は別の系での集合 $\Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\beta'}$ から簡単なテンソル変換では得られない．このことの簡単な例はデカルト座標である．そこでは $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} \equiv 0$ であるが，他の座標ではゼロではない．こうして多くの教科書で，$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ はテンソルの成分ではないと書かれている．上述のように，それは厳密には正しくない．$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ は $\binom{1}{1}$ テンソル $\nabla\vec{e}_{\alpha}$ の**集合**の (μ, β) 成分である．しかしその成分が $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ であるような単一の $\binom{1}{2}$ テンソルは存在せず，$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}V^{\alpha}$ のような表現は単一のテンソルの成分ではない．次の組合せが，単一のテンソル $\nabla\vec{V}$ の成分となる．

$$V^{\beta}{}_{,\alpha} + V^{\mu}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}$$

5.5 非座標基底

ここまですべての議論は，非デカルト基底ベクトルは (x, y) からある (ξ, η) への座標変換によってつくられると仮定してきた．しかし，以下の議論で明らかになるように，すべての基底ベクトル場がこうしてつくられるわけではない．そのときには，前に得られた結果を変える必要があるかどうか（実際，いくつかは変る）を注意深くみなければならない．本書ではほとんど非座標基底は使わない．しかし平坦な空間での曲線座標に関する標準的な参考文献中でしばしば非座標基底にでくわすので，ここで少しそれをみてみよう．

極座標基底　　極座標系での基底ベクトルは次式によって定義された．

$$\vec{e}_{\alpha'} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\vec{e}_{\beta}$$

ここでプライムがついた添字は極座標を，そうでないものはデカルト座標を表す．さらに

$$\Lambda^{\beta}{}_{\alpha'} = \partial x^{\beta}/\partial x^{\alpha'}$$

であり，デカルト座標 $\{x^{\beta}\}$ は極座標 $\{x^{\alpha'}\}$ の関数と見なされる．

$$\vec{e}_{\alpha'} \cdot \vec{e}_{\beta'} \equiv g_{\alpha'\beta'} \neq \delta_{\alpha'\beta'}$$

であって，基底ベクトルは単位ベクトルではない．

極単位基底 単位ベクトルを用いると便利なことがしばしばある．極座標基底から導かれる単位ベクトルの簡単な集合は

$$\vec{e}_{\hat{r}} = \vec{e}_r, \qquad \vec{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r}\vec{e}_\theta \tag{5.77}$$

であり，これに対応する単位一形式は

$$\tilde{\omega}^{\hat{r}} = \tilde{\mathrm{d}}r, \qquad \tilde{\omega}^{\hat{\theta}} = r\tilde{\mathrm{d}}\theta \tag{5.78}$$

となる．以下のことを確かめよ．

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_{\hat{\alpha}} \cdot \vec{e}_{\hat{\beta}} \equiv g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \delta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \\ \tilde{\omega}^{\hat{\alpha}} \cdot \tilde{\omega}^{\hat{\beta}} \equiv g^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \delta^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \end{aligned}\right\} \tag{5.79}$$

したがって，これらはベクトルと一形式に対する直交基底をつくっている．かなり標準的な記号として，直交基底を表すのにその添字の上に“カレット”あるいは“ハット”とよばれる記号 ^ を用いる．ここで次のような疑問が起きる．すなわち，

$$\vec{e}_{\hat{r}} = \vec{e}_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \xi}\vec{e}_y \tag{5.80a}$$

$$\vec{e}_{\hat{\theta}} = \vec{e}_\eta = \frac{\partial x}{\partial \eta}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \eta}\vec{e}_y \tag{5.80b}$$

となるような座標 (ξ, η) が存在するだろうか？ もし存在するなら，$(\vec{e}_{\hat{r}}, \vec{e}_{\hat{\theta}})$ は座標 (ξ, η) に対する基底であり，したがってそれらを座標基底とよぶことができる．一方もしそのような (ξ, η) が存在しないことが示されれば，それらは非座標基底である．このことは基底一形式をみたほうが，より簡単に答えられる．すなわち

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\omega}^{\hat{r}} = \tilde{\mathrm{d}}\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x}\tilde{\mathrm{d}}x + \frac{\partial \xi}{\partial y}\tilde{\mathrm{d}}y \\ \tilde{\omega}^{\hat{\theta}} = \tilde{\mathrm{d}}\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x}\tilde{\mathrm{d}}x + \frac{\partial \eta}{\partial y}\tilde{\mathrm{d}}y \end{aligned}\right\} \tag{5.81}$$

となるような (ξ, η) を探す．$\tilde{\omega}^{\hat{r}}$ と $\tilde{\omega}^{\hat{\theta}}$ を $\tilde{\mathrm{d}}r$ と $\tilde{\mathrm{d}}\theta$ で表した式を使い，式 (5.26)，式 (5.27) から

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\omega}^{\hat{r}} = \tilde{\mathrm{d}}r = \cos\theta\tilde{\mathrm{d}}x + \sin\theta\tilde{\mathrm{d}}y \\ \tilde{\omega}^{\hat{\theta}} = r\tilde{\mathrm{d}}\theta = -\sin\theta\tilde{\mathrm{d}}x + \cos\theta\tilde{\mathrm{d}}y \end{aligned}\right\} \tag{5.82}$$

($\tilde{\omega}^{\hat{r}}$ と $\tilde{\omega}^{\hat{\theta}}$ の直交性はこの式から明らかである.）こうしてもし (ξ,η) が存在するなら

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\sin\theta, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \cos\theta \tag{5.83}$$

となる．これが正しければ，微分の順序をかえたものは等しく，

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} \tag{5.84}$$

となる．したがって，

$$\frac{\partial}{\partial y}(-\sin\theta) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos\theta) \tag{5.85}$$

あるいは

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$$

となるが，これは明らかに成り立たない．したがって，このような ξ と η は存在しない．われわれは非座標基底を得たことになる．（もしこの証明の仕方を意外に思うなら，$\tilde{\mathrm{d}}r$ と $\tilde{\mathrm{d}}\theta$ それら自体に対し試みよ.）

曲線座標でのベクトル解析を取り扱っている教科書では，ほとんどすべて座標基底ではなく正規直交基底を用いている．その場合，極座標に対してあるベクトルが**座標基底** PC で成分

$$\vec{V} \underset{PC}{\longrightarrow} (a,b) = \{V^{\alpha'}\} \tag{5.86}$$

をもつなら，**直交基底** PO では次の成分をもつ．

$$\vec{V} \underset{PO}{\longrightarrow} (a,rb) = \{V^{\hat{\alpha}}\} \tag{5.87}$$

したがって，たとえばそのような本でベクトルの発散を計算していたら，われわれの場合の式 (5.56) のかわりに次の式が得られる．

$$\nabla\cdot V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV^{\hat{r}}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}V^{\hat{\theta}} \tag{5.88}$$

式 (5.56) と式 (5.88) の違いは，純粋に $\vec{V}$ に対する基底の問題である．

非座標基底に関する一般的注意　　座標基底と非座標基底の主な違いは次のことに起因する．任意のスカラー場 ϕ と数 $\tilde{\mathrm{d}}\phi(\vec{e}_\mu)$ を考える．ここで $\vec{e}_\mu$ はある

任意の基底での基底ベクトルである．次のような記法を用いた．

$$\tilde{\mathrm{d}}\phi(\vec{e}_\mu) = \phi_{,\mu} \tag{5.89}$$

ここで，もし $\vec{e}_\mu$ が座標基底のメンバーなら，$\tilde{\mathrm{d}}\phi(\vec{e}_\mu) = \partial\phi/\partial x^\mu$ であり，以前に定義したように

$$\phi_{,\mu} = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} : \text{座標基底} \tag{5.90}$$

しかし $\{\vec{e}_\mu\}$ に対してどんな座標も存在しなければ，式 (5.90) は成り立たない．たとえば式 (5.89) でもって $\phi_{,\hat{\mu}}$ を**定義すると**，

$$\phi_{,\hat{\mu}} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \tag{5.91}$$

一般に任意の座標系 $\{x^\beta\}$ と任意の非座標基底 $\{\vec{e}_{\hat{\alpha}}\}$ に対して

$$\nabla_{\hat{\alpha}}\phi \equiv \phi_{,\hat{\alpha}} = \Lambda^\beta{}_{\hat{\alpha}}\nabla_\beta\phi = \Lambda^\beta{}_{\hat{\alpha}}\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} \tag{5.92}$$

こうして記法（5.89）を引き続き使い，座標基底のとき**だけ** $\phi_{,\mu} = \partial\phi/\partial x^\mu$ という規則をつくっておくと便利である．

クリストッフェル記号は以前と同様に定義される．

$$\nabla_{\hat{\beta}}\vec{e}_{\hat{\alpha}} = \Gamma^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\vec{e}_{\hat{\mu}} \tag{5.93}$$

ただし，ここで

$$\nabla_{\hat{\beta}} = \Lambda^\alpha{}_{\hat{\beta}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tag{5.94}$$

$\{x^\alpha\}$ は任意の座標系，$\{\vec{e}_{\hat{\beta}}\}$ は任意の（座標，あるいは非座標）基底である．このとき $\Gamma^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \Gamma^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\beta}\hat{\alpha}}$ を証明することは**できない**．その証明では $\phi_{,\hat{\alpha},\hat{\beta}} = \phi_{,\hat{\beta},\hat{\alpha}}$ を使っており，これは座標基底では成り立つ（偏微分は交換可能である）が，それ以外では成り立たないからである．したがって，$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ の $g_{\alpha\beta,\gamma}$ を使っての式 (5.76) も座標基底でのみ成り立つ式である．より一般の表現は 5.8 節の練習問題 20 で与えられる．

ある基底に対して座標が存在しないという一般的理由は何であろうか？ もし $\{\tilde{\omega}^{\overline{\alpha}}\}$ が座標一形式基底なら，それと別の座標基底 $\{\tilde{\mathrm{d}}x^\alpha\}$ との関係は

$$\tilde{\omega}^{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_\beta\tilde{\mathrm{d}}x^\beta = \frac{\partial x^{\overline{\alpha}}}{\partial x^\beta}\tilde{\mathrm{d}}x^\beta \tag{5.95}$$

鍵となるのは一般に位置の関数である $\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}$ が至るところで偏微分 $\partial x^{\overline{\alpha}}/\partial x^{\beta}$ によって与えられることである．したがって

$$\frac{\partial}{\partial^{\gamma}}\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta} = \frac{\partial^2 x^{\overline{\alpha}}}{\partial x^{\gamma}\partial x_{\beta}} = \frac{\partial^2 x^{\overline{\alpha}}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\gamma} \tag{5.96}$$

$\tilde{\omega}^{\overline{\alpha}}$ が座標基底であるためには，この“積分可能条件”がすべての $\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}$ に対して満たされていなければならない．明らかにこの条件を満たさないように変換行列を適当に選ぶことができ，したがって非座標基底をつくることができる．

本書での非座標基底　本書では，非座標基底を使う機会はほとんどない．そのような基底が存在することを理解するのが重要である．すべての基底が座標系から導かれるのではない．座標基底の代数のほうが，ほとんどの場合より簡単である．それなら，なぜベクトル解析の曲線座標の標準的な取扱いで，直交基底に固執するのだろうか？　それはユークリッド空間でのそのような基底では，メトリックは成分 $\delta_{\alpha\beta}$ をもち，ドット積がデカルト座標と同じ形をとり，デカルト座標でのようにベクトルと一形式の成分が一致するからである．（デカルト座標には直交座標基底のみがあるのである．）座標基底でベクトルやテンソル解析を簡単にするには，ベクトルと一形式の違いを学ぶために時間を費やさねばならない．

5.6 将来に向けて

この章では，曲った空間や時空の研究で必要になるほとんどすべての記法や概念を展開した．特に 5.2～5.4 節を理解することが重要である．曲率の数学はこれらの節で発展させた事柄の類推から展開されるからである．今までのことにつけ加えられるのは，平行性についての議論，言い換えると，ユークリッドの平行線の公理の破れをどのようにして測るかの議論である．この破れの程度を表すのが有名なリーマン・テンソルである．

5.7 文　　献

エトベッシュの実験，パウンド–レブカ–スナイダーの実験や，その他の一般相対論を支持している実験的基礎については，Dicke (1964)，Minsner ら (1973)，Shapiro (1980)，Will (1993, 2006)．数学的ではない曲率の導入の必要性の議論は Hoffmann (1983) にある．GPS システムでの相対論の利用についての現代的解説が Ashby (2003) にある．

曲線座標の数学はいろいろな観点から次の文献に議論されている．Abraham と Marsden (1978)，Lovelock と Rund (1990)，Schutz (1980*b*)．

5.8 練 習 問 題

1　より現実的な仮定のもとに式 (5.1) を導いた議論をくり返せ．底で質点の運動エネルギーの一部 ε が光子に変換され，上方に打ち上げられ，残りのエネルギーは有用な形態で底にとどまる．仮に式 (5.1) が破れたとして，永久機関を考え出せ．

2　一様な重力場はなぜ地球上で潮の満干を引き起さないか説明せよ．

3　(a) 座標変換 $(x, y) \to (\xi, \eta)$，$\xi = x$，$\eta = 1$ が式 (5.6) を満たさないことを示せ．

(b) 次の座標変換はよいふるまいをするか？　ヤコビアンを計算し，変換が特異になるすべての点を求めよ．

(i) $\xi = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\eta = \arctan(y/x)$

(ii) $\xi = \ln x$, $\eta = y$

(iii) $\xi = \arctan(y/x)$, $\eta = (x^2 + y^2)^{-1/2}$

4　$\{x = f(\lambda),\ y = g(\lambda),\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ によって定義される曲線がある．接ベクトル $(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\lambda, \mathrm{d}y/\mathrm{d}\lambda)$ が実際にこの曲線に接することを示せ．

5　次の曲線を描け．どれが同じ経路をもつか？　またパラメーターがゼロのときのそれらの接ベクトルを求めよ．

(a) $x = \sin\lambda,\ y = \cos\lambda$

(b) $x = \cos(2\pi t^2),\ y = \sin(2\pi t^2 + \pi)$

(c) $x = s,\ y = s + 4$

(d) $x = s^2,\ y = -(s-2)(s+2)$

(e) $x = \mu,\ y = 1$

6　図 5.5 の描像を正当化せよ．

7　デカルト座標 (x, y)（プライムなしの添字）から極座標 (r, θ)（プライムつきの添字）への変換に対する変換行列 $\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}$，$\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$ のすべての要素を計算せよ．

8　(a)（練習問題 7 の結果を用いよ．）$f = x^2 + y^2 + 2xy$ とし，デカルト座標で $\vec{V} \to (x^2 + 3y,\ y^2 + 3x)$，$\vec{W} \to (1, 1)$ とする．f を r と θ の関数として計算し，極座標での $\vec{V}$ と $\vec{W}$ の成分を r と θ の関数として表せ．

(b) デカルト座標で $\tilde{\mathrm{d}}f$ の成分を求めよ．またその極座標での成分を (i) 極座標での直接の計算から，(ii) デカルト座標からの変換によって求めよ．

(c) (i) 極座標でのメトリックテンソルを用い，$\vec{V}$ と $\vec{W}$ に附随する一形式 $\tilde{V}$，$\tilde{W}$ の極座標成分を求めよ．(ii) $\vec{V}$，$\vec{W}$ のデカルト座標での成分から変換によってそれらの極座標成分を求めよ．

9　図 5.6 のような図を書いて，式 (5.38) を説明せよ．

10　式 (5.52) で定義された $\nabla\vec{V}$ が $\binom{1}{1}$ テンソルであることを証明せよ．

11　（練習問題 7 と 8 を用いる．）デカルト座標での成分が $(x^2 + 3y,\ y^2 + 3x)$ であるベクトル $\vec{V}$ に対して以下の量を計算せよ．(a) デカルト座標での $V^{\alpha}{}_{,\beta}$，(b) 極座標への変換 $\Lambda^{\mu'}{}_{\alpha}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}V^{\alpha}{}_{,\beta}$，(c) 式 (5.50) で式 (5.45) のクリストッフェル記号を使って極座標での成分 $V^{\mu'}{}_{;\nu'}$，(d) (a) の結果を使って発散 $V^{\alpha}{}_{,\alpha}$，(e) (b) あるいは (c) の結果を使って発散 $V^{\mu'}{}_{;\mu'}$，(f) 式 (5.56) を直接使って発散 $V^{\mu'}{}_{;\mu'}$

12　デカルト座標成分が $(x^2 + 3y,\ y^2 + 3x)$ である一形式場 $\tilde{p}$ に対して以下の量を計算せよ．(a) デカルト座標での $p_{\alpha,\beta}$，(b) 極座標への変換 $\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}p_{\alpha,\beta}$，(c) 式 (5.63) で式 (5.45) のクリストッフェル記号を使って極座標での成分 $p_{\mu';\nu'}$

13　問題 11 と 12 から，$g_{\mu'\alpha'}V^{\alpha'}{}_{;\nu'} = p_{\mu';\nu'}$ を確かめよ．

14　極座標成分が $(A^{rr} = r^2,\ A^{r\theta} = r\sin\theta,\ A^{\theta r} = r\cos\theta,\ A^{\theta\theta} = \tan\theta)$ であるテンソルに対して，すべての可能な添字につき極座標での式 (5.66) を計算せよ．

15　極座標成分が $(V^r = 1,\ V^{\theta} = 0)$ であるベクトルに対して，極座標での 2 階の共変微分 $V^{\alpha}{}_{;\mu;\nu}$ のすべての成分を計算せよ．［ヒント：2 階の微分を求めるには，1 階微分 $V^{\alpha}{}_{;\mu}$ を $\binom{1}{1}$ テンソルと見なす：式 (5.67)］

16　式 (5.75) から式 (5.76) を導くさいに，省略した過程をすべて補え．

17　$V^{\beta}{}_{,\alpha}$ と $V^{\mu}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}$ が座標変換の下でそれぞれどのように変換されるか？　［$\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}$ に対しては式 (5.44) から始めるとよい．］このどちらもテンソル則には従わないが，その和はテンソルとして変換することを示せ．

18　式 (5.79) を確かめよ．

19　式 (5.82) から式 (5.85) までの計算を確かめよ．これを $\tilde{\mathrm{d}}r$ と $\tilde{\mathrm{d}}\theta$ に対してくり返

し，それらが座標基底であることを示せ．

20 非座標基底 $\{\vec{e}_\mu\}$ に対して，$\nabla_{\vec{e}_\mu}\vec{e}_\nu - \nabla_{\vec{e}_\nu}\vec{e}_\mu \equiv c^\alpha{}_{\mu\nu}\vec{e}_\alpha$ を定義して式 (5.75) のかわりにこれを用いて式 (5.76) を一般化せよ．

21 特殊相対論で，ある慣性観測者の x–t 面を考える．ある一様に加速された観測者が正規直交座標系をつくりたいとする．2.9 節の練習問題 21 から彼の世界線は

$$t(\lambda) = a\sinh\lambda, \qquad x(\lambda) = a\cosh\lambda \tag{5.97}$$

で与えられる．ここで a は定数であり，$a\lambda$ は観測者の固有時間（彼の腕時計の示す時間）である．

(a) λ を固定し，a を変数と見なしたとき，式 (5.97) で記述される空間的な線は，観測者の世界線とその交差する点で直交することを示せ．式 (5.97) で λ を変えると，そのような曲線の**族**が得られる．

(b) 式 (5.97) は座標 (t, x) から**直交**座標 (λ, a) への変換を定義することを示せ．その座標を描き，それがもとの t–x 面の半分だけしか覆わないことを示せ．この座標は $|x| = |t|$ で定義される線上で特異になり，したがってそれは非連結な二つの領域を覆うことを示せ．

(c) この座標系でのメトリックとすべてのクリストッフェル記号を計算せよ．この観測者はクリストッフェル記号を適切に使い，座標が覆う一つの連結領域内にとどまる限り，完全に質のよい観測者である．この意味で特殊相対論でも加速度観測者を考えることができる．この座標の覆う領域の右半分はしばしば**リンドラー空間**とよばれ，その境界線 $x = \pm t$ は後に学ぶブラックホールの地平面に似た性質をもつ．

22 もし $U^\alpha\nabla_\alpha V^\beta = W^\beta$ ならば，$U^\alpha\nabla_\alpha V_\beta = W_\beta$ となることを示せ．

6
曲った多様体

6.1　可微分多様体とテンソル

曲った空間についての数学的な概念は**多様体**に始まる（終るわけではないが）．多様体とは，簡単にいうと，局所的にユークリッド空間と見なせる連続した空間のことである．多様体の概念に曲率の概念が加わってくる．多様体に曲率を導入することがこの章の課題である．まず多様体の概念について考えるが，それは単に“空間”を新しい言葉で言い直したものである．

多様体　球の表面は多様体である．同じように，n 次元ユークリッド空間の m 次元“超平面”も多様体である（$m \leqslant n$）．もっと抽象的な場合では，三次元ユークリッド空間のデカルト座標系の回転からなる集合は，多様体であることを下に示す．基本的には，多様体というのは，連続的なパラメーターを使って表示できる集合のことである．独立なパラメーターの数が多様体の**次元**であり，パラメーターそのものは多様体の**座標**である．先に述べた例について考えてみよう．球の表面は二つの座標 θ と ϕ で“パラメーター表示”される．m 次元“超平面”には m 個のデカルト座標があり，回転の集合は，回転軸の方向（二つのパラメーター）と，回転角（一つのパラメーター）からなる，三つの“オイラー角”でパラメーター表示できる．したがって，回転の集合は多様体であり，各点は一つの回転に対応していて，座標は 3 個のパラメーターをもつ．したがって，三次元多様体である．数学的には，点をパラメーターの値に対応づ

けることは，多様体上の点を，適切な次元のユークリッド空間の点に写像することだと考えることができる．これが，多様体が局所的にユークリッド空間に似ていて，“なめらか” でかつ，ある次元をもつという意味なのである．多様体を大域的にみたときのトポロジーは，ユークリッド空間とは全然違うこともあることは強調しておくべきであろう．たとえば，トーラスの表面は位相的にもユークリッド的ではない．しかし，局所的にはその対応はうまくつき，トーラスの表面の狭い領域はそれに接する平面に 1 対 1 に対応している．こういうふうにして多様体を考えるのである．多様体は，座標をもった空間で，局所的にはユークリッド的であるが，大域的にはねじれていようが，曲っていようが（連続でさえあれば）どうでもよい．

微分構造　　今後は “可微分多様体” のみを考えていく．これは連続で微分可能な空間である．おおざっぱにいうと，多様体の各点の近傍でスカラー関数の微分を保存するユークリッド空間へのなめらかな写像を定義できることを意味している．円錐はその頂点以外では微分可能である．物理で有用なほとんどすべての多様体は，ほとんどすべての場所で微分可能である．一般相対論での曲った時空も確かにそうである．

微分可能性を仮定するとただちに，一形式とベクトルを定義できる．多様体上の，ある座標系で，集合 $\{\phi_{,\alpha}\}$ の要素が一形式 $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ の成分となっているし，a と b を関数とするとき，$\{a\phi_{,\alpha}+b\psi_{,\alpha}\}$ の形の集合も一形式の場である．同様に，あらゆる曲線（パラメーターをたとえば λ とする）には，接ベクトル $\vec{V}$ があって，一形式 $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ を曲線に沿った ϕ の微分

$$\langle\tilde{\mathrm{d}}\phi,\vec{V}\rangle=\vec{V}(\tilde{\mathrm{d}}\phi)=\nabla_{\vec{V}}\phi=\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\lambda \tag{6.1}$$

に写像する線形関数として定義される．ベクトルのいかなる線形結合もまたベクトルである．このように定義される一形式とベクトルを使って，特殊相対論で行ったように，$\binom{M}{N}$ テンソルの集合をつくり上げることができる．今までのところ，メトリックの役割をする $\binom{0}{2}$ テンソルを決めていないので，一形式とベクトルの対応はついていない．しかし，それ以外はすべて，すでに特殊相対論のところで，極座標を使って行った場合と同じものである．こういうことができるのは微分可能性のおかげなので，すべてのテンソルの集合は多様体の “微

分構造”の主要部分だといってもよい．この言葉を使用する機会はあまりない．

概　観　テンソル代数の基本を概観しておくと便利である．次のような規則にまとめることができる．

(1)　テンソル**場**は各点でテンソルを定義している．

(2)　ベクトルと一形式は相互に作用して実数となる線形作用素である．線形性とは

$$\langle \tilde{p}, a\vec{V} + b\vec{W} \rangle = a\langle \tilde{p}, \vec{V} \rangle + b\langle \tilde{p}, \vec{W} \rangle$$
$$\langle a\tilde{p} + b\tilde{q}, \vec{V} \rangle = a\langle \tilde{p}, \vec{V} \rangle + b\langle \tilde{q}, \vec{V} \rangle$$

を意味し，a と b は任意のスカラー場である．

(3)　テンソルとは上記と同じように，一形式とベクトルに作用して実数を与える線形作用素である．

(4)　同じタイプの二つのテンソルが，ある基底に対して同じ成分をもつとき，すべての基底に対して同じ成分をもち，同一である（または，等しいとか，同じ）という．同じタイプのテンソルのみが等しくなることが可能である．特に，テンソルの成分がある基底に対してすべてゼロであるならば，すべての基底に対してもゼロであって，ゼロテンソルとよぶ．

(5)　テンソル場の成分を使ういくつかの操作を“許容テンソル操作”とよぶ．これらの操作によって，新たなテンソルの成分が求まるからである．

(i) スカラー場を掛けると同じタンプの新たなテンソルが得られる．

(ii) 同じタイプの二つのテンソルの成分の和は，同じタイプの新しいテンソルの成分を与える．（特に，同じタイプのテンソルのみが等しくなりうる．）

(iii) 任意のタイプの二つのテンソルの成分の積からは，二つのタイプの和をタイプとする新たなタイプのテンソルの成分が得られて，これを二つのテンソルの外積という．

(iv) $\binom{N}{M}$ テンソルの成分の共変微分（あとで説明する）からは $\binom{N}{M+1}$ テンソルの成分が得られる．

(v) $\binom{N}{M}$ テンソルの成分の一対の添字の縮約によって，$\binom{N-1}{M-1}$ テンソルの成分が求まる．(縮約は上付の添字と下付の添字の間でのみ定義されている．)

(6) ある式が，許容テンソル操作のみを使ってつくられたテンソルの成分を使って書かれており，その式がある基底に対して正しければ，その式はほかのどんな基底に対しても成り立つ．この結果はたいへんに有用なものである．方程式は［上記の (5) により］同じタイプの二つのテンソルの成分の間のみで等しくなりうるという事実によるもので，それはまた［(4)によって］いかなる系でも正しいのである．

6.2 リーマン多様体

ここまでは多様体にメトリックを導入しなかった．実際，ある種の多様体ではメトリックは，考える問題によっては，不必要であったり不便なものであったりする．しかし，われわれの場合にはメトリックはきわめて基本的なものである．特殊相対論の場合と同様に，メトリックに，時計の進み方や二点間の距離に関する情報が含まれているからである．対称な $\binom{0}{2}$ テンソル場 $\mathbf{g}$ を選んで，各点でメトリックとして作用するようにした可微分多様体をリーマン多様体という．［厳密にいうと，メトリックが正定値，すなわちすべての $\vec{V} \neq 0$ に対して $\mathbf{g}(\vec{V}, \vec{V}) > 0$ のときに，リーマン多様体とよばれる．特殊相対論や一般相対論のような不定計量の場合には，擬リーマン多様体という．しかし，ここではその区別を考えなくてもよい．］重要なことは，メトリックを選び出すときに，多様体に構造をつけ加えたことである．メトリックによって，多様体の曲率が完全に決定されることをあとで示す．したがって，一つのメトリック $\mathbf{g}$ を選ぶと，多様体はある曲率をもち（たとえば，球の曲率），別のメトリック $\mathbf{g}'$ を選ぶと，多様体の曲率は別のものになる（たとえば，回転楕円体の曲率）．可微分多様体自身は“単純”であって，局所的にはユークリッド空間の点のように並んでいるが，遠近とか形状のない組織だっていない点の集りである．あとで示すように，メトリック $\mathbf{g}$ を与えることではじめて，特別の形が現れる．これからは，各点でメトリック $\mathbf{g}$ が定義されているリーマン多様体をしらべていく．

［完全を期すためには，実際にはメトリックを導入しない多様体上（いわゆる

“アフィン” 多様体）にも，曲率の概念を定義することは可能であることにふれておくべきかもしれない．実際，教科書の中にはこうしたやり方をしたものもある．しかし，一般相対論ではメトリックが本質的なので，メトリックによって曲率が定まる多様体を扱うことにしよう.]

メトリックと局所的平坦さ　メトリックはいうまでもなく，各点でのベクトルと一形式の間の写像を与える．したがって，ベクトルの場 $\vec{V}(\mathscr{P})$（$\mathscr{P}$ を任意の点として，$\vec{V}$ はその点 $\mathscr{P}$ に依存していることを表している）があったとき，それに対応する一形式の場 $\tilde{V}(\mathscr{P}) = \mathbf{g}(\vec{V}(\mathscr{P}),\quad)$ が，ただ一つ存在する．この写像は可逆であり，$\tilde{V}(\mathscr{P})$ に対応して $\vec{V}(\mathscr{P})$ がただ一つ定まる．$\mathbf{g}$ の成分を $g_{\alpha\beta}$ と書き，逆行列の成分を $g^{\alpha\beta}$ で表す．メトリックによって，特殊相対論のときと同様に添字の上げ下げができる．つまり，

$$V_\alpha = g_{\alpha\beta} V^\beta$$

という具合である．一般には，$\{g_{\alpha\beta}\}$ は場所の複雑な関数で，任意の座標系ではたとえば V_0 と V^0 の間には単純な関係があるとは限らなくなる．

一般の曲った多様体をしらべていきたいので，任意の座標系を使えなくてはならない．特殊相対論では，単純であるという理由でローレンツ（慣性）系のみを考えた．しかし，重力が存在すると，そうした系は大域的には存在できなくなるため，あらゆる座標を使い，したがって，特異的でないあらゆる変換を使わなくてはならなくなる．（ここで，特異でないというのは 5.2 節のように変換行列 $\Lambda^{\alpha'}{}_\beta \equiv \partial x^{\alpha'}/\partial x^\beta$ が逆行列をもつということである.）さて，行列（$g_{\alpha\beta}$）は定義から対称である．線形代数のよく知られた定理により（6.9 節の練習問題 3 参照），ある行列があって，その行列によって，対称行列は成分が $+1$ か -1 か 0 かの，どれかからなる対角行列に変換される．対角成分のうちの $+1$ の数は，（$g_{\alpha\beta}$）の正の固有値の数に等しいし，-1 の数は負の固有値の数と等しい．したがって，最初に 3 個の正の固有値と，1 個の負の固有値をもつような $\mathbf{g}$ を選んでおくと，適当な $\Lambda^{\alpha'}{}_\beta$ ととることにより，メトリックの成分を

$$
(g_{\alpha'\beta'}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv (\eta_{\alpha\beta}) \tag{6.2}
$$

とすることが，つねに可能である．今後は，式 (6.2) の行列に**のみ** $\eta_{\alpha\beta}$ を使う．これはいうまでもなく，特殊相対論のメトリックである．

ここで注意しておくべきことが二つある．まず式 (6.2) は，三つの正の固有値と一つの負の固有値をもつ行列の中から $(g_{\alpha\beta})$ を選ぶことができる場合に可能なのである．式 (6.2) の対角成分の和をメトリックの**符号数**という．特殊相対論と一般相対論では符号数は $+2$ である．したがって，先に物理的議論から導いた，いかなる事象点でも**局所的慣性系**をつねにつくることが可能であるという事実は，数学的にいえば，式 (6.2) のように，その事象点でメトリックが $\eta_{\alpha\beta}$ に変換できるということに帰着する．これはさらにいうと，重力を含んで時空を表すメトリックは，$+2$ の符号数をもたなくてはならないことを意味している．

二番目の注意は，各点で式 (6.2) へ変換する行列 $\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}$ は座標変換とは**限らない**ことである．つまり集合 $\{\tilde{\omega}^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}\tilde{\mathrm{d}}x^{\beta}\}$ は座標基底とは限らない．だいぶ前に述べた非座標基底の議論によれば式 (5.96)

$$
\frac{\partial \Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{\partial \Lambda^{\alpha'}{}_{\gamma}}{\partial x^{\beta}}
$$

が成り立つときに限って，座標変換といえるのである．

一般の重力場については，このことは成り立たない．もし座標変換なら，式 (6.2) があらゆる場所で成り立つ座標が存在して，大域的なローレンツ系となってしまうからである．しかし，ある点 $\mathscr{P}$ で式 (6.2) が成り立つ基底を見いだせば，点 $\mathscr{P}$ の近傍に式 (6.2) が "近似的に" 成り立つような座標系を見いだすことはできる．このことは，次の定理にまとめられる．この定理の証明はやや長いので，この節の最後に示す．多様体上の任意の点 $\mathscr{P}$ を選ぶ．すると，$\mathscr{P}$ を原点とし，

$$
g_{\alpha\beta}(x^{\mu}) = \eta_{\alpha\beta} + O[(x^{\mu})^2] \tag{6.3}
$$

となる座標系 $\{x^{\alpha}\}$ をとることができる．すなわち，点 $\mathscr{P}$ の近くではメトリッ

クが近似的に特殊相対論のものとなっていて，その差は座標の 2 次の大きさでしかない．今後，このような系を**局所ローレンツ系**または**局所慣性系**と名づける．式 (6.3) をもう少し正確にいうと

◆ $$g_{\alpha\beta}(\mathscr{P}) = \eta_{\alpha\beta} \quad (\text{すべての}\alpha,\ \beta\text{について}) \tag{6.4}$$

◆ $$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} g_{\alpha\beta}(\mathscr{P}) = 0 \quad (\text{すべての}\alpha,\ \beta,\ \gamma\text{について}) \tag{6.5}$$

であるが，一般には多様体が厳密に平坦でなければ，

◆ $$\frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\mu} g_{\alpha\beta}(\mathscr{P}) \neq 0$$

が少なくとも α，β，γ，μ のどれかの値に対して成り立っている．

局所ローレンツ系が存在するというのは，どのように曲った空間でも，任意の点において，その空間に接する平坦な空間があることをいっているにすぎない．平坦な時空での直線とは，自由粒子の世界線であることを思い起すと，曲った時空でメトリックの 1 階微分が消えることは，自由粒子がこの座標系では局所的にまっすぐな線上を運動することを意味している．そうした座標系を使用して便利なのは，物理法則の式が平坦な空間のものとほとんど同じで，6.1 節の規則にしたがって書かれていれば，いかなる座標系でも正しいものとなるからである．この定理の証明はこの節の最後に示すが，ていねいに学んでもらいたい．

長さと体積　いうまでもなく，メトリックによって曲線の長さを定義できるようになる．$\mathrm{d}\vec{x}$ をある曲線の微小変位ベクトルとしよう．このとき，$\mathrm{d}\vec{x}$ の長さの 2 乗は $\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta$ である．（これをメトリックの線要素とよぶことを思い出してもらいたい．）この量の絶対値の平方根をとれば，長さの尺度：$\mathrm{d}l \equiv |g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta|^{1/2}$ となる．これを積分して，

$$l = \int_{\substack{\text{along}\\\text{curve}}} |g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta|^{1/2} \tag{6.6}$$

$$= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left| g_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda} \right|^{1/2} \mathrm{d}\lambda \tag{6.7}$$

が得られる．ここで，λ は曲線を定義するパラメーターであり，その両端で λ_0 と λ_1 になっている．ところが接ベクトル $\vec{V}$ の成分は $V^\alpha = \mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}\lambda$ であるか

ら，最終的には

◆
$$l = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} |\vec{V} \cdot \vec{V}|^{1/2} \mathrm{d}\lambda \tag{6.8}$$

が任意の曲線の長さとなる．

時空での積分には体積の計算が重要になる．ここで“体積”というのは 4.4 節で出てきたガウスの法則の積分で使用した四次元体積のことである．局所ローレンツ系では，微小な四次元領域の体積は，$\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$ である．ここでは，$\{x^\alpha\}$ は考えている点において式 (6.3) のほぼローレンツ・メトリックを与える座標系である．ほかの座標系 $\{x^{\alpha'}\}$ では多変数の積分計算で知られているように，

$$\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 = \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})}\mathrm{d}x^{0'}\mathrm{d}x^{1'}\mathrm{d}x^{2'}\mathrm{d}x^{3'} \tag{6.9}$$

となり，ここで，$\partial(\quad)/\partial(\quad)$ は $\{x^{\alpha'}\}$ から $\{x^\alpha\}$ への変換のヤコビアンで，5.2 節で定義されているように，

$$\frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})} = \det \begin{pmatrix} \partial x^0/\partial x^{0'} & \partial x^0/\partial x^{1'} & \cdots \\ \partial x^1/\partial x^{0'} & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$
$$= \det(\Lambda^\alpha{}_{\beta'}) \tag{6.10}$$

である．この式を使ってヤコビアンを計算するのは少々面倒である．実際にはメトリックを使って，より簡単に計算できる．行列の用語でいえば，メトリックの成分の変換は

$$(g) = (\Lambda)(\eta)(\Lambda)^T \tag{6.11}$$

で，ここでは (g) は $g_{\alpha\beta}$ からなる行列，(η) は $\eta_{\alpha\beta}$ からなる行列で，“T” は転置行列を意味している．この式から，行列式の値は

$$\det(g) = \det(\Lambda)\det(\eta)\det(\Lambda^T) \tag{6.12}$$

を満足することがわかる．ところがどんな行列についても

$$\det(\Lambda) = \det(\Lambda^T) \tag{6.13}$$

であり，また式 (6.2) から

$$\det(\eta) = -1 \tag{6.14}$$

である．したがって

$$\det(g) = -[\det(\Lambda)]^2 \tag{6.15}$$

であることがわかる．さてここで，

$$g \equiv \det(g_{\alpha'\beta'}) \tag{6.16}$$

という記法を導入すると，式 (6.15) は

$$\det(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}) = (-g)^{1/2} \tag{6.17}$$

と書くことができる．こうして，式 (6.9) から

◆
$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 &= [-\det(g_{\alpha'\beta'})]^{1/2}\mathrm{d}x^{0'}\mathrm{d}x^{1'}\mathrm{d}x^{2'}\mathrm{d}x^{3'} \\ &= (-g)^{1/2}\mathrm{d}x^{0'}\mathrm{d}x^{1'}\mathrm{d}x^{2'}\mathrm{d}x^{3'} \end{aligned} \tag{6.18}$$

が得られる．これは非常に有用で，また概念的にいっても重要な結果である．平坦な空間での概念を，曲った空間での類似の概念へ一般化するために，局所的に平坦な座標系を使用するというやり方は，これからもしばしば使う議論で，いま示したものが最初の例だからである．ここでは，局所的に平坦な座標系での $\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 = \mathrm{d}^4x$ から始めた．まず，$\mathscr{P}$ でのこの体積要素は，物差しと時計で物理的に測定できる体積であると考えた．この狭い領域では空間はミンコフスキー空間だからである．次に，これを任意の座標系 $\{x^{\mu'}\}$ で表すと式 (6.18) のように $(-g)^{1/2}\mathrm{d}^4x'$ となり，それがとりもなおさず任意の座標系での任意の点での曲った空間の体積を表していることがわかった．この量を**固有体積要素**とよぶ．

いうまでもなく，その中にメトリックが現れたのは不思議ではない．メトリックによって長さが決るからである．任意の座標系で固有体積要素を求めようとするときには，d^4x に $(g_{\alpha\beta})$ の行列式の符号を変えたものの平方根を掛けるということさえ憶えておけばよい．

三次元での例をだすとわかりやすいであろう．この場合には，メトリックが

正定値であるので［式 (6.14) がプラスの符号をもつ］，固有体積は $(g)^{1/2}$ である．球面座標では線要素は $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$ であるから，メトリックは

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{6.19}$$

である．その行列式は $r^4\sin^2\theta$ で，$(g)^{1/2}\mathrm{d}^3x'$ は

$$r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{6.20}$$

となり，これは周知のように，球面座標系を使ったときの正しい体積要素になっている．

局所的平坦性定理の証明　　$\{x^\alpha\}$ を任意の座標系とし，$\{x^{\alpha'}\}$ を求めたい座標系とする．この系は，ある点 $\mathscr{P}$ では慣性系になっている．（四次元多様体上の点はもちろん事象である.）このとき

$$x^\alpha = x^\alpha(x^{\mu'}) \tag{6.21}$$

$$\Lambda^\alpha{}_{\mu'} = \partial x^\alpha/\partial x^{\mu'} \tag{6.22}$$

という関係がある．$\Lambda^\alpha{}_{\mu'}$ を点 $\mathscr{P}$（その座標を $x^{\mu'}{}_0$ とする）のまわりでテイラー展開すると，点 $\mathscr{P}$ の近傍の任意の点 $\vec{x}$ での変換，

$$\begin{aligned}\Lambda^\alpha{}_{\mu'}(\vec{x}') &= \Lambda^\alpha{}_{\mu'}(\mathscr{P}) + (x^{\gamma'} - x_0^{\gamma'})\frac{\partial\Lambda^\alpha{}_{\mu'}}{\partial x^{\gamma'}} \\ &\quad + \frac{1}{2}(x^{\gamma'} - x_0^{\gamma'})(x^{\lambda'} - x_0^{\lambda'})\frac{\partial^2\Lambda^\alpha{}_{\mu'}}{\partial x^{\lambda'}\partial x^{\gamma'}} + \cdots \\ &= \Lambda^\alpha{}_{\mu'}|_{\mathscr{P}} + (x^{\gamma'} - x_0^{\gamma'})\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\gamma'}\partial x^{\mu'}}\bigg|_{\mathscr{P}} \\ &\quad + \frac{1}{2}(x^{\gamma'} - x_0^{\gamma'})(x^{\lambda'} - x_0^{\lambda'})\frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial x^{\lambda'}\partial x^{\gamma'}\partial x^{\mu'}}\bigg|_{\mathscr{P}} + \cdots\end{aligned} \tag{6.23}$$

となる．メトリックも同様に展開して，

$$g_{\alpha\beta}(\vec{x}') = g_{\alpha\beta}|_{\mathscr{P}} + (x^{\gamma'} - x_0^{\gamma'})\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma'}}\bigg|_{\mathscr{P}}$$

$$+\frac{1}{2}(x^{\gamma'}-x_0^{\gamma'})(x^{\lambda'}-x_0^{\lambda'})\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda'}\partial x^{\gamma'}}\bigg|_{\mathscr{P}}+\cdots \tag{6.24}$$

が得られる．これらの式を変換

$$g_{\mu'\nu'}=\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}g_{\alpha\beta} \tag{6.25}$$

に代入して，

$$\begin{aligned}g_{\mu'\nu'}(\vec{x}')=&\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}|_{\mathscr{P}}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}|_{\mathscr{P}}g_{\alpha\beta}|_{\mathscr{P}}\\&+(x^{\gamma'}-x_0^{\gamma'})[\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}|_{\mathscr{P}}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}|_{\mathscr{P}}g_{\alpha\beta,\gamma'}|_{\mathscr{P}}\\&+\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}|_{\mathscr{P}}g_{\alpha\beta}|_{\mathscr{P}}\partial^2x^{\beta}/\partial x^{\gamma'}\partial x^{\nu'}|_{\mathscr{P}}\\&+\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}|_{\mathscr{P}}g_{\alpha\beta}|_{\mathscr{P}}\partial^2x^{\alpha}/\partial x^{\gamma'}\partial x^{\mu'}|_{\mathscr{P}}]\\&+\frac{1}{2}(x^{\gamma'}-x_0^{\gamma'})(x^{\lambda'}-x_0^{\lambda'})[\cdots]\end{aligned} \tag{6.26}$$

が得られる．さて，式 (6.21) の変換はまだ決めていなかったが，テイラー展開によって，定義することができる．そのために，自由にとりうる変数の数を勘定してみよう．行列 $\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}|_{\mathscr{P}}$ には 16 個の要素があり，それらすべては自由に決められる．$\{\partial^2x^{\alpha}/\partial x^{\gamma'}\partial x^{\mu'}|_{\mathscr{P}}\}$ には $4\times10=40$ 個の自由に決定できる要素がある．（γ' と μ' については**対称**であるので，$4\times4\times4$ ではないことに注意せよ．）$\{\partial^3x^{\alpha}/\partial x^{\lambda'}\partial x^{\gamma'}\partial x^{\mu'}|_{\mathscr{P}}\}$ は $4\times20=80$ の成分をもつ．ここで，λ', γ', μ' の**すべての**並べ替えに対しての対称性を考えると，独立な並び方は 20 個になるからである．[n を各添字のとりうる数であるとすれば，3 個の添字についての一般的な表現は，$n(n+1)(n+2)/3!$ である．われわれの扱っているのは，n が 4 の場合である．] 一方 $g_{\alpha\beta}|_{\mathscr{P}}$，$g_{\alpha\beta,\gamma'}|_{\mathscr{P}}$，$g_{\alpha\beta,\gamma'\mu'}|_{\mathscr{P}}$ はすべて最初に与えられたものである．これらは，一般的には，それぞれ 10 個，$10\times4=40$ 個，$10\times10=100$ 個の独立な成分をもつ．最初に問題になるのは，式 (6.4) を満たすこと，つまり

$$g_{\mu'\nu'}|_{\mathscr{P}}=\eta_{\mu'\nu'} \tag{6.27}$$

とできるかということである．この式は

$$\eta_{\mu'\nu'}=\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}|_{\mathscr{P}}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}|_{\mathscr{P}}g_{\alpha\beta}|_{\mathscr{P}} \tag{6.28}$$

と書き直せる．対称性からこの式は 10 個の方程式で，一般の行列の場合に独立なものである．これを満たすのに，$\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}|_{\mathscr{P}}$ に現れる 16 個の任意の定数が使える．したがって，この式は $\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}|_{\mathscr{P}}$ のなかの 6 個の要素を指定しないで，満足させうる．この 6 個はメトリック $\eta_{\mu'\nu'}$ の形を保存するローレンツ変換の 6 自由度に対応している．つまり，速度 $\boldsymbol{v}$（3 個の自由なパラメーター）で動かしたり，二つの角度で指定される軸のまわりの角 θ の回転である．これらが，局所慣性系を慣性系に保つ $\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}|_{\mathscr{P}}$ のなかの 6 個の自由度である．

次の問題は式 (6.26) の 40 個の $\partial\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}/\partial x^{\gamma'}|_{\mathscr{P}}$ を選んで，式 (6.5),

$$g_{\alpha'\beta',\mu'}|_{\mathscr{P}}=0 \tag{6.29}$$

という 40 個の式を満たすことが可能かということである．40 個と 40 個だから，何とか可能である．$\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}|_{\mathscr{P}}$ という行列を考えるとき，$\Lambda^{\alpha}{}_{\mu',\gamma'}|_{\mathscr{P}}$ をうまく選んで，$g_{\alpha'\beta',\mu'}|_{\mathscr{P}}=0$ とするように，点 $\mathscr{P}$ の近傍で座標を決めるやり方は，ただ一通り可能である．したがって，局所ローレンツ変換以外の自由度はなくなる．

最後に，今の議論を高次まで続けられるであろうか？　100 個の式 $g_{\alpha'\beta',\mu'\lambda'}|_{\mathscr{P}}=0$ を満足するように，80 個の $\Lambda^{\alpha}{}_{\mu',\gamma',\lambda'}|_{\mathscr{P}}=0$ を決められるであろうか？ $80<100$ であるから，答は不可能である．一般のメトリックでは，2 階微分 $g_{\alpha'\beta',\mu',\lambda'}|_{\mathscr{P}}$ には“自由度”が 20 ある．$100-80=20$ なので，一般には 2 階微分の少なくとも 20 個は消えないことになる．

したがって，一般のメトリックは $\mathscr{P}$ でのメトリックの値（この値はつねに $\eta_{\alpha\beta}$ とすることができる）や，その 1 階微分（これはゼロにできる）ではなく，消し去ることのできない 20 個の 2 階微分で特徴づけられるのである．もちろん，平坦な空間では 20 個すべてがゼロとなる．しかし一般にはゼロとはならない．

6.3　共　変　微　分

今度は微分の問題に移ろう．定義により，ベクトル場の微分は異なる二点でのベクトルの差を用いる（それらの点が限りなく近づくという極限で）．曲った空間では異なる点でのベクトルの差という概念は注意して扱わねばならない．

二つの点の間の空間は曲っており，また二つの点でベクトルが "同じ" 方向を向いているという表現もあいまいであるからである．しかし，リーマン多様体の局所平坦性が役に立つ．必要なのはベクトルが無限に近づいたときの極限で比べることである．しかも，その同じ極限で任意の点において可能な限り平坦な座標をとることができる．したがって，微小領域では多様体は平坦だと見なせて，その座標系で成分が定数となるベクトルの微分は，その点でゼロであるとしてよい．特に，局所慣性系の基底ベクトルの微分は点 $\mathscr{P}$ でゼロであるといえる．

これが共変微分の**定義**であることを強調しておきたい．これが正当であることは物理からいえる．局所慣性系は局所的にはすべてが特殊相対論的である系であり，特殊相対論においてはこれらの基底ベクトルの微分はゼロである．この定義から，これらの座標系では，この点でベクトルの共変微分は成分の偏微分で与えられる．(つまり，クリストッフェル記号は消える.) すると

$$V^{\alpha}{}_{;\beta} = V^{\alpha}{}_{,\beta} \qquad (\text{この系の点 } \mathscr{P} \text{ で}) \tag{6.30}$$

がただちに出てくる．もちろん，このことは他のテンソルについても成り立ち，メトリックも例外でなく

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} = 0 \qquad (\text{点 } \mathscr{P} \text{ で})$$

となる．[第二式は式 (6.5) にほかならない.] さて，$g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$ はある系（局所慣性系）で正しく，しかもテンソル方程式である．したがって，この関係は**任意の**基底でも正しく

◆
$$g_{\alpha\beta;\gamma} = 0 \qquad (\text{任意の基底}) \tag{6.31}$$

となる．これはきわめて重要な結果で，共変微分の定義から直接導かれる．5.4 節からわかるように，**もし** $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}$ ならば，式 (6.31) により**いかなる**メトリックに対しても式 (5.76) が導かれ

◆
$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \tag{6.32}$$

となる．6.9 節の練習問題 5 で，$\Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}$ がいかなる座標系においても対称であることを局所慣性系での平坦な空間での議論をくり返すことで証明してもらい，式

(6.32) がいかなる座標系でも正しいことが示される．最初に仮定したのは局所慣性系では点 $\mathscr{P}$ において $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = 0$ ということであった．しかし大切なのは，この系での点 $\mathscr{P}$ における $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ の微分は，$g_{\alpha\beta,\gamma\mu}$ を含むので，一般には全部がゼロにはならないことである．言い換えると，たとえある点で $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = 0$ となる座標系をとっても，クリストッフェル記号は一般には他の点ではゼロにならない．このことは，すべての点で $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = 0$ となる座標系が存在する平坦な空間との違いである．したがって，一般の多様体と平坦な多様体の違いは，任意の点でのクリストッフェル記号の微分に現れることがわかる．

式 (6.32) によれば，$g_{\mu\nu}$ が与えられたとき，任意の点で $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ を計算できることになる．したがって，$\mathbf{g}$ が与えられると共変微分をすべて計算できる．公式を示しておくと，

◆ $$V^\alpha{}_{;\beta} = V^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} V^\mu \tag{6.33}$$

◆ $$P_{\alpha;\beta} = P_{\alpha,\beta} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} P_\mu \tag{6.34}$$

◆ $$T^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} = T^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma} T^{\mu\beta} + \Gamma^\beta{}_{\mu\gamma} T^{\alpha\mu} \tag{6.35}$$

のようにまとめられる．

発散の公式　　ベクトルの発散を扱うことがしばしばある．任意のベクトル場 V^α が与えられたとき，その発散は，式 (5.53) で定義され，

$$V^\alpha{}_{;\alpha} = V^\alpha{}_{,\alpha} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} V^\mu \tag{6.36}$$

である．この公式にはクリストッフェル記号のところに和が含まれており，式 (6.32) から

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\alpha} + g_{\beta\alpha,\mu} - g_{\mu\alpha,\beta}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\alpha} - g_{\mu\alpha,\beta}) + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu}\end{aligned} \tag{6.37}$$

というものである．簡単化するために項の並べ替えを行った．括弧の中は α と β について反対称になっていて，それが対称な $g^{\alpha\beta}$ と，α と β について縮約されることに注意してほしい．したがって，第一項は消えて（3.10 節の練習問題 26（a）参照）

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} \tag{6.38}$$

が得られる．$(g^{\alpha\beta})$ は $(g_{\alpha\beta})$ の逆行列なので，行列 $(g_{\alpha\beta})$ の行列式 g の微分は(6.9 節の練習問題 7 参照)

◆
$$g_{,\mu} = g g^{\alpha\beta} g_{\beta\alpha,\mu} \tag{6.39}$$

であることが示される．式 (6.38) でこのことを使うと，

◆
$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} = (\sqrt{-g})_{,\mu}/\sqrt{-g} \tag{6.40}$$

であることがわかる．そこで式 (6.36) の発散を

$$V^{\alpha}{}_{;\alpha} = V^{\alpha}{}_{,\alpha} + \frac{1}{\sqrt{-g}} V^{\alpha} (\sqrt{-g})_{,\alpha} \tag{6.41}$$

または

◆
$$V^{\alpha}{}_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} V^{\alpha})_{,\alpha} \tag{6.42}$$

と書き表すことができる．この形は式 (6.36) よりずっと簡単な公式になっている．またこの形はガウスの法則を使うにさいしても大切である．(固有体積要素を使って) 発散を体積積分とすると

$$\int V^{\alpha}{}_{;\alpha} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x = \int (\sqrt{-g} V^{\alpha})_{,\alpha}\, \mathrm{d}^4 x \tag{6.43}$$

のように表しうる．最後の形は単に偏微分を含んでいるわけであるから，特殊相対論のときのように (4.8 節)，ガウスの法則が適用できて，

$$\int (\sqrt{-g} V^{\alpha})_{,\alpha} \mathrm{d}^4 x = \oint V^{\alpha} n_{\alpha} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^3 S \tag{6.44}$$

となる．つまり

◆
$$\int V^{\alpha}{}_{;\alpha} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x = \oint V^{\alpha} n_{\alpha} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^3 S \tag{6.45}$$

である．したがって，ガウスの法則は曲った多様体で式 (6.45) で与えられる形で適用される．このときには発散は固有体積で積分し，表面積分では**固有面積要素** $n_{\alpha}\sqrt{-g}\mathrm{d}^3 S$ を使う必要がある．

6.4 平行移動，測地線，曲率

ここまでは，局所平坦性定理を使うことによって，曲った多様体上での数学的準備を，曲率をあからさまに使用しないで，できる限りたくさん行ってきた．あとは，曲率の正確な数学的定義を与えなくてはならない．曲率には二種類あって，内在的曲率と外在的曲率を区別することは重要である．たとえば，円筒を考えてみよう．円筒は一つの方向には丸いので，円筒は曲っていると考える．これは**外在的**曲率である．円筒が存在する平坦な三次元空間との関係で現れる曲率である．一方，円筒というものは，一枚の平らな紙を破ったり，しわをつけたりすることなく巻き上げることでつくられる．したがって，**内在的**形態はもとの紙のものと同じで，平坦である．つまり，円筒の表面の任意の 2 点間の距離はもとの平らな紙の上での距離と同じである．また，平行線はどこまで行っても平行である．実際，ユークリッド幾何の**すべての**公理は円筒面上で成り立つ．その表面上のみを動ける二次元の "蟻" にとっては，円筒は平坦であって，ただある方向へまっすぐ進むと，もとの場所へ戻ってしまうという点で，全体的なトポロジーのみが，ちょっと変ったものである．n 次元の多様体の**内在的**幾何学では，その多様体内部から離れることのない（円筒の場合であれば，二次元面内での）道筋上にある点の相互の関係を問題とする．円筒の**外在的**曲率が現れてくるのは，円筒面がより高い次元の空間の中の面であると考え，またその曲面内にある曲線を，その曲面から離れていく "直線" と比べることで曲り方をしらべるからである．したがって，**外在的**曲率は高次元空間の概念に依存している．本書で時空の曲率の話をするときはその**内在的**曲率のことである．すべての世界線は，時空中に存在せざるをえないことは明らかだからである．われわれの四次元空間がより高次の空間の中に存在しているのか否かは，ひも理論で議論されている問題であり未解決な状態である．重要なのは時空の内在的幾何学のみである．

今みてきたように，円筒は内在的には平坦である．一方，球は内在的に曲面なのである．このことをしらべるには，図 6.1 のように，点 A と点 B において，赤道に垂直な，つまり平行な二つの直線を考えよう．これらを局所的にまっす

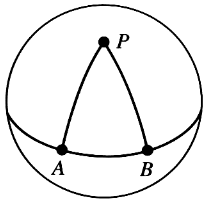


図 6.1 球面上の三角形 APB

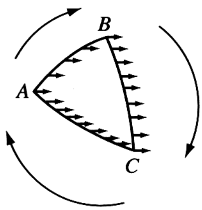


図 6.2 平坦な空間中で，曲線によってつくった“三角形”

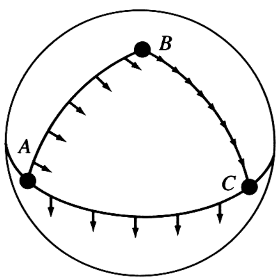


図 6.3 球面上の三角形のまわりの平行移動

ぐにのばしていくと大円上に弧を描き，2 直線は極 P で交わる．平行な直線を延長していくと平行ではなくなり，したがって，この空間は平坦ではない．

球の曲率を示すのには，もっと印象的なやり方がある．まず，平坦な空間を考える．図 6.2 に平坦な空間の中の閉じた経路が描かれている．A から出発して，すぐ前の点でのベクトルに平行なベクトルを各点で描く．このやり方で，A，B，C を回って A にもどってくる．最後に点 A で描かれたベクトルは，い

うまでもなく，もとのベクトルに平行である．球面上ではまったく違ったことが起る．図 6.3 に描かれた経路を考えてみよう．ベクトルは，球面上の二次元の蟻の見方で描かれるため，つねに球に接していることを忘れてはならない．そのこととは別に，各ベクトルはその直前のベクトルにできる限り平行に描かなくてはならない．この図の閉曲線では A と C は赤道面上で 90 度離れており，B は極にある．それぞれの弧は大円の一部であり，90 度の開きがある．A で赤道面に平行なベクトルを選ぶ．したがって，B に向かって移動していくと，新しく描かれる各ベクトルは弧 AB に垂直となる．B に着いたとき，ベクトルは BC に接している．そこで，B から C へ行くときには，BC に接するように描くことになる．これらのベクトルは C で赤道面に垂直であるので，C から A の間では新たなベクトルは赤道面に垂直のままとなる．こうしてつくっていくと，ベクトル場は 90 度回転してしまう．各ベクトルはその隣のものに平行に描いたにもかかわらず，閉曲線を 1 周すると，もとにもどらない．こうしたことは平坦な空間では起らないのだから，球面の曲率に影響されたに違いない．

この結果には深い意味がある．曲った多様体上では，大域的に平行なベクトル場を定義することが不可能なのである．局所的には，たとえばある点から別の点へベクトルを平行に保ってその長さを変えないように移動するやり方を与えることで，平行性を定義できる．しかしそのような点 A から点 B への "平行移動" で得られる結果は考える道筋によって異なる．したがって点 A でのベクトルが点 B でのあるベクトルに平行か否か（あるいは同じであるか否か）を述べることはできない．

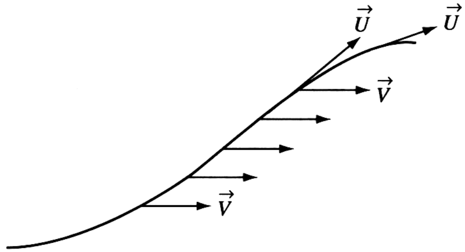


図 6.4　$\vec{U}$ に沿った $\vec{V}$ の平行移動

平行移動　いま球面上で示したような操作を平行移動という．ベクトル場 $\vec{V}$ がその球面上で定義されているとして，図 6.4 のようにある曲線に沿って移動するとどうなるかをしらべてみよう．もし曲線上の無限小離れた点でのベクトル $\vec{V}$ が平行で同じ長さならば，$\vec{V}$ はその曲線に沿って平行移動されたという．このことを式で表すことはやさしい．$\vec{U} = \mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}\lambda$ が曲線に接する（λ は曲線に沿ったパラメーターであり，$\vec{U}$ は必ずしも規格化されていなくてもよい）とき，局所慣性座標系では点 $\mathscr{P}$ での $\vec{V}$ の成分は曲線に沿って一定でなくてはならない．

$$\frac{\mathrm{d}V^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \tag{6.46}$$

書き換えると，

$$\frac{\mathrm{d}V^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} = U^\beta V^\alpha{}_{,\beta} = U^\beta V^\alpha{}_{;\beta} = 0 \tag{6.47}$$

となる．最初の等号は曲線に沿った関数（今の場合には V^α）の微分の定義であり，次の等号はここでの座標系では点 $\mathscr{P}$ で $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = 0$ となることから出てくる．しかるに三番目の等式は系に依存しない表現であって，任意の基底に対して成り立つので，これを $\vec{U}$ **に沿った** $\vec{V}$ **の平行移動の系に依存しない定義**とすることができる．

◆ $$U^\beta V^\alpha{}_{;\beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\vec{V} = \nabla_{\vec{U}}\vec{V} = 0 \tag{6.48}$$

である．最後の式では式 (3.67) で導入した $\vec{U}$ に沿った微分の記号を使った．

測地線　平坦な空間での一番重要な曲線は直線である．ユークリッド幾何の公理の一つは，平行な 2 直線はどこまで延長しても平行であるというものである．“どこまで延長しても” という言葉の意味は何であろうか？　ユークリッドは二つの直線の距離が一定であるように延長することを意味してはいない．そのようにしても，2 直線は曲ることもありうるからである．この公理でいおうとしているのは，各直線はそれまでと同じ方向をとり続けるということである．もう少し正確にいえば，ある一点での直線の接線は直前の点での接線に平行だということである．実際，ユークリッド空間での直線は，その接線ベクトルが平行移動される**唯一の**曲線である！　曲った空間でも，接ベクトルを平行移動することで “できる限りまっすぐな” 線を描くことができる．こうした曲線を**測地線**といい，

◆
$$\{\vec{U}\text{が測地線に平行}\} \Leftrightarrow \nabla_{\vec{U}}\vec{U} = 0 \tag{6.49}$$

となる（局所慣性系ではこれらの線は直線となることに注意）．成分で書くと，

$$U^\beta U^\alpha{}_{;\beta} = U^\beta U^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} U^\mu U^\beta = 0 \tag{6.50}$$

と表される．さて λ を曲線のパラメーターとすると，$U^\alpha = \mathrm{d}x^\alpha/d\lambda$, $U^\beta\partial/\partial x^\beta = \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ だから，

◆
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\right) + \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \tag{6.51}$$

となる．クリストッフェル記号 $\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}$ は座標 $\{x^\alpha\}$ の既知関数であるから，この式は $x^\alpha(\lambda)$ の非線形（準線形）の 2 階微分方程式である．これは $\lambda = \lambda_0$ で $x_0^\alpha = x^\alpha(\lambda_0)$ と $U_0^\alpha = (\mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}\lambda)_{\lambda_0}$ という初期条件が与えられればただ一つの解をもつ．したがって，初期の位置（x_0^α）と初期の方向（U_0^α）を与えることで，ただ一つの測地線が得られる．

数学的にはパラメーターを変えると，（曲線の通る点は変えないが）曲線が変ることを思い出そう．いま λ がある測地線のパラメーターで［したがって式 (6.51) が満たされている］，新しいパラメーターを，（曲線の位置によらない）**定数** a と b を使って

$$\phi = a\lambda + b \tag{6.52}$$

で定義すると，ϕ はやはり式 (6.51) が成り立つパラメーターであって，

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\phi^2} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\phi} = 0$$

となっている．一般的には，式 (6.52) のような λ の線形変換**によってのみ**測地線の式を満たす新しいパラメーターが与えられる．上に述べた λ や ϕ のようなパラメーターを**アフィンパラメーター**という．厳密にいえば，測地線と同じ経路をたどっても非アフィンパラメーターでパラメーターづけられた曲線は測地線ではない．

測地線はまた**停留曲線**でもある．つまり，曲線の 1 次の微小変化に対して，任意の 2 点間で曲線の長さが変化しない．このことを，式 (6.7) を使って λ_0 と λ_1 を固定した場合に対するオイラー–ラグランジュ方程式を導き，それが式 (6.32) を使うと式 (6.51) になることを，各自で証明してもらいたい．これはとてもよ

い練習になる．測地線に沿った固有距離がそれ自身アフィンパラメーターになることも証明することができる（6.9 節の練習問題 13〜15 参照）．

6.5 曲率テンソル

われわれはやっと多様体の内在的曲率の数学的表現を述べる段階に達した．閉じた曲線のまわりでベクトルを平行移動するあの奇妙な例にもどろう．そして，それを曲率の**定義**に使う．多様体の中に非常に小さい閉じた曲線を考えよう（図 6.5）．その四辺は座標 $x^1=a$, $x^1=a+\delta a$, $x^2=b$, $x^2=b+\delta b$ にあるとする．点 A で定義されたベクトル $\vec{V}$ が点 B に平行移動される．平行移動の法則により $\nabla_{\vec{e}_1}\vec{V}=0$ で，

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} = -\Gamma^\alpha{}_{\mu 1}V^\mu \tag{6.53}$$

が得られる．点 A から点 B まで積分すると

$$\begin{aligned} V^\alpha(B) &= V^\alpha(A) + \int_A^B \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 \\ &= V^\alpha(A) - \int_{x^2=b} \Gamma^\alpha{}_{\mu 1}V^\mu \mathrm{d}x^1 \end{aligned} \tag{6.54}$$

となる．ここで積分記号の下の “$x^2=b$” という表記は経路 AB を意味している．B から C, D への同様な移動によって，

$$V^\alpha(C) = V^\alpha(B) - \int_{x^1=a+\delta a} \Gamma^\alpha{}_{\mu 2}V^\mu \mathrm{d}x^2 \tag{6.55}$$

$$V^\alpha(D) = V^\alpha(C) + \int_{x^2=b+\delta b} \Gamma^\alpha{}_{\mu 1}V^\mu \mathrm{d}x^1 \tag{6.56}$$

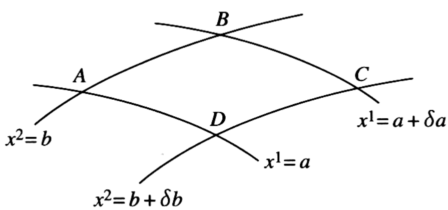


図 6.5 座標格子の微小部分

が得られる．最後の積分は C から D への移動の方向が x^1 の負の方向なので符号が変っている．同様にして曲線の最後の部分は

$$V^\alpha(A_{\text{final}}) = V^\alpha(D) + \int_{x^1=a} \Gamma^\alpha{}_{\mu 2} V^\mu \mathrm{d}x^2 \tag{6.57}$$

である．式 (6.54)～(6.57) を足し合わせて $V^\alpha(A)$ の正味の変化は δV^α で，

$$\begin{aligned}\delta V^\alpha &= V^\alpha(A_{\text{final}}) - V^\alpha(A_{\text{initial}}) \\ &= \int_{x^1=a} \Gamma^\alpha{}_{\mu 2} V^\mu \mathrm{d}x^2 - \int_{x^1=a+\delta a} \Gamma^\alpha{}_{\mu 2} V^\mu \mathrm{d}x^2 \\ &\quad + \int_{x^2=b+\delta b} \Gamma^\alpha{}_{\mu 1} V^\mu \mathrm{d}x^1 - \int_{x^2=b} \Gamma^\alpha{}_{\mu 1} V^\mu \mathrm{d}x^1 \end{aligned} \tag{6.58}$$

となる．平坦な空間でのように $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ と V^μ が曲線上で定数であれば，上の式はそれぞれの項が相殺し合うことに注意しよう．しかし曲った空間では，そうはならない．同様な積分をつなぎ合せて考え，経路の微小な離れの大きさの 1 次までを考慮すると，最低次までの結果は

$$\begin{aligned}\delta V^\alpha &\simeq -\int_b^{b+\delta b} \delta a \frac{\partial}{\partial x^1}(\Gamma^\alpha{}_{\mu 2} V^\mu) \mathrm{d}x^2 \\ &\quad + \int_a^{a+\delta a} \delta b \frac{\partial}{\partial x^2}(\Gamma^\alpha{}_{\mu 1} V^\mu) \mathrm{d}x^1 \end{aligned} \tag{6.59}$$

$$\approx \delta a \delta b \left[-\frac{\partial}{\partial x^1}(\Gamma^\alpha{}_{\mu 2} V^\mu) + \frac{\partial}{\partial x^2}(\Gamma^\alpha{}_{\mu 1} V^\mu) \right] \tag{6.60}$$

が得られる．この式にはクリストッフェル記号と V^α の微分が含まれている．V^α の微分は式 (6.53) とこの式で 1 を 2 に置き換えた式を使って消去できる．その結果 (6.60) は

$$\delta V^\alpha = \delta a \delta b [\Gamma^\alpha{}_{\mu 1,2} - \Gamma^\alpha{}_{\mu 2,1} + \Gamma^\alpha{}_{\nu 2}\Gamma^\nu{}_{\mu 1} - \Gamma^\alpha{}_{\nu 1}\Gamma^\nu{}_{\mu 2}] V^\mu \tag{6.61}$$

と変形される．（この式を導くには，Γ の 2 次の項においてダミーの添字のつけ換えをする必要がある．）この式は V^μ に数を掛けて μ で和をとったことになっていることに注意せよ．さて，添字 1 と 2 が現れているのは経路を座標軸に沿って選んだためである．この式は 1 と 2 に関して反対称になっている．閉曲線を逆方向に回せば（つまり 1 と 2 の役割を交換すると），変化量 δV^α の符

号は逆になるからである．一般の座標曲線 x^σ と x^λ を使うと，

$$\begin{aligned}\delta V^\alpha &= \text{最初に}\delta a\vec{e}_\sigma\text{，次に}\delta b\vec{e}_\lambda\text{，そして}-\delta a\vec{e}_\sigma\text{，最後に}\\ &\qquad -\delta b\vec{e}_\lambda\text{の移動による}V^\alpha\text{の変化}\\ &= \delta a\delta b[\Gamma^\alpha{}_{\mu\sigma,\lambda}-\Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda,\sigma}+\Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda}\Gamma^\nu{}_{\mu\sigma}-\Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma}\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}]V^\mu\end{aligned} \tag{6.62}$$

となることがわかる．このように δV^α は閉曲線の座標 “面積”$\delta a\delta b$ に依存する．したがって曲線の長さが一方向に倍になると，δV^α も倍になることは明らかである．このことは，δV^α が $\delta a\vec{e}_\sigma$ と $\delta b\vec{e}_\lambda$ に関して**線形性**をもつことを意味している．さらに，式 (6.62) で V^α そのものや，またベクトル $\delta\vec{V}$ から δV^α を与える基底一形式 $\tilde{\omega}^\alpha$ に関しても線形である．こうして次のような結果が得られる．

◆
$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\equiv\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu}-\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu}+\Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\nu}-\Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} \tag{6.63}$$

と定義すると，$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ は $\binom{1}{3}$ テンソルの成分でなくてはならない．そのテンソルは変数 $\tilde{\omega}^\alpha$，$\vec{V}$，$\delta a\vec{e}_\mu$，$\delta b\vec{e}_\nu$ を決めたとき，$\delta a\vec{e}_\mu$ と $\delta b\vec{e}_\nu$ で定義される閉曲線のまわりを平行移動したときの $\vec{V}$ の変化の成分 δV^α を与える．このテンソルを**リーマンの曲率テンソル R** という[1)]．

点 $\mathscr{P}$ における局所慣性系での $\mathbf{R}$ の成分をしらべておくとためになる．点 $\mathscr{P}$ では $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}=0$ であるが式 (6.32) から

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu,\sigma}=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu\sigma}+g_{\beta\nu,\mu\sigma}-g_{\mu\nu,\beta\sigma}) \tag{6.64}$$

となる．$g_{\alpha\beta}$ の 2 階微分はゼロではないから，点 $\mathscr{P}$ で

$$\begin{aligned}R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(&g_{\sigma\beta,\nu\mu}+g_{\sigma\nu,\beta\mu}-g_{\beta\nu,\sigma\mu}\\ &-g_{\sigma\beta,\mu\nu}-g_{\sigma\mu,\beta\nu}+g_{\beta\mu,\sigma\nu})\end{aligned} \tag{6.65}$$

となることがわかる．$g_{\alpha\beta}$ が対称であり，また偏微分はつねに交換可能だから

$$g_{\alpha\beta,\mu\nu}=g_{\alpha\beta,\nu\mu} \tag{6.66}$$

1)　これまでに導入した別の量の定義と同様に，リーマン・テンソルの全体の符号や添字の位置については，どうとるかの一般的な共通性はない．読者は別の本を読むときにはつねにどういう記法が使用されているかに注意せよ．

となることを使って，

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu}) \tag{6.67}$$

が得られる．添字 α を（点 $\mathscr{P}$ でのこの座標系で）下げると

◆ $$R_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv g_{\alpha\lambda}R^{\lambda}{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}) \tag{6.68}$$

を得る．この形にしておくと次の等式

◆ $$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{6.69}$$

◆ $$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 \tag{6.70}$$

は容易に証明される．このように $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ は最初の二つの添字の中での入れ換えについてと，また次の二つの添字の中での入れ換えについて反対称であり，最初の二つの添字と次の二つの添字の同時の入れ換えに対して対称である．式 (6.69) と式 (6.70) は一つの座標系で成り立つテンソル方程式であるので，すべての基底に対して成り立つ．[式 (6.67) のようなものはテンソル方程式ではないことに注意せよ．共変微分でなく偏微分があるからである．したがって，その形が導かれた座標系のみで成り立つ式である．]

式 (6.69) や式 (6.70) のような関係があるので 4 次元では，$R_{\alpha\beta\mu\nu}$ の（したがって $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$）の独立な成分は 20 個となることを証明できる（6.9 節の練習問題 18）．この数は 6.2 節で示したように座標変換で消せない $g_{\alpha\beta,\mu\nu}$ の独立な数と同じであるのは**偶然ではない**．このように $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ が曲率のテンソル的表現である．

平行性が大域的に定義されうるのが**平坦**な多様体である．つまりベクトルを任意の曲線に沿って，それ自身に平行に 1 周させて，最初の点に帰ってきたときに変化していないようにできる．このことは明らかに

◆ $$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \text{平坦な多様体} \tag{6.71}$$

であることを意味する．(ユークリッド平面での極座標でこうなっていることを示してみよ.)

曲率テンソルが重要な役割を果たすのは，ベクトル場 $\vec{V}$ に共変微分を 2 度ほ

どこす場合である．6.3 節でみたように一度の共変微分は平坦な空間でのものに似ている．メトリックが 1 次のオーダーまで平坦である座標系が存在するからである．しかし 2 階の微分では話が違う．

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu &= \nabla_\alpha ({V^\mu}_{;\beta}) \\ &= ({V^\mu}_{;\beta})_{,\alpha} + {\Gamma^\mu}_{\sigma\alpha} {V^\sigma}_{;\beta} - {\Gamma^\sigma}_{\beta\alpha} {V^\mu}_{;\sigma} \end{aligned} \tag{6.72}$$

なのである．点 $\mathscr{P}$ に原点のある局所慣性座標では Γ はすべてゼロであるが，その偏微分はゼロではない．したがって点 $\mathscr{P}$ で

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu = {V^\mu}_{,\beta,\alpha} + {\Gamma^\mu}_{\nu\beta,\alpha} V^\nu \tag{6.73}$$

が成り立つ．この表式は今選んだ座標系のみで成り立つものであり，次の式 (6.74) と式 (6.76) も同じであることを注意しておく．この座標系を使うと計算が単純になる．さて式 (6.73) で α と β を入れ換えた形を考えると，

$$\nabla_\beta \nabla_\alpha V^\mu = {V^\mu}_{,\alpha,\beta} + {\Gamma^\mu}_{\nu\alpha,\beta} V^\nu \tag{6.74}$$

となる．この 2 式を引算すると，共変微分の作用素 ∇_α と ∇_β の**交換関係**が得られ，量子力学で使用するのと同じ記号を使えば，

$$\begin{aligned}[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\mu &\equiv \nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha V^\mu \\ &= ({\Gamma^\mu}_{\nu\beta,\alpha} - {\Gamma^\mu}_{\nu\alpha,\beta}) V^\nu \end{aligned} \tag{6.75}$$

と表される．

$${V^\mu}_{,\alpha,\beta} = {V^\mu}_{,\beta,\alpha} \tag{6.76}$$

であるから，V^μ の 2 階の微分を含む項は消えてしまう．（念のために注意しておくと ${V^\mu}_{,\alpha}$ は成分 V^μ の偏微分であるので，偏微分の規則により偏微分は交換しなければならない．一方，$\nabla_\alpha V^\mu$ はテンソル $\nabla \vec{V}$ の成分であり，$\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu$ はテンソル $\nabla\nabla\vec{V}$ の成分であって，α と β について対称でなければならない理由は（微分の計算からは）ない．式 (6.75) がゼロにならないことにより，共変微分を 2 回ほどこすとき，その 2 回の共変微分に関しては，一般に対称でないことを証明した．）さて，この系で（${\Gamma^\mu}_{\alpha\beta} = 0$）式 (6.75) と式 (6.63) を比べて，

点 $\mathscr{P}$ では

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]V^\mu = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}V^\nu \tag{6.77}$$

である．さて，これはテンソル方程式であるので，**任意の**座標系で成り立つ．リーマン・テンソルは共変微分の交換関係を与える．ここで局所慣性系座標であるという制限をとることができる．このようにして，交換関係の一般的なテンソル表現を導くことができた．したがって，曲った空間では，共変微分の順序に注意しなくてはならない．共変微分は交換しないのである．このことは高階のテンソルについても同じである．たとえば，$\binom{1}{1}$ テンソルなら，

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]F^\mu{}_\nu = R^\mu{}_{\sigma\alpha\beta}F^\sigma{}_\nu + R^\sigma{}_{\nu\alpha\beta}F^\mu{}_\sigma \tag{6.78}$$

である．つまり添字の**おのおのに**リーマン・テンソルがかかり，それぞれの符号はプラスである．($\mathbf{g}$ を使った添字の上げ下げは，$\nabla\mathbf{g} = 0$ だから，∇_α の影響を受けないので，すべての項は同じ符号を**もたなければならない．**)

式 (6.77) は，閉曲線のまわりでの平行移動を考えることで，リーマン・テンソルを導入したことと密接に関係している．平行移動の問題とは，$\vec{V}$ の変化をまずある方向について，そのあとで別の方向について計算し，逆の順序にしたときの変化量との差をとることだと考えられる．これは共変微分の交換で行っていることだからである．

測地線偏差　これまでたびたび，曲った座標系では平行線は延長していくと平行でなくなると述べてきた．この段階では，このことをリーマン・テンソルを使って数学的に定式化することができる．図 6.6 のように点 A と A' において平行で互いに接近した（接ベクトル $\vec{V}$ と $\vec{V}'$ をもつ）二つの測地線を考えよう．測地線上のアフィンパラメーターを λ とする．一方の測地線から他方へ

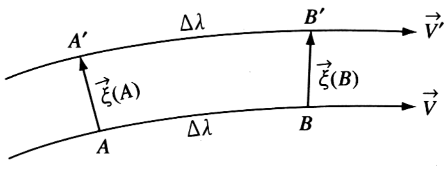


図 6.6　二つの測地線をつなぐベクトル $\vec{\xi}$ は，同じパラメーターの値の点を結んでいる

“達する”“連結ベクトル”$\vec{\xi}$を定義する．この$\vec{\xi}$はλで測って同じ間隔の点どうし（たとえば，AとA'，BとB'のように）を連結するものである．簡単化のために，点Aでの局所慣性系座標をとり，その中で座標軸x^0と測地線の方向が一致しており，その点でのλの変化の割合と同じ変化をするとしよう（これは単に座標のスケールを変えることに対応する）．したがって，$V^\alpha = \mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}\lambda$なので，点$A$では$V^\alpha = \delta^\alpha_0$である．点$A$での測地線方程式は

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda^2}\right|_A = 0 \tag{6.79}$$

となる．点Aではすべてのクリストッフェル記号が消えるからである．クリストッフェル記号は点A'では消えないので，点A'での測地線$\vec{V}'$の方程式は

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda^2}\right|_{A'} + \Gamma^\alpha{}_{00}(A') = 0 \tag{6.80}$$

であり，ここで点A'においてやはり$V^\alpha = \delta^\alpha_0$となるように座標系を選んだ．ところで，$A$と$A'$は$\vec{\xi}$だけしか離れていないので，

$$\Gamma^\alpha{}_{00}(A') \cong \Gamma^\alpha{}_{00,\beta}\xi^\beta \tag{6.81}$$

が得られる．ここで右辺は点Aで評価する．式(6.80)と式(6.81)から，

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda^2}\right|_{A'} = -\Gamma^\alpha{}_{00,\beta}\xi^\beta \tag{6.82}$$

となる．さてx^α (λ, 測地線$\vec{V}'$) $-$ x^α (λ, 測地線$\vec{V}$) という差はベクトル$\vec{\xi}$の成分ξ^αを与える．したがって，点Aで

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\alpha}{\mathrm{d}\lambda^2} = \left.\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda^2}\right|_{A'} - \left.\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda^2}\right|_A = -\Gamma^\alpha{}_{00,\beta}\xi^\beta \tag{6.83}$$

が得られる．この式は$\vec{\xi}$の成分の変化の仕方を与えている．しかし，座標系には任意性があるので，成分ξ^αの2階微分のみでなく，完全な2階の共変微分$\nabla_V\nabla_V\vec{\xi}$を求めたい．式(6.48)を使うと，

$$\begin{aligned}\nabla_V\nabla_V\xi^\alpha &= \nabla_V(\nabla_V\xi^\alpha)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\nabla_V\xi^\alpha) + \Gamma^\alpha{}_{\beta 0}(\nabla_V\xi^\beta)\end{aligned} \tag{6.84}$$

が得られる．さて，点 A で $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=0$ を使って，

$$\nabla_V \nabla_V \xi^{\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\xi^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta 0}\xi^{\beta}\right) + 0$$
$$= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}\xi^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta 0,0}\xi^{\beta} \tag{6.85}$$

が点 A で成り立つ．こうして

$$\nabla_V \nabla_V \xi^{\alpha} = (\Gamma^{\alpha}{}_{\beta 0,0} - \Gamma^{\alpha}{}_{00,\beta})\xi^{\beta}$$
$$= R^{\alpha}{}_{00\beta}\xi^{\beta} = R^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta}V^{\mu}V^{\nu}\xi^{\beta} \tag{6.86}$$

が得られる．ここで，二番目の等式は式 (6.63) から得られる．最終的な結果は系に依存せず，また点 A は任意に選んだものなので，**任意の**基底で

◆
$$\nabla_V \nabla_V \xi^{\alpha} = R^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta}V^{\mu}V^{\nu}\xi^{\beta} \tag{6.87}$$

である．平坦な空間での測地線はその間隔が変化しない．しかし，曲った空間ではそうではない．この式を測地線偏差の方程式といい，（隣接した粒子の軌道を変化させる原因となる）時空の曲率で，重力場の潮汐力を表現できることを数学的に示したものである．

6.6　ビアンキの恒等式；リッチ・テンソルとアインシュタイン・テンソル

式 (6.63) のリーマン・テンソルの成分にもどってみよう．その式を x^{λ} で微分し（単に偏微分），その結果を局所慣性系座標で考えると，

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta\mu\lambda} - g_{\alpha\mu,\beta\nu\lambda} + g_{\beta\mu,\alpha\nu\lambda} - g_{\beta\nu,\alpha\mu\lambda}) \tag{6.88}$$

が得られる．この式と，対称性 $g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}$，および偏微分は交換可能であることから

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu,\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda,\mu} = 0 \tag{6.89}$$

を示すことができる．いま考えている座標系ではこの点において $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}=0$ だから，この式は，

◆ $$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \tag{6.90}$$

と**同等**である．ところが，この式はテンソル方程式なので，**任意の**系で成り立つ．これを，**ビアンキの恒等式**とよび，これからの展開において，たいへん重要な式である．

リッチ・テンソル　ビアンキの恒等式から得られる結果をしらべる前に，リッチ・テンソル $R_{\alpha\beta}$ を

◆ $$R_{\alpha\beta} \equiv R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} = R_{\beta\alpha} \tag{6.91}$$

で定義しておく必要がある．これは $R^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta}$ の第一と第三の添字の縮約で得られるものである．第一と第二とか，第一と第四のような，他の添字での縮約も原理的には可能である．しかし $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ が α と β について μ と ν についてそれぞれ反対称であるので，それらの縮約は恒等的にゼロか $\pm R_{\alpha\beta}$ のいずれかに帰着してしまう．したがって，リッチ・テンソルがリーマン・テンソルを縮約してできる本質的に**唯一の**ものである．式 (6.69) からリッチ・テンソルは**対称**テンソルであることがわかる．(6.9 節の練習問題 25)．

同様にして，**リッチ・スカラー**は

◆ $$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} \tag{6.92}$$

アインシュタイン・テンソル　ビアンキの恒等式 (6.90) でリッチの縮約をほどこすと，

$$g^{\alpha\mu}[R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}] = 0$$

すなわち，

$$R_{\beta\nu;\lambda} + (-R_{\beta\lambda;\nu}) + R^{\nu}{}_{\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \tag{6.93}$$

となる．これを導くには，二つのことが必要である．まず，式 (6.31) によって

$$g_{\alpha\beta;\mu} = 0$$

であり，$g^{\alpha\mu}$ は $g_{\alpha\beta}$ のみの関数なので

$$g^{\alpha\beta}{}_{;\mu} = 0 \tag{6.94}$$

がいえる．したがって，$g^{\alpha\mu}$ と $g_{\beta\nu}$ は自由に共変微分に出し入れができ，添字の上げ下げは共変微分と可換である．二番目に，

$$g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} = -g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\mu\lambda;\nu} = -R_{\beta\lambda;\nu} \tag{6.95}$$

となることから式 (6.93) の第二項が説明される．式 (6.93) を縮約したビアンキの恒等式という．添字 β と ν について縮約すると，もっと有用な式が得られる．つまり

$$g^{\beta\nu}[R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R^{\mu}{}_{\beta\mu\lambda;\mu}] = 0$$

すなわち，

$$R_{;\lambda} - R^{\mu}{}_{\lambda;\mu} + (-R^{\mu}{}_{\lambda;\mu}) = 0 \tag{6.96}$$

である．最後の項の符号を出すために $\mathbf{R}$ の反対称性を使った．R はスカラーなので，すべての座標系で $R_{;\lambda} \equiv R_{,\lambda}$ であることに注意せよ．さて，式 (6.96) は

$$(2R^{\mu}{}_{\lambda} - \delta^{\mu}_{\lambda}R)_{;\mu} = 0 \tag{6.97}$$

の形に書ける．この式は 2 度縮約したビアンキの恒等式であるが，多くの場合単にビアンキの恒等式ともいわれる．対称テンソルを

◆
$$G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = G^{\beta\alpha} \tag{6.98}$$

で定義すると，式 (6.97) は

◆
$$G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \tag{6.99}$$

と表される．テンソル $G^{\alpha\beta}$ はリーマン・テンソルとメトリックだけでつくられていて，その発散は恒等式から自動的にゼロである．これをアインシュタイン・テンソルという．それは Einstein が最初に重力に関してその重要性を認識したからである．(実際，一般相対論でのアインシュタインの場の方程式は

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta}$$

であることを後で示す．ここで $T^{\alpha\beta}$ はストレス–エネルギーテンソルである．ビアンキの恒等式から

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} \equiv 0$$

であって，この式はエネルギーと運動量の局所的保存の式となる．しかし少し先を急ぎすぎたようである．)

6.7 曲率のまとめ

曲率を扱うための数学的道具立てはなかなか侮りがたいものである．この章にもたくさんの重要な式ができた．しかし暗記する必要のあるのはほとんどない．重要なことはそれらの導き方と特にその幾何学的な解釈を理解することである．解釈については以下数章にわたって扱っていくが，読者はすでに手にした事柄からでも数学的な意味内容をつかむことができる．曲った空間の重要な性質をまとめておこう．

(1) リーマン多様体上で考える．リーマン多様体はメトリックの定義されたなめらかな空間である．

(2) メトリックの符号数は $+2$ であり，一点において

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$
$$g_{\alpha\beta,\gamma} = 0 \Rightarrow \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = 0$$

とできる座標系がつねに存在する．

(3) 固有体積要素は

$$|g|^{1/2}\,\mathrm{d}^4x$$

である．ここで，g は要素が $g_{\alpha\beta}$ の行列の行列式である．

(4) 共変微分は局所慣性座標系では単にふつうの微分である．曲率のあるときには（$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\sigma} \neq 0$）共変微分は交換しない．

(5) 平行移動の定義は曲線に沿って共変微分がゼロということである．測地線ではその接ベクトルが平行移動される．そのアフィンパラメーターとして固有距離自体が使える．

(6) リーマン・テンソルは曲率を表現したものである．恒等的にゼロになるときのみ多様体は平坦である．リーマン・テンソルには（四次元の場合）20 個の独立な成分があり，微分方程式であるビアンキの恒等式を満たす．一般の座標系でのリーマン・テンソルは $g_{\alpha\beta}$ とその 1 階と 2 階の偏微分を

使って表される．リッチ・テンソル，リッチ・スカラー，アインシュタイン・テンソルはリーマン・テンソルの縮約で得られる．特に，アインシュタイン・テンソルは対称で2階のテンソルであり，10個の独立な成分をもつ．それらは4個の恒等式 (6.99) を満たす．

6.8　文　　献

可微分多様体の理論はたくさんの本で扱われている．次にあげるのは相対論以外の物理への応用を念頭において深く勉強するのにも適当である．Abraham と Marsden（1978），Bishop と Goldberg（1968），Hermann（1968），Isham（1999），Lovelock と Rund（1975），Schutz（1980*b*），標準的な数学の参考書には小林と野水（1963，1969），Schouten（1954），Spivak（1979）がある．

6.9　練　習　問　題

1　次の集合が多様体であるか否かとその理由を述べよ．集合が多様体でない例外的な点があれば，それを示せ．

(a) ハミルトン力学での位相空間．正準座標 q^i と運動量 p_i とのなす空間．

(b) 二次元ユークリッド空間の単位円の内部．

(c) n 個のものの置換の集合．

(d) 二次元ユークリッド空間 (座標が x と y) の部分集合で，$xy(x^2+y^2-1)=0$ の解．

2　練習問題1のうちの多様体について，ふつうにメトリックが使われるのはどれか？　また，そのメトリックは何か？　ふつうにはメトリックが定義されないのはどれか？　それはなぜか？

3　任意の対称行列 A（実数成分）に対して行列 H があって，H^TAH が対角行列で，その要素は A の固有値となることが知られている．

(a) R^TH^TAHR が H^TAH と固有値が大きさの順に上から下へ並んでいる点以外で同じ行列となるような行列 R が存在することを示せ．

(b) 第三の行列 N があって $N^TR^TH^TAHRN$ が対角行列で，その対角要素

が -1，0，$+1$ のいずれかであるようなものがあることを示せ．

(c) A が逆行列をもつとき (b) の対角要素はどれもゼロでないことを示せ．

(d) (a) ～ (c) から式 (6.2) を導く変換行列 Λ が存在することを示せ．

4 6.2 節の局所平坦性定理の証明に使われた次の結果を証明せよ．

(a) $\partial^2 x^\alpha/\partial x^{\gamma'}\partial x^{\mu'}|_0$ の独立な値の数は 40 である．

(b) $\partial^3 x^\alpha/\partial x^{\lambda'}\partial x^{\gamma'}\partial x^{\mu'}|_0$ の独立な値の数は 80 である．

(c) $g_{\alpha\beta,\gamma'\mu'}|_0$ の独立な値の数は 100 である．

5 (a) 曲ったリーマン空間の任意の座標系で $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}$ となることを証明せよ．

(b) このことを使って，式 (6.32) が平坦な空間の場合と同様に導かれることを示せ．

6 式 (6.37) の第 1 項が消えることを示せ．

7 (a) 余因子を使って行列 A の行列式の定義を示せ．

(b) 任意の 2×2 行列の行列式を微分して，式 (6.39) を満たすことを示せ．

(c) 式 (6.39) を（帰納法を使って）任意の $n\times n$ 行列に一般化せよ．

8 (6.40) と式 (6.42) を導く途中の計算を行ってみよ．

9 式 (6.42) から式 (5.56) が導かれることを示せ．式 (6.19) のメトリックについて発散公式を導け．

10 球面上の "直線" は大円である．球面上にある大円の一部を三辺とする三角形の内角の和は 180 度を越えることはよく知られている．ベクトルをそのような（図 6.3 のような）三角形に沿って平行移動していくとき，ベクトルの回転量は内角の和が 180 度を越えた分に等しいことを示せ．

11 この問題ではベクトル場 $\vec{V}$ が多様体上で大域的に平行であると考えうるための条件を求める．より正確にいえば，ベクトル場 $\vec{V}$ が方程式

$$(\nabla\vec{V})^\alpha{}_\beta = V^\alpha{}_{;\beta} = V^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}V^\mu = 0$$

を満たすための条件は何かということである．

(a) この式の，必要条件は偏微分の交換可能性から出てきて，**積分可能条件**といわれる．$V^\alpha{}_{,\beta,\nu} = V^\alpha{}_{,\nu,\beta}$ から

$$(\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta,\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu,\beta})V^\mu = (\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\Gamma^\mu{}_{\sigma\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\Gamma^\mu{}_{\sigma\beta})V^\sigma$$

が得られることを示せ．

(b) 添字をつけ換えて，これを

$$(\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta,\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu})V^{\mu} = 0$$

の形に変形せよ．この条件が**十分条件**でもある．

12　式 (6.52) が新しいアフィンパラメーターを定義することを示せ．

13　(a) $\vec{A}$ と $\vec{B}$ がある曲線に沿って平行移動されるとき，$\mathbf{g}(\vec{A},\vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{B}$ は定数であることを示せ．

(b) このことから，あるところで**測地線**が空間的（あるいは，時間的あるいはヌル的）であれば，全体で空間的（あるいは，時間的あるいはヌル的）であることをいえ．

14　接ベクトルが $\vec{V}$ である曲線に沿った固有距離は式 (6.8) で与えられる．曲線が測地線であれば，固有距離はアフィンパラメーターであることを示せ．（練習問題 13 の結果を使え．）

15　練習問題 13 と 14 を使って，2 点間の測地線の固有距離は，端点を固定して曲線を微小変化させたとき，この変化の 1 次のオーダーまでは不変であることを示せ．

16　(a) 式 (6.58) から式 (6.59)，(6.60) を導け．

(b) 式 (6.61) を導くまでの計算を行え．

17　(a) 式 (6.5) は $g^{\alpha\beta}{}_{,\mu}(P) = 0$ を意味することを示せ．

(b) このことを使って，式 (6.64) を確かめよ．

(c) 式 (6.68) が得られるまでの途中の計算を行え．

18　(a) 式 (6.68) から式 (6.69)，(6.70) を導け．

(b) 式 (6.69) によって $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ の独立な成分の数が $4\times4\times4\times4 = 256$ から $6\times7/2 = 21$ に減ることを示せ．（ヒント：添字を**ペア**で扱え．$R_{\alpha\beta\mu\nu}$ の最初のペアと次のペアについて独立な組合せの数を計算せよ．）

(c) 式 (6.70) は式 (6.69) と独立なものとしては，一つだけの関係式を与え，したがって独立な成分の数を 20 に減らすことを示せ．

19　ユークリッド平面での極座標では $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = 0$ となることを示せ．式 (5.45) またはそれに相当するものを使え．

20 式 (6.73) を確かめるのに必要な計算をせよ.

21 式 (6.78) に続く文章について考えよ. 括弧内の議論はなぜ

$$V^{\alpha}{}_{;\beta} = V^{\alpha}{}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} V^{\mu} \quad と \quad V_{\alpha;\beta} = V_{\alpha,\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} V_{\mu}$$

の式の符号には適用できないのか?

22 必要な計算を行って, 式 (6.84), (6.85), (6.86) を確かめよ.

23 式 (6.88) を証明せよ. [式 (6.67) を単に微分するだけでは求まらないことに注意せよ. この式は点 P でのみ成り立ち, その近傍では成り立っていないからである.]

24 式 (6.68) から式 (6.89) を確かめよ.

25 (a) リッチ・テンソルだけが, $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ を縮約して得られるもののなかで独立であって, ほかのすべてはリッチ・テンソルの倍数でしかないことを示せ.

(b) リッチ・テンソルは対称であることを示せ.

26 練習問題 17 (a) を使って式 (6.94) を証明せよ.

27 必要な計算を行い, 式 (6.95), (6.97), (6.99) を確かめよ.

28 (a) デカルト座標から球座標への座標変換を使って, 式 (6.19) を導け.

(b) 式 (6.19) から半径 r の球面上のメトリックの成分が, ふつうの球座標で ($g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta$, $g_{\theta\phi} = 0$) となることを導け.

(c) 球に対して成分 $g^{\alpha\beta}$ を求めよ.

29 極座標で単位球のリーマンの曲率テンソルを計算せよ. メトリックは練習問題 28 に与えられている. [練習問題 18 (b) と同じ議論で二次元では独立な成分はただ一つであることに注意せよ. したがって, $R_{\theta\phi\theta\phi}$ を計算し, ほかの成分はそれを使って求めよ.]

30 円柱表面のリーマンの曲率テンソルを計算せよ. (円柱面は平坦なので, ゼロになるはずである. 好みの座標系を使いメトリックを正しく表現したことを確かめよ.)

31 共変微分は通常の法則

$$(V^{\alpha\beta} W_{\beta\gamma})_{;\mu} = V^{\alpha\beta}{}_{;\mu} W_{\beta\gamma} + V^{\alpha\beta} W_{\beta\gamma;\mu}$$

に従うことを示せ. (ヒント:局所慣性系を使え.)

32　四次元多様体の座標が (u, v, w, p) であり，メトリックは $g_{uv} = g_{ww} = g_{pp} = 1$，そのほかはゼロである．

(a) 多様体は平坦で，その符号数は $+2$ であることを示せ．

(b) (a) の結果は多様体がミンコフスキー時空であることを示している．通常の座標 (t, x, y, z) への座標変換を求めよ．（ヒントとしては $\vec{e}_v \cdot \vec{e}_v$，$\vec{e}_u \cdot \vec{e}_u$ を計算してみること．）

33　三次元球面は四次元ユークリッド空間（座標が x, y, z, w）の三次元曲面で球の半径を r として，$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2$ で与えられる．

(a) 新しい座標 (r, θ, ϕ, χ) を $w = r\cos\chi$，$z = r\sin\chi\cos\theta$，$x = r\sin\chi\sin\theta\cos\phi$，$y = r\sin\chi\sin\theta\sin\phi$ で定義する．(θ, ϕ, χ) が球に対する座標であることを示せ．これはおなじみの極座標の拡張である．

(b) 半径 r の三次元球面のメトリックはこの座標系で，成分が $g_{\chi\chi} = r^2$，$g_{\theta\theta} = r^2\sin^2\chi$，$g_{\phi\phi} = r^2\sin^2\chi\sin^2\theta$，それ以外はゼロとなることを示せ．（練習問題 28 と同様な方法を使え．）

34　一般の座標系で一般のテンソルについて次の等式を証明せよ．

(a) $\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\ln|g|)_{,\nu}$

(b) $g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = -(g^{\alpha\beta}\sqrt{-g})_{,\beta}/\sqrt{-g}$

(c) 反対称テンソル $F^{\mu\nu}$ に対し，$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = (\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{,\nu}/\sqrt{-g}$

(d) $g^{\alpha\beta}g_{\beta\mu,\nu} = -g^{\alpha\beta}{}_{,\nu}g_{\beta\nu}$（ヒント：$g^{\alpha\beta}g_{\beta\mu}$ は何を表すか?）

(e) $g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} = -\Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}g^{\beta\nu} - \Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha}g^{\mu\beta}$［ヒント：式 (6.31) を使え．］

35　線要素が $\mathrm{d}s^2 = -e^{2\Phi}\mathrm{d}t^2 + e^{2\Lambda}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)$ である多様体について，$R_{\alpha\beta\mu\nu}$ の 20 個の独立な成分を計算せよ．ここで，Φ と Λ は座標 r のみの任意関数である．（最初に，座標と成分 $g_{\alpha\beta}$ を確認し，$g^{\alpha\beta}$ とクリストッフェル記号を計算する．次に計算しようとする $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ の 20 個を成分の添字を決め，それを計算する．それらの 20 個を使って，残りの 236 個は求められることを思い出そう．）

36　四次元多様体の座標が (t, x, y, z) であり，その線要素が

$$\mathrm{d}s^2 = -(1 + 2\phi)\mathrm{d}t^2 + (1 - 2\phi)(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)$$

で，あらゆる場所で $|\phi(t, x, y, z)| \ll 1$ が満たされている．座標が (t_0, x_0, y_0, z_0)

である任意の点 P において，ϕ の 1 次まで局所慣性系となる座標変換を見いだせ．その系はもとの系に対して ϕ の 1 次までを考えると，どんな割合で加速度運動をしているか?

37　(a) 二次元多様体の“固有体積”をふつう“固有面積”という．練習問題 28 のメトリックを使って，式 (6.18) を積分して半径 r の球の固有面積を求めよ．

(b) 練習問題 33 の三次元球面についても同様な計算をせよ．

38　式 (6.8) を積分して，半径 r の球面上で θ 一定の円周の長さを求めよ．

39　(a) 任意の二つのベクトル場 $\vec{U}$ と $\vec{V}$ に対し，その**リー括弧**を成分が

$$[\vec{U},\vec{V}]^\alpha = U^\beta \nabla_\beta V^\alpha - V^\beta \nabla_\beta U^\alpha \tag{6.100}$$

であるベクトル場 $[\vec{U},\vec{V}]$ で定義する．このとき，

$$[\vec{U},\vec{V}] = -[\vec{V},\vec{U}]$$

$$[\vec{U},\vec{V}]^\alpha = U^\beta \partial V^\alpha/\partial x^\beta - V^\beta \partial U^\alpha/\partial x^\beta$$

を示せ．これは偏微分にクリストッフェル記号が伴わない一つのテンソル場である．

(b) $[\vec{U},\vec{V}]$ は $\vec{U}$ に沿っての $\vec{V}$ に対する微分作用素，つまり任意のスカラーに対して，

$$[\vec{U},f\vec{V}] = f[\vec{U},\vec{V}] + \vec{V}(\vec{U}\cdot\nabla f) \tag{6.101}$$

であることを示せ．これをときに $\vec{U}$ に関しての**リー微分**といい，

$$[\vec{U},\vec{V}] \equiv \mathscr{L}_{\vec{U}}\vec{V}, \qquad \vec{U}\cdot\nabla f \equiv \mathscr{L}_{\vec{U}} f \tag{6.102}$$

のように表現する．このとき，式 (6.101) は微分作用素 $\mathscr{L}_{\vec{U}}$ に対する通常のライプニッツの規則を使って，

$$\mathscr{L}_{\vec{U}}(f\vec{V}) = f\mathscr{L}_{\vec{U}}\vec{V} + \vec{V}\mathscr{L}_{\vec{U}} f \tag{6.103}$$

と表される．(a) の結果はこの微分作用素が接続やメトリックなしで定義でき，したがって，より基本的であることを示している．基本的なことについては Schutz (1980*b*) をみよ．

(c) 一形式場 $\tilde{\omega}$ のリー微分の成分を計算せよ．このとき，任意のベクトル場 $\vec{V}$ に対し $\tilde{\omega}(\vec{V})$ が上記の f のようにスカラーであること，および定義から $\mathscr{L}_{\vec{U}}\tilde{\omega}$ が一形式場であること，つまり

$$\mathscr{L}_{\vec{U}}[\tilde{\omega}(\vec{V})] = (\mathscr{L}_{\vec{U}}\tilde{\omega})(\vec{V}) + \tilde{\omega}(\mathscr{L}_{\vec{U}}\vec{V})$$

ということを使用する．この式は，式 (6.103) と同様のものである．

7
曲った時空での物理

7.1　微分幾何から重力へ

数学的な形式で書かれた物理理論の基本は，数学的概念とある物理的に測定可能な量との同定にある．これまで発展させてきた幾何学のいろいろな概念と物理世界での重力の効果との関係をみる場合にも，このことが第一の関心事となる．すでにある程度はこのことを議論してきた．特にわれわれは時空を可微分多様体であると仮定し，非一様な重力場があるときには大域的な慣性系は存在しないことを示した．この主張の背後には次の二つの要請が含まれている．

◆ (I)　時空（すべての事象の集合）は，メトリックをもった四次元多様体である．

◆ (II)　メトリックは棒と時計で測ることができる．二つの近傍の点の間の棒に沿った距離は $|\mathrm{d}\vec{x}\cdot\mathrm{d}\vec{x}|^{1/2}$ であり，短時間に引き続いて起る二つの事象を通過した時計の測る，それらの時間間隔は，$|-\mathrm{d}\vec{x}\cdot\mathrm{d}\vec{x}|^{1/2}$ である．

したがって，至るところで $\mathrm{d}\vec{x}\cdot\mathrm{d}\vec{x}=-(\mathrm{d}x^0)^2+(\mathrm{d}x^1)^2+(\mathrm{d}x^2)^2+(\mathrm{d}x^3)^2$ となるような座標系は一般には存在しない．しかし局所的にはそのような系が**存在する**．このことは明らかに曲った多様体があって，その中では，ある特定の点でドット積がミンコフスキー空間でとる形になるような座標系を見つけることができることを示唆している．したがって，さらに次の要請をおく．

◆ (III) 時空のメトリックは，適当な座標系を選ぶことによって任意の一点でローレンツ系での形 $\eta_{\alpha\beta}$ とすることができる．

時空を表現するのにこの方法を選ぶと，理論を完全なものにするにはあと二つのことをしなければならない．その第一は物理的な対象（粒子，電場，流体など）が曲った時空でどのようにふるまうかを指定しなければならない．第二に曲率が時空内の物体によってどのようにしてつくられるか，あるいは決められるのかをいう必要がある．

物理理論の例としてニュートン重力を考えてみよう．Newton にとって時空とは時間的に無限にくり返す三次元ユークリッド空間からなる．（数学的に，これは $R^3 \times R$ とよばれる．）この場合，時空全体としてはその上にメトリックは存在しない．しかしユークリッド空間は通常のメトリックをもち，時間は絶対的な時計で測られる．速度の異なる観測者はすべて同等であるという相対性原理がガリレイの力学には組み込まれていた．したがって，静止系というものは普遍的な意味をもたず，異なる時刻に起った二つの事象について，それらが同じ場所で起ったかどうかの判断は，異なる速度で運動している観測者によって異なってしまった．しかし，事象の同時刻性，つまり二つの事象が同じ時刻に起ったかどうかについては，すべての観測者の認識は一致した．したがって，二つの事象の‘時間的な間隔’とは，二つの事象のそれぞれが含まれる異なる二つのユークリッド面の間にある時間差を意味していた．同時刻性は，事象の空間的な位置とは全く独立した概念であり，ニュートン重力においては，時間に関しての普遍的な概念が存在していた．つまり，すべての観測者は，位置や運動によらず，ある二つの事象の間に経過した時間について一致した認識をしていた．同じように，二つの事象の間の‘空間的な距離’は，それらの間のユークリッド的な距離であった．いくつかの事象が同時刻に起る，言い換えると，それらの事象が時間的に同じ一つのユークリッド面内にあるとき，その空間的距離は，その面内でのメトリックを使って簡単に計算でき，その値はすべての観測者にとって同じ値になる．事象が起るのが同時でないときには，各観測者はそれぞれの時刻が一定の面での事象の位置を測定し，ユークリッド的な距離を計算する．その事象のそれぞれの位置は観測者によって異なるが，その距離はすべての観測者に共通した値になるのである．

しかしながら，ニュートン理論には時間的間隔と空間的距離を結びつける方策がなかった．つまり，ある曲線を考えたとき，その曲線に沿っては位置だけでなく時間も変化するような場合，その曲線の長さを観測者によらないで不変的に特徴づける方法が存在しなかった．時間を距離に転換する不変的な手法がない限り，不変的な距離を導くことは不可能であった．Einstein が相対論に導入したものは，光速の不変性であり，それによって時間と距離の尺度を統一的に扱うことができるようになった．アインシュタインの 4 次元時空はニュートンの場合よりもずっと単純な構造になっている．

時空に関するこのモデルの範囲で，Newton は重力の作用を受ける物体のふるまいに対する法則 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ を与えた．ここで，ある与えられた重力場 ϕ に対して $\boldsymbol{F} = -m\nabla\phi$ である．また ϕ がどのようにつくられるかを決める法則 $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ も導いた．われわれは時空の相対論的な観点からこの二つの法則に対応する法則を探さなければならない．この章では，ある与えられたメトリックがどのように時空内の物体に影響を与えるかだけを考える．

その影響は粒子の運動という簡単な場合にはすでに議論した．重力場内での粒子の "加速度" はその質量によらないことを知っているから，その近傍の粒子が加速度をもたないような自由落下系をとることができる．この系を局所慣性系と同定した．自由落下している粒子はこの系では加速度をもたないから，少なくとも局所的には直線運動をする．しかし局所慣性系での直線とは，もちろん曲った時空での測地線の**定義**にほかならない．したがってメトリックによって粒子がどのように影響を受けるかについての最初の仮説が得られる．

◆ (IV) 弱い等価原理：自由落下している粒子は時空の時間的測地線上を動く[1]．

"自由落下" とは電場などの他の力の影響を受けていない粒子を意味する．物理において知られている他のすべての力は，それによって影響を受けない粒子が**存在する**という事実によって重力と区別される．そして弱い等価原理は，高い精度で検証され続けている．典型的な実験は，組成の異なる物体の落下の割合

1) 弱い等価原理は曲った時空に依拠しないで定義されることがふつうである．つまり，すべての粒子は質量や組成によらず重力場中では同じ割合で落下するということである．しかしアインシュタインの等価原理（仮定 IV′）は，ふつう，重力は時空の曲りにより表されるという意味なので，曲った時空が存在することを最初から仮定してしまうことにしよう．

を比較するものである．最近の実験からは，加速度の相対的な差にして 10^{13} 分のいくらという精度で成り立っていることが示されている (Will 2006)．したがって，弱い等価原理は物理学の中でも最も高い精度で確かめられている原理であるといえる．衛星を利用することで，その精度を 10^{-18} のレベルまで上げる提案もなされている．

しかし，弱い等価原理は粒子だけに適用される．それではたとえば流体は平坦でないメトリックからどのような影響を受けるのであろうか．それには仮定 (IV) の拡張が必要となる．

◆ (IV′) アインシュタインの等価原理：重力作用を考えなくてよい局所的な物理実験は，どんなものであっても，自由落下する慣性系で測定すれば，特殊相対論の成り立つ平坦な時空でなされる実験とおなじ結果を与える．

この場合，“局所的” というのは，その実験が局所慣性系と見なせる範囲を超えた領域にまで広がっている電磁場のような場が関与しない場合のことである．すべての局所的な物理学は，自由落下する慣性系内では，特殊相対論での物理学と同じである．局所的には，重力は新たな作用を引き起さない．重力作用はすべて，時空の広い領域にまたがった場合にはじめて現れる．このことも厳密に検証されてきている (Will 2006)．そういうことをいうと，階段を昇ったり，山に登ったり，ときにはベッドから起き上がるのにも，重力の作用に不満を感じている人には不思議なことと思われるかもしれない．しかし，Einstein の立場からすると，そうした重力の局所的な作用は，地球や地球上の物体によって押しもどされる力に起因するものなのである．われわれの “体重” は，われわれが測地線に沿って（無重力的に，床をつき抜けて）自由落下するのを妨げる作用をする固体の地球からの力なのである．その考え方はもっともなものなのである．地球のまわりを回っている宇宙飛行士を考えてみよう．300 km 程度の高度のところであれば，地球の中心からの距離は，われわれとさほど違いがない．したがって，飛行士に作用するニュートン的な重力の大きさはわれわれに作用するものとほとんど同じである．しかしながら，宇宙飛行士は，固体の地球にぶつかるような軌道を取らない限り，無重力状態にある．時空中には測地線という自然な曲線があり，その曲線に沿って運動しているとき，われわれは自由落下をしていて重力を感じないということを認めさえすれば，ニュートン

的な重力の概念を捨て去ることができる．われわれはただただ時空のなかの自然な曲線に沿って運動するにすぎないのである．

地球上における重力の本当の姿は潮汐力として現れる．潮汐力は非局所的作用である．地球の大きさ分だけ離れたところでは，月からのニュートン重力による加速度が異なっており，その差が潮汐力なのである．言い換えると，地球近傍での測地線偏差から生れるのが潮汐力である．地球が常時雲に覆われていたとすると，地球は自由落下しているので，地球人は月からの全体的な重力加速度を利用できず，したがって月を発見できない．局所的には月を感じることはできないのである．しかし，地球人は月を直接みることができなくとも，月による潮汐力を観測し解析することによって，月を発見することが原理的にはできるのである．潮汐力こそが重力に関して唯一測定できる量なのである．

アインシュタインの等価原理が意味することを数学的におおざっぱにいえば，次のようになる．特殊相対論においてテンソル形式で表現できる局所的な物理法則があるとすると，曲った時空の局所慣性系でもその数学的な表現は同じになるべきである．

この原理はしばしば“コンマをセミコロンに変える規則”とよばれる．特殊相対論での法則が微分（“コンマ”）を含むなら，その局所慣性系でも同じ微分を含む．それを**任意**の座標系で成り立つ形に変換するには，単に微分を共変微分（“セミコロン”）に変えればよいからである．これは物理法則を一般化するきわめて簡単な方法である．特にこれは“曲率との結合”を禁じている．曲率は特殊相対論では消えるから，たとえば曲った時空での熱力学の正しい形は何らかの形で曲率を含むことは考えられる．しかし仮説（IV′）は方程式の中にリーマン・テンソルを含むどんな項をも持ちこむことを禁止している．

（IV′）を数学的に表現する例として本書で扱うことになる流体力学を考えよう．特殊相対論での粒子の保存則は次の形に表された．

$$(nU^{\alpha})_{,\alpha} = 0 \tag{7.1}$$

ここで n は瞬時的共動座標系（MCR 系）での粒子密度であり，U^{α} は流体要素の四元速度であった．曲った時空では任意の事象についてそこにある流体要素と瞬間的に一緒に動いている局所慣性系を見つけることができ，n をまった

く同様にして定義できる．$\vec{U}$ もこの系の時間基底ベクトルとして特殊相対論でのように定義することができる．するとアインシュタインの等価原理（第5章参照）によってこの局所慣性系では粒子の保存則は**厳密**に式 (7.1) となる．この系では考えている事象を原点にした局所慣性系座標を選んでいるのでクリストッフェル記号はゼロとなり，これは次式と同等である．

$$(nU^{\alpha})_{;\alpha} = 0 \tag{7.2}$$

この形の法則がすべての系で成り立つので，保存則を任意の系で計算してもよく，そのことこそがアインシュタインの等価原理が意味することである．したがって，われわれは粒子数保存則を曲った時空に拡張したのである．われわれは今後必要になったときに同じやり方を採用することにしよう．

われわれがやったことは，テンソルを使った遊びなのであろうか，それとも物理的な意味があることなのであろうか．曲った時空中での粒子数保存則は式 (7.2) と異なったものになることがありうるのだろうか．答えはありうる，というものである．仮想的な式

$$(nU^{\alpha})_{;\alpha} = qR^2 \tag{7.3}$$

を考えてみよう．ここで，R は式 (6.92) で定義されたリーマン・テンソルから二度の縮約で得られるリッチ・スカラーであり，q は定数である．この式も，平坦な時空ではリーマン・テンソルがゼロになるので，特殊相対論の極限で式 (7.1) に帰着する．しかし曲った時空では，異なることを予言する．定数 q の符号によって，曲率の存在が粒子を生成したり消滅させたりすることになる．したがって，上記の二つの式はどちらも特殊相対論の範囲での物理法則と矛盾しないものである．しかしアインシュタインの等価原理は式 (7.1) を最も簡単な形，すなわち式 (7.2) に一般化すべきことを主張している．もちろん式 (7.2) と式 (7.3) のどちらが正しいかを決めるのは実験あるいは天文学的観測の問題である．本書では単に強い等価原理が正しいという仮定をしておくが，これはほとんど一般的になされることである．これに反対するような証拠は何も観測されていない．

次に特殊相対論におけるエントロピーの保存則は

$$U^{\alpha}S_{,\alpha}=0 \tag{7.4}$$

である．S のようなスカラーに対する共変微分にはクリストッフェル記号は含まれないから，この法則は曲った時空でも変らない．最後に四元運動量の保存則は

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0 \tag{7.5}$$

で，この一般化は

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0 \tag{7.6}$$

となり，ここで $T^{\mu\nu}$ の定義は以前とまったく同じである．

$$T^{\mu\nu}=(\rho+p)U^{\mu}U^{\nu}+pg^{\mu\nu} \tag{7.7}$$

($g^{\mu\nu}$ は局所慣性系座標での成分が平坦な空間でのメトリックテンソル $\eta^{\mu\nu}$ に等しくなるテンソルであることに注意せよ.)

7.2　少し曲った時空での物理

粒子あるいは流体の運動に対する（IV′）の意味するところをみるには，多様体のメトリックを知らなければならない．メトリックがどのようにつくられるかはまだ学んでいないので，この段階ではメトリックに対して後で導くある形を仮定することで満足しなければならない．後に示すように，弱い重力場（ニュートン的な表現では，粒子の重力ポテンシャルエネルギーがその静止質量よりはるかに小さい場合）に対して，通常のニュートン・ポテンシャル ϕ が完全にメトリックを決め，次の形をとる．

◆ $$\mathrm{d}s^2=-(1+2\phi)\mathrm{d}t^2+(1-2\phi)(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2) \tag{7.8}$$

(ϕ の符号は負に選んだ．したがって質量 M の源から遠くでは $\phi=-GM/r$.) 次に場が弱いという条件は，$|m\phi|\ll m$ すなわち $|\phi|\ll 1$ を意味する．メトリック (7.8) は ϕ の 1 次のオーダーでしか正しくなく，以下このオーダーで話を進める．

自由落下粒子の運動を計算しよう．その四元運動量を $\vec{p}$ と書く．静止質量ゼ

ロ以外のすべての粒子に対して，これは $m\vec{U}$ である．ここで $\vec{U} = \mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}\tau$ である．（IV）により粒子の経路は測地線であり，また固有時間はそのアフィンパラメーターであることを知っている．したがって $\vec{U}$ は測地線の方程式を満たさなければならない．

$$\nabla_{\vec{U}}\vec{U} = 0 \tag{7.9}$$

固有時間にどんな定数を掛けたものもアフィンパラメーターであり，特に τ のかわりに τ/m を用いる．これは後の便利さのためである．すると，$\mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}(\tau/m)$ も測地線の方程式を満たすベクトルである．このベクトルは単に $m\mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}\tau = \vec{p}$ となる．こうして粒子の運動方程式を次のように書くことができる．

$$\nabla_{\vec{p}}\vec{p} = 0 \tag{7.10}$$

光子は $m = 0$ で $\vec{U}$ は存在しないが，きちんと定義できる $\vec{p}$ をもつから，この方程式は光子に対しても用いることができる．

もし粒子が式 (7.8) の座標で非相対論的な速度をもつなら，式 (7.10) に対する近似的な式を見つけることができる．まずこの方程式の第 0 成分を考えよう．そのとき，$\vec{p}$ に沿ったふつうの微分は $\vec{U}$ に沿った普通の微分の m 倍になること，つまり $m\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau$ になることを使うと次のようになる．

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}p^0 + \Gamma^0{}_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta = 0 \tag{7.11}$$

粒子は非相対論的な速度をもつから，$p^0 \gg p^i$ である．したがって式 (7.11) は近似的に

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}p^0 + \Gamma^0{}_{00}(p^0)^2 = 0 \tag{7.12}$$

となる．ここで $\Gamma^0{}_{00}$ を計算する必要がある．

$$\Gamma^0{}_{00} = \frac{1}{2}g^{0\alpha}(g_{\alpha 0,0} + g_{\alpha 0,0} - g_{00,\alpha}) \tag{7.13}$$

$[g_{\alpha\beta}]$ は対角的だから，$[g^{\alpha\beta}]$ も対角的でその要素は $[g_{\alpha\beta}]$ の対応する要素の逆数である．したがって，$g^{0\alpha}$ は $\alpha = 0$ の場合のみゼロでなく，式 (7.13) は

$$\Gamma^0{}_{00} = \frac{1}{2}g^{00}g_{00,0} = \frac{1}{2}\frac{1}{-(1+2\phi)}(-2\phi)_{,0}$$

$$= \phi_{,0} + O(\phi^2) \tag{7.14}$$

粒子の速度と ϕ の最低次では式 (7.12) の第 2 項の $(p^0)^2$ は m^2 に置き換えることができるから，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}p^0 = -m\frac{\partial\phi}{\partial\tau} \tag{7.15}$$

p^0 はこの系での粒子のエネルギーだから，これは重力場が時間によらなければエネルギーは保存されることを意味している．この結果はニュートン理論においても正しい．しかし，ここで p^0 はこの系でのみ粒子のエネルギーになることに注意しなければならない．

測地線方程式の空間成分は，ニュートンの法則 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ に対応するものを与える．

$$p^\alpha p^i{}_{,\alpha} + \Gamma^i{}_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta = 0 \tag{7.16}$$

あるいは速度の最低次のオーダーで

$$m\frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^i{}_{00}(p^0)^2 = 0 \tag{7.17}$$

ここで再び Γ との和で p^0 に比べて p^i を無視した．これと首尾一貫して第一近似でまた $(p^0)^2 = m^2$ とおくことができる．その結果

$$\frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}\tau} = -m\Gamma^i{}_{00} \tag{7.18}$$

となる．次にクリストッフェル記号を計算する．

$$\Gamma^i{}_{00} = \frac{1}{2}g^{i\alpha}(g_{\alpha 0,0} + g_{\alpha 0,0} - g_{00,\alpha}) \tag{7.19}$$

$[g^{\alpha\beta}]$ は対角的だから

$$g^{i\alpha} = (1-2\phi)^{-1}\delta^{i\alpha} \tag{7.20}$$

と書け，

$$\Gamma^i{}_{00} = \frac{1}{2}(1-2\phi)^{-1}\delta^{ij}(2g_{j0,0} - g_{00,j}) \tag{7.21}$$

となる．ここで δ^{i0} はゼロだから α を j に変えた．$g_{j0} \equiv 0$ であることから

$$\Gamma^i{}_{00} = -\frac{1}{2}g_{00,j}\delta^{ij} + \mathrm{O}(\phi^2) \tag{7.22}$$

$$= -\frac{1}{2}(-2\phi)_{,j}\delta^{ij} \tag{7.23}$$

これから式 (7.17) の運動方程式は次のようになる．

◆
$$\mathrm{d}p^i/\mathrm{d}\tau = -m\phi_{,j}\delta^{ij} \tag{7.24}$$

重力場の力は $-m\nabla\phi$ だから，これはニュートン理論の通常の方程式である．このことから，いま無視した高次の効果がきわめて小さいときには，一般相対論は惑星のケプラー運動を説明することがわかる．これは水星を除いてすべての惑星に適用できることをあとで示す．

エネルギー保存の方程式と運動方程式の両方が，メトリックがほとんどミンコフスキー・メトリックである ($|\phi| \ll 1$) ことと粒子の速度が非相対論的である ($p^0 \gg p^i$) ことの二つの仮定の下に導かれた．このような極限はまさにニュートン的な重力が正当化される情況であり，ニュートンの法則が導かれたことは心強い．実際，こうなることは不可欠である．ここでは何のごまかしもしていない．粒子が自由落下系で直線上を動くことが与えられると，ほとんど自動的にこうならなければならない．

ほかの物理系に対しても適当な極限でニュートンの方程式が成り立つことは同様な計算で確かめられる．たとえば，7.6 節の練習問題 5 で流体力学に対してこのことが行われる．流体が非相対論的であるという条件は，その速度が小さいというばかりでなく，その流体を構成している粒子のランダム速度が非相対論的（これは $p \ll \rho$ を意味する）でもあることを意味する．

相対論的な観点と古いニュートン理論との適当な極限でのこの対応は，非常に重要なことである．どんな新しい理論も，古い理論が成り立つような領域では古い理論と同じ予言をしなければならない．等価原理プラス式 (7.8) のメトリックの形は，この要請を満足する．

7.3　曲った時空での直観

重力を曲った時空としてとらえる描像は適当な極限で，ニュートン理論の予言と一致するが，概念的にはニュートン理論と非常に異なっている．したがっ

て，この新しい観点の理解をだんだん深めていかなければならない．

第一の違いは，特別に選ばれた系が存在しないことである．ニュートン理論と特殊相対論では慣性系が特別視されていた．この二つの理論では，“速度”は局所的には測れないが，“加速度”は測れるので，物理的加速度をもたない ($\mathrm{d}\vec{U}/\mathrm{d}\tau = 0$) 粒子は，座標加速度ももたない ($\mathrm{d}^2x^i/\mathrm{d}t^2 = 0$) ように一群の特別な座標系が選び出される．一方われわれの新しい観点では至るところで慣性的，すなわち $\mathrm{d}\vec{U}/d\tau = 0$ をもつすべての粒子に対して $\mathrm{d}^2x^i/\mathrm{d}t^2 = 0$ であるような座標系は存在しない．したがって，あらゆる座標系を同等に扱わなければならない．クリストッフェル記号を用いることによって，$\mathrm{d}^2x^i/\mathrm{d}t^2$ のような座標に依存した量を変えて，$\mathrm{d}\vec{U}/\mathrm{d}\tau$ のような座標に依存しない量をつくることができる．したがって，座標に依存して考えていく方法をとる必要はないし，また**そうすべきではない**．

第二の違いは，エネルギーと運動量に関係する．ニュートン理論，特殊相対論そしてわれわれの幾何学的重力理論では，おのおのの粒子は決ったエネルギーと運動量をもち，その値はそれらを評価する座標系に依存する．後の二つの理論では，エネルギーと運動量は一つの四元ベクトル $\vec{p}$ の成分である．特殊相対論では，ある物理系の全四元運動量はそこに含まれているすべての粒子の四元運動量の和 $\sum_i \vec{p}_{(i)}$ である．しかし曲った時空では，同一点にない二つのベクトルを加えることは**できない**．われわれはその方法を知らない．二つのベクトルは同一点で比べられたときにのみ，それらが平行かどうかをいうことができ，ある点へ平行移動されたベクトルのその点での値は，それに沿って動かされた曲線のとりかたに依存する．したがって，すべての $\vec{p}$ を足し合せる不変な方法は存在**せず**，もしある物理系が定義可能な四元運動量をもつなら，それは特殊相対論でのような単純なものではありえない．

その空間的な広がりが有限の物理系（すなわち孤立系）に対しては，後に議論する方法で，全エネルギーと全運動量が**定義できる**ことがわかる．物理系の**全**質量エネルギーがそれを構成している粒子の単なる和ではありえないことは，次のようにしてわかる．全粒子の質量の和では，ニュートン的な用語で重力の自己エネルギーとよばれる量が無視されている．これは無限遠で孤立していた粒子たちを集めてきてその系をつくるさいに得られる仕事で，負の量である．

このエネルギーを，個々の粒子に附随させることはできず，幾何学それ自体のなかに含まれるものである．しかし重力ポテンシャルエネルギーそれ自体，新しい描像ではうまく定義できる概念ではない．それはある意味で全粒子のエネルギーの和とそれがつくる系の全質量の差を表さなければならない．しかし全粒子のエネルギーの和自体がきちんと定義できる量ではないので，重力ポテンシャルエネルギーはきちんと定義できない．一般に個々の粒子の四元運動量と，それがつくる系の**全**エネルギー運動量のみが定義できるにすぎない．

7.4　保　　存　　量

エネルギーについての前節の議論をみると，粒子あるいは物理系に附随する保存量についていったい何がいえるのかと読者は戸惑うだろう．粒子に対して，古い観点では重力は“力”であり，したがって粒子の運動エネルギーと運動量はその作用の下で保存する必要はない．われわれの新しい観点では，$\vec{p}$の成分が粒子の軌跡に沿って一定であるような座標系の存在を期待することはできない．しかし，これには一つ大事な例外があり，詳しくみていくに十分値するほど重要である．

測地線の方程式は，$\vec{p}$の“下付添字”成分に対しては次のように書ける．

$$p^{\alpha}p_{\beta;\alpha}=0 \tag{7.25}$$

あるいは

$$p^{\alpha}p_{\beta,\alpha}-\Gamma^{\gamma}{}_{\beta\alpha}p^{\alpha}p_{\gamma}=0$$

あるいは

$$m\frac{\mathrm{d}p_{\beta}}{\mathrm{d}\tau}=\Gamma^{\gamma}{}_{\beta\alpha}p^{\alpha}p_{\gamma} \tag{7.26}$$

さて，右辺は次のように簡単になる．

$$\begin{aligned}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}p^{\alpha}p_{\gamma}&=\frac{1}{2}g^{\gamma\nu}(g_{\nu\beta,\alpha}+g_{\nu\alpha,\beta}-g_{\alpha\beta,\nu})p^{\alpha}p_{\gamma}\\&=\frac{1}{2}(g_{\nu\beta,\alpha}+g_{\nu\alpha,\beta}-g_{\alpha\beta,\nu})g^{\gamma\nu}p_{\gamma}p^{\alpha}\\&=\frac{1}{2}(g_{\nu\beta,\alpha}+g_{\nu\alpha,\beta}-g_{\alpha\beta,\nu})p^{\nu}p^{\alpha}\end{aligned} \tag{7.27}$$

積 $p^\nu p^\alpha$ は ν と α に関して対称であり，括弧のなかの第一項と第三項をひとまとめにしたものは ν と α に関して反対称だから，それらは打ち消しあい，結局第二項だけが残る．つまり

$$\Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha} p^\alpha p_\gamma = \frac{1}{2} g_{\nu\alpha,\beta} p^\nu p^\alpha \tag{7.28}$$

こうして，測地線の方程式は一般的に

◆
$$m \frac{\mathrm{d}p_\beta}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{2} g_{\nu\alpha,\beta} p^\nu p^\alpha \tag{7.29}$$

と表される．したがって次の重要な結果が得られた．**もし $g_{\alpha\nu}$ のすべての成分がある固定された β に対して x^β によらないならば，p_β は粒子のどんな軌跡に沿っても一定となる．**

たとえば定常的な（つまり時間に依存しない）重力場があるとする．すると，メトリックの成分が時間によらない座標系を見つけることができ，そのような系では p_0 が保存する．したがって，p_0（実際には $-p_0$）はふつう“その系での”という断りなしに粒子の“エネルギー”とよばれる．同じメトリックが時間に依存する成分をもつような座標系も見つけることができることに注意せよ．性質の“よい”座標系から任意の時間に依存した座標変換をして得られた座標系がそれである．実際，ほとんどの自由落下局所慣性系が時間に依存したメトリック成分をもつ．というのは，そのような系で自由落下粒子はその位置，したがって時間とともに変っていく重力場をみるからである．メトリック成分が定常的な系は特別であり，通常，地上の“実験室系”である．したがってこの系での p_0 は実験室で定義されるふつうのエネルギーに関係しており，次に示すように粒子の重力ポテンシャルエネルギーを含んでいる．次の式を考えよう．

$$\begin{aligned}\vec{p}\cdot\vec{p} &= -m^2 = g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta \\ &= -(1+2\phi)(p^0)^2 + (1-2\phi)[(p^x)^2 + (p^y)^2 + (p^z)^2]\end{aligned} \tag{7.30}$$

ここで式 (7.8) のメトリックを用いた．これは次のように解くことができる．

$$(p^0)^2 = [m^2 + (1-2\phi)(\boldsymbol{p}^2)](1+2\phi)^{-1} \tag{7.31}$$

ここで和 $(p^x)^2 + (p^y)^2 + (p^z)^2$ を $\boldsymbol{p}^2$ と書いた．$\phi \ll 1$，$|\boldsymbol{p}| \ll m$ の近似を続

けると，この式は次のように簡単になる．

$$(p^0)^2 \approx m^2(1-2\phi+\boldsymbol{p}^2/m^2)$$

あるいは

$$(p^0) \approx m(1-\phi+\boldsymbol{p}^2/2m^2) \tag{7.32}$$

次にこの式で添字を下げると

$$p_0 = g_{0\alpha}p^\alpha = g_{00}p^0 = -(1+2\phi)p^0 \tag{7.33}$$

◆
$$-p_0 \approx m(1+\phi+\boldsymbol{p}^2/2m^2) = m+m\phi+\boldsymbol{p}^2/2m \tag{7.34}$$

第一項は粒子の静止質量．第二，三項はエネルギーのニュートン部分：重力ポテンシャルエネルギーと運動エネルギーである．この式は，粒子の軌跡に沿って p_0 の一定性を意味し，ニュートンの保存エネルギーの概念を一般化している．

一般の重力場は，どんな座標系でも定常的ではなく[2)]，したがってどんな保存エネルギーも定義できない．

同様にメトリックが軸対称なら $g_{\alpha\beta}$ が対称軸のまわりの角 ψ によらないような座標系を見つけることができる．そのとき p_ψ が保存される．これは粒子の角運動量である．非相対論的な極限では，

$$p_\psi = g_{\psi\psi}p^\psi = g_{\psi\psi}m\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t = mg_{\psi\psi}\Omega \tag{7.35}$$

ここで Ω は，粒子の角速度である．ほとんど平坦なメトリックに対して円筒座標 (r,ψ,z) では

$$g_{\psi\psi} = \vec{e}_\psi\cdot\vec{e}_\psi \approx r^2 \tag{7.36}$$

したがって保存量は

$$p_\psi = mr^2\Omega \tag{7.37}$$

であり，これはニュートン力学での角運動量の通常の定義である．

---

2)　ある与えられたメトリックを時間に依存しないようにする座標系は一般に存在しないことをみるのはやさしい．メトリックは，（4×4 対称行列と同じく）10 個の独立成分をもつが，座標の変換でそれらの成分を変えるために四つの自由度だけが導入される．［それらは四つの関数 $x^{\overline{\alpha}}(x^\mu)$ である．］この方法で 10 個のすべての成分が時間によらないようにできるのは，特別なメトリックだけである．

粒子の運動の保存則を議論してきたが，同様の考察は流体に対しても適用される．流体は莫大な数の粒子の集合だからである．しかし自己重力系の全質量と全運動量に関する情況はより複雑である．孤立系の質量と運動量は保存されることがわかるが，それについての議論は質量，運動量がどのように定義されるかをみるまで待たなければならない．

7.5 文 献

曲率と物理がどのように適合するかという問題は，Geroch (1978) により詳しく議論されている．保存量は上級レベルの教科書ならどれにも詳しく議論されている．この章で取り扱った事柄は，外場としての曲った時空での場の量子論に対する準備となる．これについては，Birrell と Davies (1984)，Wald (1994) を参照せよ．それはまた，今日の重力についての最も活発な研究分野の一つである一般相対論の量子化という研究につながっている．それについては本教科書では扱わないが，（ひも理論の立場から接近するのではなく）古典的な一般相対論の方向から量子化の問題に迫ろうとする読者には Rovelli (2004)，Bojowald (2005)，Thiemann (2007) を推薦しておく．

7.6 練 習 問 題

1 式 (7.3) が式 (7.1) の曲った時空への正しい一般化としたら，それをどのように解釈するか? 流体の共動体積中の粒子数は時間の経過とともにどう変化するであろうか? 式 (7.2) と式 (7.3) の違いを実験的に確かめることは原理的に可能であろうか?

2 式 (7.8) に対し $g^{\alpha\beta}$ を ϕ の 1 次まで計算せよ．

3 式 (7.8) のメトリックについて，すべてのクリストッフェル記号を ϕ の 1 次まで計算せよ．ϕ は t，x，y，z の一般の関数とせよ．

4 式 (7.15) と式 (7.24) が g_{00} のみによっていることを確かめよ．g_{xx} の形は，それが $1+O(\phi)$ である限り影響を与えない．

5 (a) 完全流体では，ニュートン極限で式 (7.6) の空間部分が式 (7.8) のメトリックに対して次の形に帰着することを確かめよ．

$$\boldsymbol{v}_{,t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \nabla p/\rho + \nabla\phi = 0 \tag{7.38}$$

これは重力場内の非相対論的な流体運動に対するオイラーの式として知られている．この式を導くには式 (7.2) を使用する必要がある．

(b) 同じ仮定の下で式 (7.6) の時間成分を検討し，その各項を解釈せよ．

(c) 式 (7.38) は静的な重力場での静的流体 ($\boldsymbol{v} = 0$) が静水力学平衡の式

$$\nabla p + \rho \nabla \phi = 0 \tag{7.39}$$

に従うことを意味する．メトリックテンソルは，$\vec{e}_0$ が時間的で $g_{i0} = 0$，$g_{\alpha\beta,0} = 0$ のとき，静的とよばれる．式 (7.6) から静的な流体（$U^i = 0$，$p_{,0} = 0$ など）が相対論的静水力学平衡の式に従うことを示せ．

$$p_{,i} + (\rho + p)\left[\frac{1}{2}\ln(-g_{00})\right]_{,i} = 0 \tag{7.40}$$

(d) 以上から少なくとも静的な情況では g_{00} と $-\exp(2\phi)$ の間に密接な関係があることが示唆される．ϕ は同様な情況でのニュートン・ポテンシャルである．式 (7.8) と練習問題 4 がこのことと矛盾していないことを示せ．

6　式 (7.10) から式 (7.25) を導け．

7　線要素によって与えられた次の四つのメトリックを考える．

(i) $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$

(ii) $\mathrm{d}s^2 = -(1 - 2M/r)\mathrm{d}t^2 + (1 - 2M/r)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)$

ここでは M は定数である．

(iii)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &-\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\mathrm{d}t^2 - 2a\frac{2Mr\sin^2\theta}{\rho^2}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\phi \\ &+ \frac{(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta}{\rho^2}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\theta^2\end{aligned}$$

ここで M と a は定数で，$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$，$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$ とする．

(iv)

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + R^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - kr^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)\right]$$

ここで k は定数，$R(t)$ は時間 t のみに依存する任意の関数である．

第一のメトリックはすでにおなじみである．その他は後の章で出てくる．それらの名前は，それぞれシュワルツシルト・メトリック，カー・メトリック，ロバートソン–ウォーカー・メトリックとよばれている．

(a) おのおののメトリックに対して自由落下粒子の四元運動量の保存する成分 p_α

をあるだけ見つけよ．

(b) 6.9 節の練習問題 28 を使って，(i) を次の形に直す．

(i′) $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)$

これから (ii) と (iv) が球対称であると議論せよ．このことは保存する成分 p_α の数を増やすか?

(c) (i′) と (ii)～(iv) に対して $\theta = \pi/2$ と $p^\theta = 0$，すなわち赤道面に接して始まった測地線はつねに $\theta = \pi/2$，$p^\theta = 0$ であることが示される．

(i′)，(ii)，(iii) の場合について，方程式 $\vec{p}\cdot\vec{p} = -m^2$ を用いて，p^r を m と他の保存量と位置の既知関数で表せ．

(d) (iv) について，球対称性は，もし測地線が $p^\theta = p^\phi = 0$ で始まると，これらの量はゼロのままにとどまることを意味する．このことを用いて式 (7.29) から，$k = 0$ のとき，p_r が保存量であることを示せ．

8 ある座標系でメトリックの成分 $g_{\alpha\beta}$ がある座標 x^μ に依存しないとする．

(a) 任意のストレス–エネルギーテンソルに対して保存則 $T^\nu{}_{\mu;\nu} = 0$ が次式となることを示せ．

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\,T^\nu{}_\mu)_{,\nu} = 0 \tag{7.41}$$

(b) この座標系で各空間的超平面 $x^0 =$ 一定のある有限領域だけ $T^{\mu\beta} \neq 0$ だとする．このとき式 (7.41) が次のことを意味することを示せ．n_ν を超平面の単位垂直とすると，次の量は x^0 によらない．

$$\int_{x^0=\mathrm{const.}} T^\nu{}_\mu \sqrt{-g}\,n_\nu \mathrm{d}^3x$$

これは式 (7.29) の後で述べた保存則の連続体への一般化である．

(c) 球面極座標 $(t,\ r,\ \theta,\ \phi)$ をもつ大域的慣性系で平坦なミンコフスキー空間を考える．(b) から次の量が t によらないことを示せ．

$$J = \int_{t=\mathrm{const.}} T^0{}_\phi r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{7.42}$$

これは系の全角運動量である．

(d) (c) の積分をデカルト座標 $(t,\ x,\ y,\ z)$ での $T^{\alpha\beta}$ の成分で表し，次の形になることを示せ．

$$J = \int (xT^{y0} - yT^{x0})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{7.43}$$

これは z 軸まわりの粒子の角運動量に対する非相対論的表現 $(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})_z$ の連続体版である．

9　(a) 式 (7.8) のメトリックに対するリーマン・テンソルの成分 $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ を ϕ の 1 次まで求めよ．

(b) 測地線偏移の方程式 (6.87) が（ϕ と速度の最低次で）次式になることを示せ．

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^i}{\mathrm{d}t^2} = -\phi_{,i,j}\xi^j \tag{7.44}$$

(c) 測地線がニュートン的な重力場の中の近傍の二点での静止状態から始まった自由落下粒子の世界線とするとき，(b) の方程式を解釈せよ．

10　(a) もしベクトル場 ξ^α がキリング方程式

$$\nabla_\alpha\xi_\beta + \nabla_\beta\xi_\alpha = 0 \tag{7.45}$$

を満たすならば，測地線に沿って $p^\alpha\xi_\alpha =$ 一定であることを示せ．これは式 (7.29) から導いた保存則の座標不変な表現である．メトリックがキリング場を許すかどうかだけを知ればよい．

(b) ミンコフスキー時空の 10 個のキリング場を見つけよ．

(c) $\vec{\xi}$ と $\vec{\eta}$ がキリング場なら，定数の α，β に対して $\alpha\vec{\xi} + \beta\vec{\eta}$ もそうなることを示せ．

(d) (b) のキリング場のローレンツ変換は単に (c) におけるような線形結合をつくることを示せ．

(e) 練習問題 7 (a) の結果から，メトリック (ii)～(iv) のキリング場を見つけよ．

8
アインシュタイン方程式

8.1　重力場の方程式の目的と正当性

前章で重力と物質に対する重力の作用を，メトリックをもつ曲った多様体の概念によって記述することにした．そこで，本章では重力場の源がどのようにメトリックを定めるかを示す法則を求めて，理論を完成しなければならない．その法則のニュートン的アナロジーは

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \tag{8.1}$$

で，ここで ρ は質量密度である．質量 m の質点に対してのこの方程式の解は(8.6 節の練習問題 1 参照)

$$\phi = -\frac{Gm}{r} \tag{8.2}$$

であり，c=1 とする単位系ではこれは無次元量である．

ニュートン理論での重力場の源は質量密度である．重力の相対論的理論では，源は質量密度にも関係していなければならないが，相対論的に意味のある概念でなければならないので，“質量” のみでは十分ではない．すぐに考えられる相対論的一般化は静止質量を含めた全エネルギーである．4 章で，流体要素の MCR 系では ρ によって全エネルギー密度を表した．したがって，この ρ を相対論的な重力場の源として使えるのではないかと考えられる．しかし，それでは不十分である．ρ がエネルギー密度となるのは，MCR 系の観測者にとってのみだ

からである．ほかの系の観測者はエネルギー密度を各自の系での成分 T^{00} として測定する．ρ を場の源として使うと，一群の観測者，つまり ρ がエネルギー密度であるというような観測者が，ほかのすべての観測者に対して優位にたつことになる．この立場は，前の章で**すべての**座標系が同等でなければならないと強調したことに矛盾してしまう．したがって，ρ を重力源とすることはやめにして，ニュートンの質量密度を一般化したものを T^{00} ととるようにしよう．しかし，T^{00} のみが重力源であれば，どの系で T^{00} を評価するかを指定しなくてはならなくなる．不変な理論としては，ストレス–エネルギーテンソル $\mathbf{T}$ の**すべて**を重力場の源として扱うことで，特別な系の導入を避けられる．式 (8.1) を相対論に一般化したものは

$$\mathbf{O}(\mathbf{g}) = k\mathbf{T} \tag{8.3}$$

の形をもっており，ここで k は（まだ決っていない）定数で $\mathbf{O}$ はすでに式 (7.8) でみたように ϕ の拡張となるメトリックテンソル $\mathbf{g}$ に作用する微分作用素である．したがって，式 (8.1) 一つのかわりに式 (8.3) の各独立な成分に対応して 10 個の微分方程式となる．（$\mathbf{T}$ が対称なとき，独立な成分は 16 ではなく 10 となることに注意.）

式 (8.1) とのアナロジーによって，$\binom{2}{0}$ テンソルをつくり出す 2 階の微分作用素 $\mathbf{O}$ を見つけなくてはならない．式 (8.3) では左辺は $\binom{2}{0}$ テンソル $\mathbf{T}$ と等号で結ばれているわけだからである．別の言葉でいえば，$\{O^{\alpha\beta}\}$ は $\binom{2}{0}$ テンソルの成分で，$g_{\mu\nu,\lambda\sigma}$，$g_{\mu\nu,\lambda}$，$g_{\mu\nu}$ の組合せからつくられていなければならない．6 章からリッチ・テンソル $R^{\alpha\beta}$ がこの条件を満たすことは明らかである．実際，

$$O^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} + \mu g^{\alpha\beta}R + \Lambda g^{\alpha\beta} \tag{8.4}$$

の形をした**任意**のテンソルは，μ と Λ が定数ならば，これらの条件を満足する．μ を決めるのにはまだ使っていない $T^{\alpha\beta}$ の性質，つまりアインシュタインの等価原理によりエネルギー運動量の局所的保存 [式 (7.6)]

◆ $$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$$

が要求されることを使う．この式は**任意の**メトリックテンソルについて成り立

たなければならない．したがって，式 (8.3) から

$$O^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \tag{8.5}$$

でなくてはならず，しかもそれは任意のメトリックテンソルについて成り立たなければならない．$g^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ だから，式 (8.4) から

$$(R^{\alpha\beta} + \mu g^{\alpha\beta} R)_{;\beta} = 0 \tag{8.6}$$

であることがわかる．これを式 (6.98) と比べて，式 (8.6) が任意の $g_{\alpha\beta}$ に対して恒等的に成り立つためには $\mu = -1/2$ でなければならないことがわかる．こうして方程式

◆ $$G^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} = kT^{\alpha\beta} \tag{8.7}$$

に到達した．ここで，定数 Λ と k は未定である．添字なしの形式では

◆ $$\mathbf{G} + \Lambda\mathbf{g} = k\mathbf{T} \tag{8.8}$$

である．この方程式を一般相対論の場の方程式，あるいはアインシュタインの場の方程式という．あとで示すように，ニュートンの重力場の方程式が正しく導かれることを要求すると k の値を決めることができるが，Λ は決められない．

ここまでのところをまとめておこう．われわれは次のことを要求して式 (8.7) に到達した．つまり，(i) 式 (8.1) に類似していて，より一般的であること；(ii) 特別の系を導入しないこと；(iii) 任意のメトリックテンソルに対し，エネルギー運動量の局所的保存を保証することである．式 (8.7) は (i)～(iii) を満たす唯一の方程式ではない．Einstein が式 (8.7) のような式に到達するまでにも，多くの違った式が提案された．最近になって，技術の進歩でアインシュタイン方程式をかなり正確に，といっても太陽系の中の弱い重力場中であるが，テストできるようになっても，たくさんの新たな理論が提案されてきている．そのいくつかは予想される太陽系内の実験の精度ではアインシュタインの予想と一致していて，もっと強い重力場でのみ異なった結果になるようにつくられている．しかし，アインシュタイン方程式よりはるかに複雑な一般相対論の競合理論は，アインシュタイン方程式が何らかの実験と矛盾しない限り，審美的観点からも物理学者の関心を強く引くことはない．多くの競合理論とそれらをふる

いにかけるための 1960 年代以降になされた精密さを増している実験については，Misner ら (1973) や Will (1981, 2006) の本に解説されている．(11 章では二つの古典的実験についてふれる予定である.) アインシュタイン方程式はそれらのテストを問題なくくぐりぬけており，本書ではほかの理論についてはふれない．この点ではノーベル賞を受けた天体物理学者 S. Chandrasekhar (1980) と同じ立場をとる．彼は次のようにいっている．

> 今日に至るまで一般相対論になげかけられてきた論争や疑問は，まさに次の事実に起因しています．つまり，理論をつくるにあたって，Einstein が審美的な判断基準を用いていることです．そこで一般相対論を批判する人々は，自分たちの審美的哲学的判断基準を主張する権利があると思っています．私としてはこうした考えにくみすることはないとだけ言っておきましょう．

アインシュタイン理論は現在までのところ問題を生じていないが，いくつかの理由から，最終的な理論ではないと考えられ，実験的な検証を続けなくてはならないであろう．もちろん，アインシュタイン理論は量子論ではないので，重力に関しての矛盾のない量子論をつくりだそうとする理論的な努力がなされてきている．実験の精度が上がると，あるレベルでアインシュタイン理論に対する測定可能な量子補正が現れるものと予想できる．そして，その補正はたとえばメトリックと相互作用する新たな場として現れるのかもしれない．そうした場を生み出す源はアインシュタインの等価原理を破るものであったり，その場自体が新たな重力波の形をとるものかもしれない．原理的には，一般相対論から予想される事柄のどれもが，新しい理論では破れることになるであろう．重力に関する精度の高い実験により，重力の量子論の理論的発展に必要となる重要な手がかりがもたらされるのも遠くないであろう．しかしながら，そうした話題に興味はつきないが，本書のような入門書で扱うレベルを越えている．本書の目的からは，そうした理論にはこれ以上ふれることはしないことにする．

距離化単位　　これまでのところ，式 (8.7) の定数 k の値を決めていない．この定数は式 (8.1) の $4\pi G$ と同じ役割をしている．以下にこの定数について述べる前に，たいへん便利な単位系，つまり $G=1$ とする単位系を用いることにしよう．特殊相対論の場合に基本定数の c を 1 とする単位系を選ぶことが便利で

あることがわかったように，重力の場合には G の値が 1 となる単位系で考えることが自然である．SI 単位系からこの距離化単位系（$c = G = 1$ である）への変換の換算率として便利なのは，

$$1 = G/c^2 = 7.425 \times 10^{-28}\,\mathrm{m \cdot kg^{-1}} \tag{8.9}$$

である．これを使って，単位としての kg を消去して質量をメートルで測るようにする．表 8.1 にいくつかの必要な定数を SI 単位と距離化単位で示した．8.6 節の練習問題 2 がこの単位に慣れるのに役立つであろう．

表 8.1　SI 単位と距離化単位による基本定数の値の比較

定数	SI 単位での値	距離化単位での値
c	$2.998 \times 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$	1
G	$6.674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$	1
$\hbar$	$1.055 \times 10^{-34}\,\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$	$2.612 \times 10^{-70}\,\mathrm{m^2}$
m_e	$9.109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$	$6.764 \times 10^{-58}\,\mathrm{m}$
m_p	$1.673 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$	$1.242 \times 10^{-54}\,\mathrm{m}$
$M_\odot$	$1.988 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$	$1.476 \times 10^{3}\,\mathrm{m}$
$M_\oplus$	$5.972 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$	$4.434 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
$L_\odot$	$3.84 \times 10^{26}\,\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}}$	1.06×10^{-26}

注意：m_e と m_p はそれぞれ電子と陽子の静止質量で，$M_\odot$ と $M_\oplus$ はそれぞれ太陽と地球の質量を表す．また $L_\odot$ は太陽の光度（この SI 単位はジュール/s に等しい）である．各値はもっと正確にわかっているものもあるが，ほぼ 4 桁までを示してある．Yao (2006) によった．

重力の関係する問題での距離化単位のもつ基本的性格は，$M_\oplus$ についての二つの値の不定性を考えるとよくわかる．地球の質量は衛星の軌道をしらべ，ケプラーの法則を使って求められる．この方法ではニュートンのポテンシャルを測定している．このポテンシャルは，$GM_\oplus$ の積，つまり**距離化**単位で測った質量の c^2 倍を含んでいる．レーザーによる地球を回る衛星軌道の精密測定により，この値は 10 桁の精度まで測定可能となっている．さらに，光速 c は現在では定義される量になっていてそこに不定性はない．したがって，$M_\oplus$ について距離化単位の値は 10 桁の精度でわかっている．しかしながら，G の値は実験室での実験で測定されているだけであって，重力の弱さのために大きな不定性

を含んでいる．変換の換算率 G/c^2 には 10^5 分の 2 程度の不定性があり，$M_\oplus$ についての SI 単位での値もその程度の精度しかない．同様に，太陽の距離化単位での質量は惑星を使ったレーダーによる精度の高い軌道測定できわめて正確に求められていて，精度は 9 桁ある．しかるに，キログラム単位での質量にはずっと大きな不定性がある．

8.2　アインシュタイン方程式

$\Lambda = 0$（今のところ簡単化のためにこうするが，あとでは Λ を復活させる）とし，$k = 8\pi$ として，成分表示をすると，アインシュタイン方程式 (8.7) は，

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta} \tag{8.10}$$

の形になる．定数 Λ を宇宙定数という．それは Einstein のもともとの方程式にはなかった項であるが，彼は何年かあとにその項を静的な宇宙モデルを求めるためにつけ加えた．宇宙モデルとは，宇宙の大規模な構造を与える解であるが，Einstein はその当時静的宇宙が望ましいと考えたのである．その後なされた宇宙膨張の観測により，彼はこの項を捨て去り，それを取り入れたことを悔やんだ．しかし，最近の天体観測によると宇宙定数の値は小さいけれどもゼロではないことを強く示している．そこで，第 12 章の宇宙論の章で Λ について議論する予定だが，それまでは $\Lambda = 0$ としておく．こうすることの正当性とその限界については，8.6 節の練習問題 18 でふれる．

$k = 8\pi$ という値は，アインシュタイン方程式が太陽系において惑星の運動を正しく記述しなければならないことから求まる．これはニュートン理論への極限であって，ニュートン理論の予測が観測的に十分確かめられている範囲で，一般相対論の予測がそれと一致しなければならないのである．前の章で，ニュートン的運動は式 (7.8) の形のメトリックによって引き起されることを学んだ．この章で行おうとしていることは，重力が弱い（8.6 節の練習問題 3 参照）と仮定したときに，式 (8.10) のアインシュタイン方程式が，式 (7.8) を解としてもつことである．もちろん，k の値をそのときまで任意にしておいて，式 (7.8) の解を得るのに必要なようにその値を決めることはできる．しかし，最初から k を

8π にしてしまって，あとの適切なところでこの値が正しいことを示す方が，この章で式を扱っていくうえでずっと便利である．

式 (8.10) は 10 個の連立微分方程式である（$T^{\alpha\beta}$ と $G^{\alpha\beta}$ は対称であるから，16 個ではない）と考えなくてはならない．重力源 $T^{\alpha\beta}$ が与えられたとき，この方程式を解いて 10 個の $g_{\alpha\beta}$ を求めることになる．方程式は非線形であるが，性質のよい初期値問題を構成している．性質のよい初期値問題とは，その方程式が，与えられた初期値に対して，$g_{\alpha\beta}$ の未来の値を決定するということである．しかし，一つ大切なことは，$\{g_{\alpha\beta}\}$ がテンソルのある座標系での成分であるため，座標系を変えるとその値が変化することである．特に，四つの座標があるので，10 個の $g_{\alpha\beta}$ には 4 個の任意関数の自由度がある．したがって，任意の初期値に対して，10 個の $g_{\alpha\beta}$ をすべて決定することは不可能である．初期面に対しての未来の座標系は任意に変更できるからである．実際，アインシュタイン方程式にはこのことが含まれている．ビアンキの恒等式

$$G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \tag{8.11}$$

は，10 個の $G^{\alpha\beta}$ の間に四つの（α のそれぞれの値に対して一つずつ）微分の恒等的関係があることを示している．したがって，これらの 10 個は独立ではなく，10 個のアインシュタイン方程式は，実際には，10 個の $g_{\alpha\beta}$ の間にある，座標系には依存しない幾何学的関係を指定する 6 個の関数関係を決めるための 6 個の独立な微分方程式なのである．

われわれがアインシュタイン方程式を解くことにより，ある初期状態からの時間発展を求めようとするとき，上記のことがきわめて重要になる．本書では第 9 章で弱い重力波について，制限された範囲に限って扱うことになる．アインシュタイン方程式が複雑であるため，動的な情況は通常は数値的に扱われる．$g_{\alpha\beta}$ のなかの座標系の自由度を，意味のある幾何学的で力学的な自由度と区別する問題に対しては数値的相対論による明確な扱い方が存在する．このことに関しては，Misner ら (1973) や Hawking と Ellis (1973) といった，もっと進んだ教科書に記述されている．Choquet–Bruhat と York (1980) や最近の Cook (2000) の解説も参考になる．ここでは単に $g_{\alpha\beta}$ の中の 6 個の量に対して 6 個の方程式があること，そしてアインシュタイン方程式は座標系の選択に何ら制限

をつけないということに注意しておけば十分であろう．

8.3　弱い重力場でのアインシュタイン方程式

近似的ローレンツ座標系　重力がなければ時空は平坦なのだから，弱い重力場は時空が“ほぼ”平坦なものである．この時空はメトリックの成分が

◆
$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \tag{8.12}$$

であるような座標系の存在する多様体であって，時空の各点で

$$|h_{\alpha\beta}| \ll 1 \tag{8.13}$$

が成り立っているものとして定義される．こうした座標系を近似的ローレンツ座標系という．“すべての座標系に対して”でなくて“座標系が存在する”としうことが重要である．ミンコフスキー空間でも，$g_{\alpha\beta}$ が $(-1, +1, +1, +1)$ という $\eta_{\alpha\beta}$ の単純な対角行列からはずれた座標系がありうるからである．一方，式 (8.12) と式 (8.13) が成り立つ座標系が存在すれば，同じような座標系がたくさん存在することになる．一つの近似的ローレンツ座標系を別の近似的ローレンツ座標系に移す座標変換の二つのタイプを以下で議論する．一つはバックグラウンドのローレンツ変換であり，もう一つはゲージ変換である．

ところで，なぜ近似的ローレンツ座標系に限るようなことをしなければならないのであろうか?　たった今，アインシュタイン方程式は座標系に関してはまったく制限をつけないと述べたばかりではなかったか?　したがって，方程式から得られる物理的結果は，どの座標系からみても同じであるべきではないのか?　もちろんその通りである．物理的な帰結はまったく同じである．ところが，へたに座標系を選ぶと，物理的な結果に至るのに必要な計算量は莫大なものになってしまう．(たとえば，自由粒子の運動を解くのに，ニュートンの方程式を球座標で表現したときや，ポアソン方程式を分離しない座標系で解くといったように.) もっと問題なのは，とんでもない座標系を選んでしまうと，面白い物理的結果を得るためになすべき計算を見いだすさいに，独創性を発揮できなかったり，物理内容に対する洞察が得られなくなる可能性があることであ

る．したがって，一般相対論の問題を解くにあたっての第一歩は，計算を最も簡単にできる座標系をつくることである．アインシュタイン方程式がまったく座標系に縛られないがゆえに，この自由度を正しい方向で使わなければならない．役に立つ座標系をつくり出すのは一種の技であって，一般にはたいへん難しい．しかし，当面の問題では $\eta_{\alpha\beta}$ が平坦な空間でのメトリックに対して最も簡単であることは明らかで，式 (8.12) と式 (8.13) が "近似的平坦" なメトリック成分に対しては一番簡単で最も自然である．

バックグラウンドのローレンツ変換　特殊相対論でのローレンツ変換の行列は

$$(\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = (1-v^2)^{-1/2} \tag{8.14}$$

である（x 方向への速度 v の運動に対して），弱い重力場に対し "バックグラウンドのローレンツ変換" を

$$x^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} x^{\beta} \tag{8.15}$$

の形をもつ変換で定義する．ここで，$\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}$ は特殊相対論でのローレンツ変換と同じで，その行列要素はあらゆる場所で一定である．いうまでもなく，特殊相対論の世界ではないので，この変換はとりうる変換の一部でしかない．しかし，この変換は特にうまい性質を備えている．それは，メトリックテンソルを変換してみるとわかるが，

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}} g_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}\eta_{\mu\nu} + \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}} h_{\mu\nu} \tag{8.16}$$

となる．ところがローレンツ変換では

$$\Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}\eta_{\mu\nu} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \tag{8.17}$$

となるので，

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \tag{8.18}$$

が得られる．ここで

◆
$$h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \equiv \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}h_{\mu\nu} \tag{8.19}$$

である．このようにバックグラウンドのローレンツ変換では，$h_{\mu\nu}$ はそれ自体が特殊相対論におけるテンソルであるかのように変換される．もちろん，$h_{\mu\nu}$ はテンソルではなく $g_{\mu\nu}$ の一部でしかない．しかし，この限定された変換のもつ性質からすると，話が好都合となる．つまり，ほんのすこし曲った時空は，その上で定義された“テンソル”$h_{\mu\nu}$ をもつ平坦な時空と考えることができる．したがって，あらゆる物理的な場（$R_{\mu\nu\alpha\beta}$ のような）は $h_{\mu\nu}$ を使って定義でき，それらは平坦なバックグラウンド時空の上の場“のようにみえる”．しかし，時空は実際には曲っており，こうした見方は座標変換のうちの限られた一つの変換を考えるときにのみ得られる．このことは，心にとめておくことが大切である．とはいえ，以下の計算で，こうした見方が役に立つことがわかるであろう．

ゲージ変換　これ以外にも，式 (8.12) と式 (8.13) を変化させない重要な座標変換がある．座標の微小変化で，成分が位置の関数である“ベクトル”ξ^{α} によって生成される．

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x^{\beta})$$

の形をしたものである．ξ^{α} が $|\xi^{\alpha}{}_{,\beta}| \ll 1$ という意味で微小であるとすると，

$$\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta} + \xi^{\alpha}{}_{,\beta}, \tag{8.20}$$

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'} = \delta^{\alpha}_{\beta} - \xi^{\alpha}{}_{,\beta} + O(|\xi^{\alpha}{}_{,\beta}|^2) \tag{8.21}$$

が得られる．微小量の 1 次までを考えると

$$g_{\alpha'\beta'} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \tag{8.22}$$

であることが容易に示される．ここで，

$$\xi_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta}\xi^{\beta} \tag{8.23}$$

と定義した．この式から座標変換は $h_{\alpha\beta}$ を

◆
$$h_{\alpha\beta} \to h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \tag{8.24}$$

のように変えることがわかる．$|\xi^{\alpha}{}_{,\beta}|$ がすべて小さければ，新しく得られる $h_{\alpha\beta}$ もまた小さく，適切な座標系にとどまっていることになる．この変換を**ゲージ変換**といい，それは式 (8.24) と電磁気学でのゲージ変換がきわめて類似しているために使われる名前である．その類似性については 8.6 節の練習問題 11 で扱う．アインシュタイン方程式が座標系に制限をつけないことから，式 (8.24) において任意の（微小な）"ベクトル"ξ^{α} を自由に選んでもよいことになる．以下ではこの自由度を使って，方程式をきわめて簡単化することになる．

慣れていない読者はあやふやになりがちであるので，式 (8.21) や式 (8.22) の α' と β' のような添字の役割について一言ふれておくのがよいであろう．添字につけたプライムやバーはある特別の座標系を使うことを意味している．たとえば，$g_{\alpha'\beta'}$ は $\{x^{\nu'}\}$ 座標系での $\mathbf{g}$ の成分であるといった具合である．しかし，添字のとる値はやはり（0，1，2，3）である．式 (8.22) の右辺にはプライムがないのは，すべての量がプライムなしの系で定義されているからである．したがって，もし $\alpha = \beta = 0$ であれば，式 (8.22) を "プライムつきの座標系での $\mathbf{g}$ の 0–0 成分は関数であって，任意の点でのその値は η の 0–0 成分とプライムなしの系でのその点での $h_{\alpha\beta}$ の 0–0 成分の和から，式 (8.23) で定義される ξ_0 をその点でのプライムなしの座標 x^0 で微分したものの 2 倍を引いたものである" と読むことになる．式 (8.22) は式 (8.15) などと違って，その添字が "そろって" いないので変に感じられるかもしれない．しかしこれで問題ないのである．式 (8.22) はこれまでのような正しいテンソル方程式ではないからである．その式は，二つの特別な座標系で表したテンソルの成分の間の関係を述べているにすぎない．一般的な座標依存性のない表現をしようとしたものではない．

リーマン・テンソル　式 (8.12) を使うと $h_{\mu\nu}$ の 1 次のオーダーまでで

$$◆\quad R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}) \tag{8.25}$$

であることが示される．8.6 節の練習問題 5 で示されるように，これらの成分はゲージ**独立**であって，式 (8.24) で変化しない．その理由は，座標変換は $\mathbf{R}$ の成分を成分間の線形的組合せに変換するということにある．ゲージ変換のような微小な座標変換では成分を微小にしか変化させない．しかし，成分自体がすでに微小量なので，その変化は 2 次のオーダーとなり，1 次のオーダーの表現

である式 (8.25) は変化しないのである．

弱い場でのアインシュタイン方程式　ここで前に述べた $h_{\alpha\beta}$ が "バックグラウンド" のミンコフスキー時空のテンソル，つまり特殊相対論でのテンソルであるという見方を採用しよう．すると，特殊相対論の枠組の中では，すべての方程式が正しいテンソル方程式となる．しかしもっと一般の座標変換に対しては正しくなる必要はない．もちろん，ゲージ変換は許されるが，それを座標変換とは見なさない．座標変換というよりは，ゲージ変換によって対称テンソル $h_{\alpha\beta}$ の同値類を定義することになる．ある ξ_α に対して式 (8.24) で結ばれる任意の 2 組は，物理的には同じ働きをするのである．この見方に沿って添字を上げた量を

$$h^{\mu}{}_{\beta} = \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\beta} \tag{8.26}$$

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\nu\beta} h^{\mu}{}_{\beta} \tag{8.27}$$

で，またそのトレースを

$$h \equiv h^{\alpha}{}_{\alpha} \tag{8.28}$$

で定義し，さらに $h_{\alpha\beta}$ の "トレース反転テンソル" を

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} h \tag{8.29}$$

で定義する．その名前は

$$\bar{h} \equiv \bar{h}^{\alpha}{}_{\alpha} = -h \tag{8.30}$$

であることからきている．さらに，式 (8.29) の逆が同様に

$$h^{\alpha\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} \bar{h} \tag{8.31}$$

として成り立つことがわかる．

これらの定義を使うと，式 (8.25) から出発してアインシュタイン・テンソルが

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}[&\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu} + \eta_{\alpha\beta}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - \bar{h}_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} \\ &- \bar{h}_{\beta\mu,\alpha}{}^{,\mu} + O(h_{\alpha\beta}^2)] \end{aligned} \tag{8.32}$$

となることを示すのは難しくない．（任意の関数 f に対して

$$f^{,\mu} \equiv \eta^{\mu\nu} f_{,\nu}$$

であることを思い起すこと.）もしも

◆
$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{8.33}$$

とすることができれば，式 (8.32) がきわめて簡単になるのは明らかである．これは，4 個の式であり，4 個の自由に決められるゲージ関数 ξ^α があるので，式 (8.33) が成り立つゲージを見つけられる可能性がある．このことが実際に成り立って，式 (8.33) を満たすゲージを選ぶことがつねに可能であることを示そう．そこで，この式をゲージ条件，特に**ローレンツ・ゲージ条件**とよぶ．この条件を満たす $h_{\mu\nu}$ があるとき，ローレンツ・ゲージを使用しているという．このゲージにこの名前がつけられたのは，やはり電磁気学とのアナロジーによる（8.6 節の練習問題 11 参照）．この同じゲージに対して，論文や教科書に出てくる名前としては，調和ゲージやデ・ドンダー・ゲージという場合もある．

このゲージが存在することは次のようにして示される．ある任意の $\bar{h}^{(\mathrm{old})}{}_{\mu\nu}$ があって，$\bar{h}^{(\mathrm{old})\mu\nu}{}_{,\nu} \neq 0$ であるとしよう．このとき式 (8.24) のゲージ変換によって，$\bar{h}_{\mu\nu}$ が

$$\bar{h}^{(\mathrm{new})}_{\mu\nu} = \bar{h}^{(\mathrm{old})}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^\alpha{}_{,\alpha} \tag{8.34}$$

に変ることが示される（8.6 節の練習問題 12）．したがって，その発散は

$$\bar{h}^{(\mathrm{new})\mu\nu}{}_{,\nu} = \bar{h}^{(\mathrm{old})\mu\nu}{}_{,\nu} - \xi^{\mu,\nu}{}_{,\nu} \tag{8.35}$$

となる．$\bar{h}^{(\mathrm{new})\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ となるゲージを求めたいときには，ξ^μ を

$$\Box\xi^\mu = \xi^{\mu,\nu}{}_{,\nu} = \bar{h}^{(\mathrm{old})\mu\nu}{}_{,\nu} \tag{8.36}$$

で決めればよい．ここで，記号 □ は 4 次元のラプラシアンで

$$\Box f = f^{,\mu}{}_{,\mu} = \eta^{\mu\nu} f_{,\mu\nu} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) f \tag{8.37}$$

のように表される．この作用素を**ダランベルシャン**とか波動作用素といい，と

きには Δ で表されることもある．方程式

$$\Box f = g \tag{8.38}$$

は三次元の非斉次の波動方程式で，いかなる（十分によいふるまいをするものであれば）g に対してもつねに解が存在する［Choquet–Bruhat ら (1977) 参照］．したがって，任意の $h_{\mu\nu}$ をローレンツ・ゲージに変換する ξ^μ がつねに存在する．実際には，この ξ^μ はただ一つには決らない．斉次な波動方程式

$$\Box \eta^\mu = 0 \tag{8.39}$$

を満たす任意のベクトル η^μ を ξ^μ に加えることができて，その和は

$$\Box(\xi^\mu + \eta^\mu) = \bar{h}^{(\mathrm{old})\mu\nu}{}_{,\nu} \tag{8.40}$$

を満たし，したがってやはりローレンツ・ゲージを与える．このように，ローレンツ・ゲージというのは一群のゲージのことなのである．

このゲージでは，式 (8.6) は（8.6 節の練習問題 10 参照）

$$G^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\Box\bar{h}^{\alpha\beta} \tag{8.41}$$

となる．したがって，弱い重力場でのアインシュタイン方程式は

◆ $$\Box\bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi T^{\mu\nu} \tag{8.42}$$

と表される．この式を**線形理論**での場の方程式という．この結果は $h_{\alpha\beta}$ の線形項のみを残して得られるものだからである．

8.4　ニュートン重力場

ニュートンの極限　　ニュートンの重力理論が成り立つのは，重力場が十分に弱くて光速度に近い速度にまで加速しないとき，つまり $|\phi| \ll 1$, $|\boldsymbol{v}| \ll 1$ のときであることが知られている．そうした情況では，一般相対論はニュートンの重力理論と同じ結果を与えなくてはならない．速度が遅いということは，成分 $T^{\alpha\beta}$ が，$|T^{00}| \gg |T^{0i}| \gg |T^{ij}|$ の関係を満たすことを意味している．ここ

で「典型的には」としかいえないのは，たとえば球対称星のような特殊な場合には T^{0i} が消えてしまって，二番目の不等式が成り立たないからである．しかし，ニュートン的な高速回転星の場合，T^{0i} は T^{ij} のどれよりもはるかに大きくなる．したがって，この大小関係は式 (8.42) を通して $\overline{h}_{\alpha\beta}$ にも引き継がれ，$|\overline{h}^{00}| \gg |\overline{h}^{0i}| \gg |\overline{h}^{ij}|$ という関係が出てくる．さらにもちろん，式 (8.42) の解としては，その右辺をゼロにする斉次の解を加えることが可能なので，どんな場合にも成り立つわけではないことに注意が必要である．そのような場合には，解は $T^{\alpha\beta}$ の成分の大きさからの制限を受けないからである．そうした斉次の解は，われわれが重力波とよんでいるものであり，次章で説明する．つまり，$\overline{h}_{\alpha\beta}$ の成分についてここで述べた大小関係は強い重力波が存在しない場合にのみ正しいのである．いうまでもなく，ニュートン重力には重力波は現れないので，一般相対論の中からニュートン重力を導き出そうとしている今の場合，この大小関係は正しいものである．こうして，主要な“ニュートン”重力場は重力場の方程式の主要部である

$$\Box \bar{h}^{00} = -16\pi\rho \tag{8.43}$$

から求まることになる．ここで，$T^{00} = \rho + O(\rho v^2)$ であることを使った．重力源が速度 $\boldsymbol{v}$ で運動することによってのみ変化する重力場では，$\partial/\partial t$ が $v\partial/\partial x$ と同じオーダーであることから，

$$\Box = \nabla^2 + O(v^2\nabla^2) \tag{8.44}$$

と書ける．したがって，微小量の最低次までの方程式は

$$\nabla^2 \bar{h}^{00} = -16\pi\rho \tag{8.45}$$

となる．この式をニュートンの方程式 (8.1)

$$\nabla^2\phi = 4\pi\rho$$

と比べて（$G = 1$ としてある），恒等式

$$\bar{h}^{00} = -4\phi \tag{8.46}$$

が得られる．$\bar{h}^{\alpha\beta}$ のほかの成分はこのオーダーでは無視できるので，

$$h = h^{\alpha}{}_{\alpha} = -\bar{h}^{\alpha}{}_{\alpha} = \bar{h}^{00} \tag{8.47}$$

であって，このことから

$$h^{00} = -2\phi \tag{8.48}$$

$$h^{xx} = h^{yy} = h^{zz} = -2\phi \tag{8.49}$$

あるいは,

$$\mathrm{d}s^2 = -(1+2\phi)\mathrm{d}t^2 + (1-2\phi)(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2) \tag{8.50}$$

であることがわかる．この式は式 (7.8) で与えられたメトリックと一致している．そのときに，このメトリックによって，正しいニュートンの運動の法則が得られることを示した．そのメトリックがアインシュタイン方程式から求められることをここで示したのだから，ニュートン重力が一般相対論の極限であることの証明が完了した．重要なことだが，アインシュタイン方程式の定数 8π が k の正しい値であることも確かめられた．

ほとんどの天体では第一近似としてニュートン重力を用いれば十分である．しかし，ニュートン重力を超える補正項までを計算する必要のある天体も多い．そうした補正をポスト・ニュートン効果とよび，8.6 節の問題 19 と 20 で二つの例を取り上げる．太陽系でのポスト・ニュートン効果には，水星の近日点移動と太陽による光の曲りという一般相対論における有名で基本的な検証実験が含まれている．それらについては第 11 章で解説する．太陽系の外の現象では，最も重要なポスト・ニュートン効果は連星パルサーの軌道の縮みであり，それは重力波に関しての一般相対論の予言を確認するものとなっている（第 9 章参照）．このようにポスト・ニュートン効果は一般相対論の精度の高い実験的検証に結びつくことになるので重要であり，その効果に関する理論も十分に発展させられてきていて，近似の精度も高次までなされているのである（Blanchet 2006，二間瀬と伊藤 2007）．

定常な相対論的重力源の遠距離場　アインシュタイン方程式の重力源が空間の狭い領域に限られている（“局所的な” 重力源）ときには，その源から十分に遠ざかることができて，その重力場は十分に弱く，そこでは線形理論が使える．そのような時空のことを漸近的に平坦であるとよぶ．つまり重力源から遠

く離れると時空は漸近的に平坦になるのである．そうすると，これまでに行ってきた議論をこの場合にも適用して，ϕ をニュートン・ポテンシャルとして，式 (8.50) が遠距離場を記述していると考えたくなる．そう考えることは二つの理由でまちがっている．まず，式 (8.50) を導いたときには，重力が重力源の内部を含めてどこでも弱いと仮定していた．式 (8.45) が式 (8.1) と重力源の中で一致することが肝心な点であったからである．当面の議論では，重力源中での重力の弱さについては何の仮定もしたくないのである．二番目の理由は，非常に相対論的な重力源のニュートン・ポテンシャル ϕ の決め方を知らないからである．したがって，式 (8.50) は意味をもたなくなってしまう．

したがって，線形化した方程式を直接扱うことにしよう．まず場の源 $T^{\mu\nu}$ は定常状態にある（つまり，時間依存性がない）と仮定するので，重力源から遠く離れたところの $h_{\mu\nu}$ も時間に依存しないと仮定することができる．（あとから，この仮定をゆるめる．）すると重力源から遠く離れると，式 (8.42) は

$$\nabla^2 \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \tag{8.51}$$

となる．この式の解は

$$\bar{h}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu}/r + O(r^{-2}) \tag{8.52}$$

と書けて，ここで $A^{\mu\nu}$ は定数である．さらに，ゲージ条件 (8.33) が成り立つことを要請しなければならない．つまり，

$$0 = \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \bar{h}^{\mu j}{}_{,j} = -A^{\mu j} n_j / r^2 + O(r^{-3}) \tag{8.53}$$

で，ν についての和は $\bar{h}^{\mu\nu}$ が時間に依存しないので空間の添字 j の和になってしまっている．また，n_j は動径方向の単位垂直で

$$n_j = x_j / r \tag{8.54}$$

のことである．すべての点 x^i について式 (8.53) が成り立つことから，μ と j のすべてについて

$$A^{\mu j} = 0 \tag{8.55}$$

となる．これによって，$\bar{h}^{00}$ のみが値をもつ．言い換えると遠距離場では

$$|\bar{h}^{00}| \gg |\bar{h}^{ij}|,\ |\bar{h}^{00}| \gg |h^{0j}| \tag{8.56}$$

であることがわかる．このことから，重力源から遠く離れたところでは，重力場がニュートン的な場のようにふるまうことが保証される．したがって，式 (8.46) を導いた議論を逆にして，定常な重力源の遠距離場の“ニュートン・ポテンシャル”を

$$(\phi)_{\text{relativistic far field}} = -\frac{1}{4}(\bar{h}^{00})_{\text{far field}} \tag{8.57}$$

で**定義**することができる．このように同定すると式 (8.50) が意味をもってきて，相対論的な重力源の遠距離場を記述することになる．

相対論的天体の質量の定義　　さて，ニュートン的な重力源から遠く離れたところのポテンシャルは

$$(\phi)_{\text{Newtonian far field}} = -M/r + O(r^{-2}) \tag{8.58}$$

であり，ここで M は（$G=1$ とした）重力源の質量である．したがって，式 (8.52) で定数 A^{00} を $4M$ と書き直せば，式 (8.57) の定義は

$$(\phi)_{\text{relativistic far field}} = -M/r \tag{8.59}$$

と述べたことになっている．惑星のような小物体が，相対論的な重力源の重力場中を自由落下していて，しかも遠方にあるときには，ϕ が式 (8.59) で与えられる．式 (8.50) のメトリックでの測地線に沿って運動する．7 章で，こうした測地線は質量 M の物体による重力場でのケプラーの法則に従うことを示した．したがって，この定数 M を相対論的な重力源の**全質量**と**定義する**．

この定義は重力源全体にわたる積分ではないことに注意せよ．構成する粒子の質量を加え合せたわけではない．そうではなくて，遠方にあるテスト物体の軌道運動から質量を測定する（“重さを測る”）のであり，地球や太陽や惑星の質量を天文学者が測定するときに使う方法なのである．この定義によって**任意**の定常的な重力源から遠方では式 (8.50) を

$$\begin{aligned}ds^2 = &-[1-2M/r+O(r^{-2})]dt^2 \\ &+[1+2M/r+O(r^{-2})](dx^2+dy^2+dz^2)\end{aligned} \tag{8.60}$$

と書くことができる．重力源のところだけの積分をしているのではないので，遠方で決める定数 M の源としては，たとえば，ブラックホールのように，ニュートン重力から考えられるものとかなり異なることもあるのを理解することは大切である．8.6 節の問題 20 の重力質量に関する議論も参照のこと．

重力源が定常であるという仮定は波動方程式 (8.42) からラプラス方程式 (8.51) を導出するのに必要であった．時間的に変化する重力源は重力波を放出でき，次の章でみるように，重力波は重力源から光速で伝播していくので式 (8.56) の条件に従わない．したがって，ニュートン的な場とは見なせなくなる．しかしながら，ここに示した質量の定義を安心して使える場合がある．波動が非常に弱くて，$\bar{h}^{00}$ の定常成分が波動成分に比べて大きいとき，あるいは，重力源がはるかな過去に定常であって，十分に大きな r をとると波はまだその大きな距離 r を伝わってきていないといった場合である．時間に依存する重力源の質量の定義は，Misner ら (1973) や Wald (1985) といったもう少し進んだ教科書で詳しく述べられている．

8.5　文　　献

アインシュタイン方程式を “導く”（実際のところは，確かめる）のにはいくつもやり方がある．そのうちのいくつかは次に述べる教科書にでている．もとの方程式を解くのが難しいとき，弱い場や線形近似の方程式が一般に有効となる．本書のこれからの章でもそうした近似をよく利用するし，たいていの教科書でも扱っている．ここで示したニュートン極限への移行は非常に系統性に欠けた，思いつきに頼ったやり方であったが，ニュートン方程式の幾何学的性質 [Misner ら (1973)，Cartan (1923)] や極限の漸近的性質 [二間瀬と Schutz (1983)] を明らかにするもっと厳密なやり方がある．ポスト・ニュートン理論は Blanchet (2006) や二間瀬と伊藤 (2007) のレビュー論文にまとめられている．Einstein 自身のたどった重力場方程式の導出はわれわれの方法よりもかなり回り道をしたものである．彼の残したノートを調べてみると，彼の考えの前提の多くはまちがっていたことがわかる．Renn (2007) が編集した記念すべき版を参照するとよい．

ここでは一般相対論について広く役立つ教科書をいくつかあげるのが適当であろう．それぞれの本が想定している読者の基礎知識や高等な知識は，おのおので違っている．予備知識をほとんど必要としない名著としては Hartle (2003) と Rindler (2006) がある．大学院初年程度のものとして Carroll (2003), Glendenning (2007), Gron と Hervik (2007), Hobson ら (2006), Misner ら (1973) の一部，Møller (1972), Stephani (2004), Weinberg (1972) と Woodhouse (2007) がある．学生にとってかなりハードなものとしては，Hawking と Ellis (1973), Landau と Lifshitz (1962), Misner ら (1973) の大部分，Synge (1960) と Wald (1984) がある．また本書の内容は，たいていの場合さらに進んだ教科書を補足的に読むのに十分な知識を与えるはずである．

問題を解くのは理論を理解する上で重要な要素であり，少し古いが Lightman ら (1975) の問題集は本書の問題を十分に補足するものである．ある程度の数学の入門は Schutz (2003) を参照のこと．

8.6　練　習　問　題

1　次のようにして式 (8.2) が式 (8.1) の解であることを示せ．質点が原点 $r=0$ にあり，球対称な重力場をつくっているとする．次に，半径 r の球面にガウスの法則を適用して，

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}=\frac{Gm}{r^2}$$

であることを導け．この式から式 (8.2) を導け．（無限遠でのふるまいを考えよ．）

2　(a) SI 系での G と c の値を使って次の有用な変換の換算率を導け．

$$\frac{G}{c^2}=7.425\times10^{-28}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{kg}^{-1}=1,$$
$$\frac{c^5}{G}=3.629\times10^{52}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1}=1$$

(b) 表 8.1 に掲げた定数の SI 単位の値から距離化単位の値を求めよ．

(c) 次の量を距離化単位で表せ．

(i) 密度（中性子星での典型的な値）$\rho=10^{17}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$

(ii) 圧力（中性子星での典型的な値）$p=10^{33}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{m}^{-1}$

(iii) 地球表面での重力加速度　$g=9.80\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

(iv) 超新星の光度　$L=10^{41}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

(d) 自然界において，次元をもった三つの定数 c, G, $\hbar$ は基本的なものと考えられている．$c = G = 1$ とすることで，$\hbar$ は m^2 の単位をもつ．したがって，$\hbar^{1/2}$ が長さの基本的な単位を与えることになり，プランク長さという．表 8.1 から $\hbar^{1/2} = 1.616 \times 10^{-35}$ m と求められる．この数値は相対論と重力と量子論の基本的定数を含んでいるので，物理学者はこの長さが量子重力において重要な役割を果すと考えている．SI 系での c, G, $\hbar$ の値を使ってこの長さを表現してみよ．同様にして，変換の換算率を使って，c, G, $\hbar$ からつくられる質量と時間の単位をもった基本的な数値，プランク質量とプランク時間を計算せよ．これらの基本的な数値を素粒子論で知られている典型的な質量，長さ，時間尺度と比較せよ．

3 (a) 距離化単位で計算せよ．

(i) 太陽のニュートン・ポテンシャルの太陽表面での値．太陽半径は 6.960×10^8 m.

(ii) 太陽のニュートン・ポテンシャルの地球軌道での値．$r = 1\,\mathrm{AU} = 1.496 \times 10^{11}$ m.

(iii) 地球のニュートン・ポテンシャルの地球表面での値．地球半径は 6.371×10^6 m.

(iv) 太陽のまわりを軌道運動する地球の速度．

(b) (ii) の値が (iii) より大きいことに気づいたはずである．それでは，なぜ地球上では太陽より地球の引力を強く感じるのであろうか．

(c) ニュートン理論では，質量 M の物体のまわりの円軌道において，ϕ をニュートン・ポテンシャルとすると，その速度が $\boldsymbol{v}^2 = -\phi$ となることを示せ．

4 (a) A を $n \times n$ 行列で，すべての要素が小さく $|A_{ij}| \ll 1/n$ であるとし，I を単位行列とする．このとき

$$(I + A)^{-1} = I - A + A^2 - A^3 + A^4 - \cdots + \cdots$$

であることを，次のように説明せよ．(i) 右辺の級数が絶対収束することを，n^2 個の要素について証明し，また (ii) 右辺に $(I + A)$ を掛けたものが I になることを証明する．

(b) (a) を使って，式 (8.20) から式 (8.21) を確かめよ．

5 (a) $h_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha}$ ならば，式 (8.25) はゼロとなることを示せ．

(b) このことから，式 (8.25) がゲージ不変であることを議論せよ．

(c) このことと 7.6 節の練習問題 10 との関係を述べよ．

6 弱い重力場の理論では $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ で，$|h_{\mu\nu}| \ll 1$ を仮定する．同様に，$g^{\mu\nu}$ は $\eta^{\mu\nu}$ とあまり変らず，たとえば $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$ と書けるとする．練習問題 4 (a) を使って，$\delta g^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu} + O(h^2)$ であることを示せ．したがって，$\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}$ は $g^{\mu\nu}$ の平坦からのずれではないことを示せ．

7 (a) $\bar{h}^{\alpha}{}_{\alpha} = -h^{\alpha}{}_{\alpha}$ を証明せよ．

(b) 式 (8.31) を証明せよ．

8 式 (8.32) を次の順序で示せ．

(a) $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \eta^{\alpha\sigma} R_{\sigma\beta\mu\nu} + O(h^2_{\alpha\beta})$ であることを示せ．

(b) これから $R_{\alpha\beta}$ を $h_{\mu\nu}$ の 1 次まで計算せよ．

(c) $g_{\alpha\beta} R = \eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + O(h^2_{\alpha\beta})$ であることを示せ．

(d) これによって，

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} R$$

であること，つまり式 (8.29) の意味で，線形化された $G_{\alpha\beta}$ は線形化された $R_{\alpha\beta}$ のト**レース反転**であることを示せ．

(e) このことを使って，式 (8.32) の計算をもう少し簡単化せよ．

9 (a) 式 (8.32) から G_{00} と G_{01} が $\bar{h}_{\alpha\beta}$ の時間について 2 階の微分を含まないことを示せ．したがって，**6 個の**方程式 $G_{ij} = 8\pi T_{ij}$ のみが力学的な方程式である．方程式 $G_{0\alpha} = 8\pi T_{0\alpha}$ は**束縛**方程式とよばれる．それらの式は，ほかの 6 個の方程式の初期データの間の関係を与えており，それらのデータをまったく自由には選ぶことはできない．

(b) 式 (8.42) は μ と ν がゼロであっても時間の 2 階微分を含んでいる．これは (a) と矛盾しないか?　それはなぜか?

10 ローレンツのゲージ条件式 (8.33) を使って，$G_{\alpha\beta}$ を式 (8.41) に簡単化せよ．

11 マクスウェル方程式を特殊相対論的に書くと，スカラーポテンシャル ϕ と三次元ベクトルポテンシャル A_i（符号は $E_i = -\phi_{,i} - A_{i,0}$ で定義する）を一形式の成分 $A_0 = -\phi$，A_i（一形式）$=A_i$（三次元ベクトル）として考えることになる．ゲージ変換は $\phi \to \phi - \partial f/\partial t$，$A_i \to A_i + f_{,i}$ という置き換えである．この変換では電場と磁場は変化しない．ローレンツ・ゲージは $\partial\phi/\partial t + \nabla_i A^i = 0$ となるゲージである．ゲージ変換とローレンツ・ゲージ条件を四次元テンソル記法で書け．線形化した重力理論での同様な方程式との類似点を示せ．

12 式 (8.34) を証明せよ．

13 ニュートン的な系に対する不等式 $|T^{00}| \gg |T^{0i}| \gg |T^{ij}|$ は，練習問題 2 (c) で例が示されている．この関係が一般にも成り立つことを物理的に証明せよ．

14 式 (8.46) と成分 $h_{\alpha\beta}$ の間に成り立つ不等式を使って，式 (8.47)～(8.50) を書け．

15 弱い重力場の問題（あるいはほかの場合でも）を扱うには適切な座標系を使うべきであるが，物理的な結果は座標に依存しない言葉で表現すべきであることを議論した．この立場からすると，ニュートン極限を導いたやり方は不十分である．7 章では，

式 (8.50) のメトリックがニュートンの法則 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t = -m\nabla\phi$ を与えることを示したにすぎないからである．明らかにこの式は座標時間と位置座標を含んだ座標依存性のある方程式である．そして，明らかに4次元的な適切なテンソル方程式ではない．物理的な測定によって，相対論的な結果がニュートン的な結果に一致することを確かめることができることを示して，上記の議論の欠陥を補え．(たとえば，ある軌道上での固有時間とその固有な円周の長さの関係はどうなっているか?)

16　式 (8.10) で 8π を k で置き換え，この置き換えによって変化する以後の式をたどっていって，ニュートン極限を導き直せ．$k = 8\pi$ のときのみ，式 (8.50) が再現されることを確かめよ．

17　(a) 静的な中性子星のまわりに，固有の円周の長さが 6×10^{11} m の円軌道を描いている小さな惑星がある．その軌道周期は惑星の固有時間で 200 日である．中性子星の質量 M を求めよ．

(b) 静的なブラックホールのまわりに，5 個の衛星が円軌道を描いている．固有の円周の長さと固有軌道周期は下の表に与えてある．(a) の方法によって，ブラックホールの質量を求めよ．各衛星から得られた結果の傾向を説明せよ．

固有の円周の長さ (m)	2.5×10^6	6.3×10^6	6.3×10^7	3.1×10^8	6.3×10^9
固有周期 (s)	8.4×10^{-3}	0.055	2.1	23	2.1×10^3

18　Λ を適当にとり $k = 8\pi$ として，宇宙項のある場の方程式 (8.7) を考える．

(a) ニュートン極限を求め，$|\Lambda|$ が十分小さいときのみ，惑星の運動を正しく導くことができることを示せ．冥王星の軌道半径が 5.9×10^{12} m であるとすると，太陽系での測定によって，$|\Lambda|$ の上限はどうなるか?

(b) Λ を式 (8.7) の右辺に移項すると，$-\Lambda g^{\mu\nu}/8\pi$ を "からっぽの空間" のストレス–エネルギーテンソルと見なすことができる．宇宙の中で，われわれの銀河の近傍の領域で観測される質量の密度は，一様分布を仮定すると，約 $10^{-27}\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ である．(a) で求めた $|\Lambda|$ の上限値をとると，観測できる宇宙論的な影響がでてくると思うか? 逆に，Λ が宇宙の質量密度と同程度の大きさであるとすると，太陽系を扱うときに方程式に宇宙定数で取り入れる必要があるだろうか?

19　この問題では，回転している重力源がニュートン的な解に対して及ぼす 1 次の補正を計算する．ニュートンの重力理論では，重力源の角運動量は場に影響しない．つまり同じ $\rho(x^i)$ 分布で異なる角運動量をもつ二つの重力源は同じ場を与える．相対論では $T^{\mu\nu}$ のすべての成分が場をつくるので影響が現れる．この問題でわれわれは，

ニュートン重力には存在しない一般相対論の効果を取り入れることになり，それをポスト・ニュートン効果という．

(a) 一様密度 ρ で半径 R の球が一定角速度 Ω で x^3 軸のまわりに回転しているとする．ρ, Ω, R が時間的に一定であるとして，球の重心が静止しているようなローレンツ系をとって，成分 $T^{0\nu}$ を書き下せ．各成分に対して，ΩR に関して最低次の項を計算せよ．

(b) $\nabla^2 f = g$ の一般解で，無限遠でゼロになるものは，式 (8.2) を一般化したもので，

$$f(x) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{g(y)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\mathrm{d}^3 y$$

と書け，g が小領域でゼロでないとき式 (8.2) に移行する．(a) で示された重力源について，このことを使って式 (8.42) を $\bar{h}^{00}$ と $\bar{h}^{0j}$ について解け．物体の外部についての解を，r^{-1} のゼロでない最低次の項まで計算せよ．ここで，r は球の中心からの距離である．$\bar{h}^{0j}$ についての結果を物体の角運動量を使って表せ．この近似の範囲で，メトリックテンソルを求め，それを球座標に変換せよ．

(c) メトリックは t にも角度 ϕ にも依存しないので，この物体のまわりで軌道運動をする粒子では，軌道に沿って p_0 と p_ϕ が一定になる（7.4 節参照）．赤道面上で半径 r の円軌道を描く質量がゼロでない粒子を考える．正の方向（中心の天体の回転と同じ方向の回転）と負の方向での軌道周期の差を Ω の最低次まで計算せよ．（周期を軌道を 1 周して $\Delta\phi = 2\pi$ 変化するのにかかる座標時間として定義せよ．）

(d) このことから，中心天体の角運動量 J を求めるための実験法を考えよ．中心天体として太陽 ($M = 2\times10^{30}\,\mathrm{kg}$, $R = 7\times10^{8}\,\mathrm{m}$, $\Omega = 3\times10^{-6}\,\mathrm{s}^{-1}$) をとり，軌道運動する物体として地球 ($r = 1.5\times10^{11}\,\mathrm{m}$) をとろう．正の方向と負の方向で 1 年の差はいくらか?

20　この問題では能動重力質量密度という概念を導入する．式 (8.42) で弱い場におけるアインシュタイン方程式を導いた後，速度の遅いニュートン極限の場合のみに限定して扱った．ここでは，速度が遅いとか圧力が密度よりも十分に小さいといった仮定ができない状況を扱ってみよう．

(a) 式 (8.42) においてトレース反転操作を行い次式を導け．

$$\Box k^{\mu\nu} = -16\pi\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}T^{\alpha}{}_{\alpha}\eta^{\mu\nu}\right) \tag{8.61}$$

(b) 考える系が孤立しており定常状態にあるとすると，その系から遠く離れた場所では，式 (8.50) を導く際に議論したように，重力場としては，h^{00} が一番大きな成分を与える．その系では内部の重力は弱いが圧力は強い場合，$h^{00} = -2\phi$ となることを

示せ．ここで ϕ はニュートン的なポアソン方程式

$$\nabla^2\phi = 4\pi(\rho + T^k{}_k) \tag{8.62}$$

を満たす量である．完全流体の場合，この式の右辺は $4\pi(\rho+3p)$ となり，それを一般相対論では能動重力質量密度という．系がニュートン的であると，$p \ll \rho$ なので，通常のニュートン極限になる．これはポスト・ニュートン効果の第二の例である．

9
重　力　波

9.1　重力波の伝播

時空のある領域で重力場は弱いが定常的でないようなことが起りうる．そのような情況は，たとえば急激な変化をしている相対論的な源から非常に遠方で実現される．ただし，その変化によって引き起された時空のゆらぎが，考えている遠方の領域にとどくために十分昔に起ったとする．この問題を前章で述べた線形近似を用いて考えよう．しかし，最初には 8.4 節でのニュートン的扱いのときには考えなかった斉次方程式の解をしらべてみる．アインシュタイン方程式 (8.42) は場の源から遠く離れた真空中（$T^{\mu\nu}=0$）で次の形をとる．

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)\bar{h}^{\alpha\beta}=0 \tag{9.1}$$

この章では，$\partial^2/\partial t^2$ を無視しない．式 (9.1) は，三次元波動方程式とよばれる．この式が次の（複素数の）解をもつことを示す．

$$\bar{h}^{\alpha\beta}=A^{\alpha\beta}\exp(\mathrm{i}k_\alpha x^\alpha) \tag{9.2}$$

ここで $\{k_\alpha\}$ はある一形式の（実数の）定数成分，$\{A^{\alpha\beta}\}$ はあるテンソルの（複素数の）定数成分である．（最終的には複素数の解の実数部分を取り出す．）式 (9.1) は次のようにも書ける．

$$\eta^{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu,\nu}=0 \tag{9.3}$$

式 (9.2) から

$$\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu} = \mathrm{i}k_\mu \bar{h}^{\alpha\beta} \tag{9.4}$$

したがって式 (9.3) は

$$\eta^{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu,\nu} = -\eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu \bar{h}^{\alpha\beta} = 0$$

これは次の場合に限って消える．

$$\eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = k^\nu k_\nu = 0 \tag{9.5}$$

したがって，式 (9.2) は k_α が**ヌル**一形式，あるいは同じことだがそれに附随する四次元ベクトル k^α がヌル，すなわち光子の世界線に接する場合，式 (9.1) の解となる．（われわれは添字を平坦な空間のメトリックテンソル $\eta^{\mu\nu}$ で上げ下げした．したがって k^α はミンコフスキー・ヌルベクトルである.）式 (9.2) は波動的な解を表す．$\bar{h}^{\alpha\beta}$ の値は，$k_\alpha x^\alpha$ が一定となる超平面上で一定である．

$$k_\alpha x^\alpha = k_0 t + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} = \text{一定} \tag{9.6}$$

ここで，$\boldsymbol{k}$ は $\{k^i\}$ を表す．k^0 を ω と表すのが通例である．これは波の振動数とよばれる．

$$\vec{k} \to (\omega, \boldsymbol{k}) \tag{9.7}$$

は，$\vec{k}$ の時間–空間分解である．あるヌルベクトル $\vec{k}$ の方向に動いている光子を考える．それは次の曲線上を動く．

$$x^\mu(\lambda) = k^\mu \lambda + l^\mu \tag{9.8}$$

ここで λ はパラメーター，l^μ は定数ベクトル（$\lambda = 0$ での光子の位置）である．式 (9.8) と式 (9.5) から

$$k_\mu x^\mu(\lambda) = k_\mu l^\mu = \text{一定} \tag{9.9}$$

これを式 (9.6) と比べると，光子は重力波とともに走り，永久に同じ位相にとどまっていることがわかる．このことを，重力波自身が光の速度で走り，$\vec{k}$ がその運動方向であるという．$\vec{k}$ がヌルベクトルであることは，次式を意味する．

$$\omega^2 = |\boldsymbol{k}|^2 \tag{9.10}$$

これは波動に対する分散関係とよばれる．波動理論になじみのある読者は式 (9.10) からすぐに波の位相速度が，その群速度と同様に 1 であり，分散がないことがわかるだろう．

アインシュタイン方程式は，次のゲージ条件

$$\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \tag{9.11}$$

を課した場合にのみ，式 (9.1) の簡単な形をとる．この条件の帰結を考えなければならない．式 (9.4) から

$$A^{\alpha\beta}k_\beta = 0 \tag{9.12}$$

これが $A^{\alpha\beta}$ に対する制限である．$A^{\alpha\beta}$ は $\vec{k}$ に直交していなければならない．

解 $A^{\alpha\beta}\exp(\mathrm{i}k_\mu x^\mu)$ は**平面波**とよばれる．（もちろん物理的応用では，$A^{\alpha\beta}$ に複素数も許して，この表現の実部だけを用いる．）フーリエ解析の定理から式 (9.1) と式 (9.11) のどんな解も平面波解の重ね合せで表される（9.7 節の練習問題 3 を参照）．

トランスバース–トレースレスゲージ　今までは振幅 $A^{\alpha\beta}$ に対し一つだけの制限 (9.12) をつけていたが，ゲージの自由度を用いると，さらに制限をつけることができる．式 (8.38) から次の方程式を満たす任意のベクトル ξ_α を用いるとローレンツ–ゲージの範囲内でゲージを変えることができる．

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\xi_\alpha = 0 \tag{9.13}$$

次の解を選ぶ．

$$\xi_\alpha = B_\alpha \exp(\mathrm{i}k_\mu x^\mu) \tag{9.14}$$

ここで，B_α は定数，k^μ はわれわれの波動解と同じヌルベクトルである．この解は式 (8.24) で与えられる次のような変化を $h^{\alpha\beta}$ に引き起す．

$$h^{(\mathrm{NEW})}_{\alpha\beta} = h^{(\mathrm{OLD})}_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \tag{9.15}$$

これによる $\bar{h}_{\alpha\beta}$ の変化は式 (8.34) で与えられる．

$$\bar{h}^{(\mathrm{NEW})}_{\alpha\beta} = \bar{h}^{(\mathrm{OLD})}_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + \eta_{\alpha\beta}\xi^{\mu}{}_{,\mu} \tag{9.16}$$

式 (9.14) を用い，すべての項に共通な指数因子を除くと

$$A^{(\mathrm{NEW})}_{\alpha\beta} = A^{(\mathrm{OLD})}_{\alpha\beta} - \mathrm{i}B_\alpha k_\beta - \mathrm{i}B_\beta k_\alpha + \mathrm{i}\eta_{\alpha\beta}B^\mu k_\mu \tag{9.17}$$

9.7 節の練習問題 5 でさらに次の二つの制限を $A^{(\mathrm{NEW})}_{\alpha\beta}$ に課すように，B_α が選べることが示される．

◆
$$A^{\alpha}{}_{\alpha} = 0 \tag{9.18}$$

◆
$$A_{\alpha\beta}U^\beta = 0 \tag{9.19}$$

ここで $\vec{U}$ はある固定された四元ベクトル，すなわち任意に選べる時間的な定数単位ベクトルである．式 (9.12)，(9.18)，(9.19) の全体を，**トランスバース–トレースレス**（TT）ゲージ条件という．[“トレースレス” という言葉は式 (9.18) を意味する．“トランスバース” については以下で説明する．] これですべてのゲージ自由度を使ってしまったので，$A_{\alpha\beta}$ の残りの成分はすべて物理的なものでなければならない．ところでトレースレス条件 (9.18) は次を意味することに注意せよ．

$$\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{\alpha\beta} = h^{\mathrm{TT}}_{\alpha\beta} \tag{9.20}$$

バックグラウンドのミンコフスキー空間に対して，TT ゲージをつくるときのベクトル $\vec{U}$ を時間の基底ベクトル $U^\beta = \delta^\beta_0$ となるようなローレンツ系をとろう．(すなわち，バックグラウンドのローレンツ変換をする.) すると式 (9.19) は，すべての α に対して $A_{\alpha 0} = 0$ となる．この系で波が z 方向に伝わり，$\vec{k} \to (\omega,\ 0,\ 0,\ \omega)$ となるように空間軸を選ぶ．すると式 (9.19) と式 (9.12) から，すべての α に対して $A_{\alpha z} = 0$ となる．（これがゲージに対する “トランスバース” という形容詞の語源である．$A_{\mu\nu}$ は波の伝播方向 $\vec{e}_z$ に直交する.）この二つの制限は，A_{xx}，A_{yy} と $A_{xy} = A_{yx}$ だけがゼロでないことを意味する．さらにトレース条件 (9.18) から，$A_{xx} = -A_{yy}$ となる．行列形で書くと，この特別に選ばれた系では

$$(A^{\mathrm{TT}}_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{xy} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.21}$$

と書け，独立な定数は，A^{TT}_{xx} と A^{TT}_{xy} の二つだけとなる．これらの物理的意味を次にみていこう．

自由粒子に対する波の影響　前に注意したように，どんな波も平面波の重ね合せである．もし波が z 方向に伝わっているなら，そのすべての平面波の成分を式 (9.21) の形におくことができるから，どんな波も二つだけの独立成分 h^{TT}_{xx} と h^{TT}_{xy} をもつことになる．はじめは波のない時空領域にいた粒子が，重力波と出会うような情況を考えよう．粒子がはじめに静止しているようなローレンツ系を選び，この系に対する TT ゲージをとる．[すなわち式 (9.19) の四元速度 U^α が粒子の初期の四元速度である.] 自由粒子は測地線方程式 (7.9) に従う．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}U^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 0 \tag{9.22}$$

最初，粒子は静止しているから，その加速度の初期値は

$$\left(\frac{\mathrm{d}U^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right)_0 = -\Gamma^\alpha{}_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(h_{\beta0,0} + h_{0\beta,0} - h_{00,\beta}) \tag{9.23}$$

しかし式 (9.21) から $h^{\mathrm{TT}}_{\beta0} = 0$ だから，初期加速度は消える．これは粒子は一瞬後にも静止したままであることを意味する．同じ議論をくり返せば，加速度はその後も消え続けることになる．したがって，波がぶつかったにもかかわらず，粒子は永久に静止したままでいるという結果になる！　しかし“静止している”とは単に一定の座標位置にとどまっていることを意味するだけで，あまり軽率な解釈をしてはならない．わかったことは，TT ゲージ（これは座標の“凹凸”に特別の調節をすることを意味する）を選ぶことによって，個々の粒子にくっついたままにとどまっている座標系を見つけることができた．このことは幾何学的に不変な意味をもつものではない．

波の影響をよりよく測るために，近傍にある二つの粒子を考えよう．一つは原点，他方は $x = \varepsilon$，$y = z = 0$ にあり，はじめはともに静止していたとする．

すると，その座標位置に二つの粒子はとどまったままでい続けるが，それらの間の固有距離は

$$
\begin{aligned}
\Delta l \equiv \int |\mathrm{d}s^2|^{1/2} &= \int |g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta|^{1/2} \\
&= \int_0^\varepsilon |g_{xx}|^{1/2}\mathrm{d}x \approx |g_{xx}(x=0)|^{1/2}\varepsilon \\
&\approx \left[1+\frac{1}{2}h_{xx}^{\mathrm{TT}}(x=0)\right]\varepsilon
\end{aligned}
\tag{9.24}
$$

h_{xx}^{TT} は一般にゼロではないから，(座標距離とは反対に) **固有**距離は時間とともに変る．これは座標に依存する数（粒子の位置）と座標に依存しない数（二つの粒子間の固有距離）の計算の違いの一例である．波の効果は座標に依存しない数によって，あいまいさなしにみることができる．二つの粒子間の固有距離は計算することができる．それには二つの方法があり，後に「空間ののびを測る」の節で説明する．重力場の物理的な影響が測定にはつねに現れるのである．

式 (9.24) は多くのことを含んでいる．第一には，2 粒子間の距離の変化量は初期における隔たり ε に比例していることである．初期の隔たりが大きければ，重力波による距離の変化は大きくなる．それゆえ，以下に説明するように，現在の重力波検出器は巨大なものが計画されたりつくられたりしている．そして，(地上の検出器の場合) 数 km とか (宇宙空間の場合) 数百万 km の隔たりの変化を測定するのである．式 (9.24) からわかる第二のことは，重力波の影響は，h_{ij}^{TT} に比例していて小さいことである．あとの重力波の発生のところで示すように，これらの無次元化された量は典型的には 10^{-21} 以下なのである．したがって，重力波検出器は相対的な距離の変化が 10^{21} 分の 1 程度の距離の変化に反応するものでなくてはならない．この値は 2005 年にはじめて達成された実験的な結果であり，感度の改良は絶えずなされている．

潮汐加速度：重力波による力　　重力波が自由粒子にどのような影響を及ぼすかについての別の扱い方は，測地線偏差の方程式 (6.87) を使うものである．次の段落以降に示すように，重力波の作用が潮汐力として粒子に及ぶというもので，粒子が自由粒子なのかそうでないのかを問わない．

前と同じように二つの自由落下している粒子を考え，その二つの粒子を結ぶベクトル $\vec{\xi}$ をとる．これまでのように TT 座標系で扱うとすると，その座標系

で粒子が静止しているというのは，$\vec{\xi}$ の成分が一定であることである．TT 座標系での成分を測定値と結びつけていなかったために，成分が一定であることは正しいのだが，実際に役立てることはできない．われわれは測定と密接に結びついた座標系である，$\vec{\xi}$ の一端にある第一の粒子の測地線上の点での局所慣性系を使用する．この系では，座標の 2 次以上の項を無視するとき，座標距離は固有距離に等しい．したがってこの座標系では，二つの測地線が十分に近い場合には，$\vec{\xi}$ の成分は測定可能な固有距離に対応する．

そのうえ，この系では式 (6.87) の 2 階の共変微分が単純になる．ここでは $\vec{V}$ ではなく測地線に接する $\vec{U}$ を使って $\nabla_U \nabla_U \xi^\alpha$ となるところから始められる．すると $\vec{\xi}$ に作用する 1 階の共変微分は $\mathrm{d}\xi^\alpha/\mathrm{d}\tau$ となる．しかし，二番目の微分は共変微分なので，$\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau$ だけではなくクリストフェル記号を含む項が現れる．しかしながら，ここでの局所慣性系では，その点においてクリストフェル記号はすべて消えるので，二番目の微分は τ に関する 2 階の常微分になる．その結果は局所慣性系では，

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\xi^\alpha = R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} U^\mu U^\nu \xi^\beta \tag{9.25}$$

となる．ここで $\vec{U} = \mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}\tau$ は二つの粒子の四元速度である．この座標では，必要な $\vec{U}$ の成分は最低次（平坦な空間での量）までだけである．というのは，$h_{\mu\nu}$ による U^α のどんな補正も（$R^\alpha{}_{\mu\nu\beta}$ がすでに $h_{\mu\nu}$ の 1 次だから）上の方程式で $h_{\mu\nu}$ の 2 次の項を与えるにすぎないからである．したがって，$\vec{U} \to (1,\ 0,\ 0,\ 0)$ であり，初期には $\vec{\xi} \to (0, \varepsilon,\ 0,\ 0)$ である．$h_{\mu\nu}$ の 1 次までで式 (9.25) は次のようになる．

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\xi^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^\alpha = \varepsilon R^\alpha{}_{00x} = -\varepsilon R^\alpha{}_{0x0} \tag{9.26}$$

これが一番の基本となる結果である．これによれば，リーマン・テンソルを，近傍の測地線の固有距離の変化の局所的な計測から求めることができる．

さて，リーマン・テンソルそのものはゲージ不変なので，その成分は局所慣性系と TT 座標系の選択に依存しない．そのことは式 (9.26) の左辺が座標ゲージとは独立でなくてはならないことからも示される．したがって，ξ^α を二つの粒子を結ぶベクトル $\vec{\xi}$ の成分の固有距離と見なすことができる．言い換えると，ベクトルで結ばれた座標間隔に関して，四つの座標軸方向に沿った固有距離で

ある．この解釈をすることにより，ゲージの取り方を気にする必要がなくなり，式 (9.26) 全体がゲージ不変であることが帰結される．

この式にゲージの取り方の自由度が残されていることを確認するために，TT ゲージのメトリックの成分を使用してリーマン・テンソルの成分を書き表してみよう．リーマン・テンソルの成分がゲージ不変であることから，簡単に書き表すことができる．その成分は TT ゲージで特に簡単になることもあり，計算しておく価値がある．式 (8.25) を使って，z 軸方向に進む波の場合，成分が次のようになることを示すのは難しくない．

$$\left.\begin{aligned} R^x{}_{0x0} &= R_{x0x0} = -\tfrac{1}{2}h^{\mathrm{TT}}_{xx,00} \\ R^y{}_{0x0} &= R_{y0x0} = -\tfrac{1}{2}h^{\mathrm{TT}}_{xy,00} \\ R^y{}_{0y0} &= R_{y0y0} = -\tfrac{1}{2}h^{\mathrm{TT}}_{yy,00} = -R^x{}_{0x0} \end{aligned}\right\} \tag{9.27}$$

その他の成分はゼロとなる．このことは，たとえば最初に x 方向に離れていた粒子が，次式に従う成分をもつ連結ベクトル $\vec{\xi}$ をもつことを意味する．

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^x = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}h^{\mathrm{TT}}_{xx}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^y = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}h^{\mathrm{TT}}_{xy} \tag{9.28a}$$

これは明らかに式 (9.24) にかなっている．同様に，はじめ y 方向に ε だけ離れていた 2 粒子は次の式に従う．

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^y &= \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}h^{\mathrm{TT}}_{yy} = -\frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}h^{\mathrm{TT}}_{xx} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^x &= \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}h^{\mathrm{TT}}_{xy} \end{aligned} \tag{9.28b}$$

式 (9.21) から $h^{\mathrm{TT}}_{yy} = -h^{\mathrm{TT}}_{xx}$ であることを使った．

空間ののびを測る　　重力波の作用は時に空間ののびとしてとらえられる．式 (9.24) からそれが何を意味しているかが明らかになる．波が通過するにつれ，静止している自由な物体間の固有距離が時間によって変化する．しかし，相対論を学んでいる段階の学生はときどきこのことで混乱をきたすことがある．しばしばでてくる疑問は，空間がのばされるのならば，（電子と原子核をまばらに含んだほぼ何もない空っぽに近い空間からできているはずの）もの差しものばされないことはなく，のびはもの差しでは測定できないのではないだろうか，というものである．この疑問に対する答は式 (9.24) ではなく，測地線偏差の式

(9.26) の中にある．

重力波の作用を表した式 (9.24) と式 (9.26) は，自由粒子については本質的に同じになるが，粒子に他の力も作用している場合の粒子のふるまいをしらべるには二番目の式が有用でありわかりやすい．最初の式は自由落下している粒子の相対運動を記述する厳密な解であるが，他の力が作用する場合の解ではない．二番目の式は解ではなく微分方程式である．その式が表すのは，一つの粒子（粒子 B とよぶことにする）が波によって引き起された加速度を，もう一方の粒子（粒子 A とよぶことにする）の初期の運動状態に一致していた自由落下する局所慣性系で測定したものである．その局所慣性系において，波動は粒子 B を押す力として作用する．この力を重力波に伴う潮汐力という．この力は間隔 $\vec{\xi}$ に依存する．式 (9.25) から，その実効的な力により生み出される加速度は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^i = -R^i{}_{0j0}\xi^j \tag{9.29}$$

であることは明らかである．さて，粒子 B に F_{B} という別の力が作用しているとすると，粒子 B の運動を追うには，すべての力を取り入れたニュートンの運動方程式を解かなくてはならない．解くべき微分方程式は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^i = -R^i{}_{0j0}\xi^j + \frac{1}{m_{\mathrm{B}}}F^i_{\mathrm{B}} \tag{9.30}$$

である．ここで，m_{B} は粒子 B の質量である．さらに，粒子 A に作用する別の力が F_{A} であるとすると，粒子 A は局所慣性系の中で静止していることはない．しかしわれわれはその系において測定をすることができ，二つの粒子の間隔は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^i = -R^i{}_{0j0}\xi^j + \frac{1}{m_{\mathrm{B}}}F^i_{\mathrm{B}} - \frac{1}{m_{\mathrm{A}}}F^i_{\mathrm{A}} \tag{9.31}$$

に従うのである．この式を使うことによってわれわれは重力波の作用する物体系を扱うことができる．この式を連続体に拡張したものを使用すれば，後に示すように，バー型検出器が入射する重力波にどのように応答するかを理解することができる．そしてそれによって，波動がやってきたときにもの差しに何が起きるかという問題に答えることができる．もの差しを構成している原子は自由粒子ではなく，近くの原子から電気的な力を受けているので，もの差しは，重力による潮汐力が内部の結合力と比べてどれほど大きいかによってそののび方

が変化する．ふつう，重力は電気的な力に比べて非常に弱いので，もの差しは実際上はまったくのびることがない．したがってもの差しを使って，接近した自由粒子が潮汐力によって受ける変位を測定できるのである．つまり，「空間ののび」を測定できることになる．

空間ののびを測定する別の方法もある．実際上，最も重要な方法の一つは自由粒子の間に光子を行き来させ，それにかかる時間の変化を測定するものである．これがレーザー干渉計を使った重力波検出器の原理であり，後に詳しく解説する．

重力波の偏り　式 (9.28a) と式 (9.28b) が重力波の偏りを定義する基本となる．図 9.1 (a)のような x–y 面に，最初静止していた粒子からなる円を考える．波が, $h^{\mathrm{TT}}_{xx} \neq 0$, $h^{\mathrm{TT}}_{xy} = 0$ をもっていたとしよう．すると各粒子は (中心の粒子に対する固有距離を書くと) 図 9.1 (b)で示すように, 波が振動し, $h^{\mathrm{TT}}_{xx} = -h^{\mathrm{TT}}_{yy}$ が符号を変えるにつれて動くのである．一方，もし波が $h^{\mathrm{TT}}_{xy} \neq 0$, $h^{\mathrm{TT}}_{xx} = h^{\mathrm{TT}}_{yy} = 0$ であったとすると，図 9.1 (c)のようにゆがめられる．h^{TT}_{xx} と h^{TT}_{xy} は独立だから図 9.1 (b)と(c)は，二つの独立な線形偏りの図による表現を与える．二つの状態は単にお互いに関して，45 度回転したものにすぎないことに注意せよ．これは電磁波の場合の二つの偏光状態がお互いに関して，90 度回転したものであることと対照的である．9.7 節の練習問題 16 で示すように，この偏りのパターンは，重力が 2 階の対称テンソル $h_{\mu\nu}$ で表されることからきている．(一方，電磁場は 8.6 節の練習問題 11 で示したようにベクトルポテンシャル A^μ によって表される.)

平面波の厳密解　地球で検出されることが期待される重力波はすべて非常に弱く，線形理論で十分正確に記述されるべきである．しかし平面波が同様な性質をもった非線形方程式のある厳密解に対応しているかをどうかをみてみるのも興味がある．以下に手短にそのような解を導こう．

波は，z 方向に伝わっているとしよう．式 (9.2) の類推から，

$$u \equiv t - z$$

のみに依存した解が見つけられると期待できるだろう．このことは 3.10 節の練習問題 34 のように，(x を z に置き換えて) u を座標として用いることを示唆

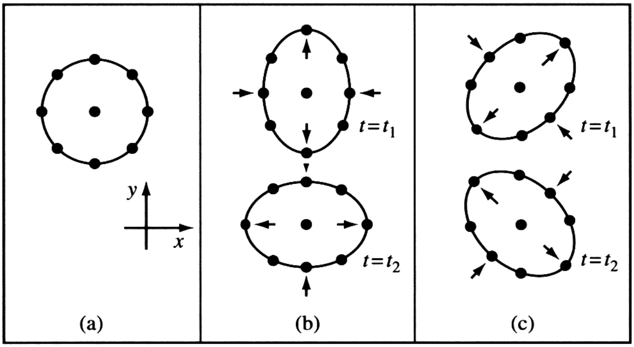


図 9.1　(a) z 方向に進んでいる波がとどく前の自由粒子のつくる円．(b) "+" 偏りをもった波によってつくられた円のひずみ．二つの図は，位相が 180 度違う同じ波を表す．粒子はお互いからの固有距離によって位置づけられている．(c) "×" 偏りに対する (b) と同じ図．

している．平坦な時空では，これに対応してヌル座標

$$v = t + z$$

を定義するのが自然である．すると平坦な時空の線要素は次のように書ける．

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$$

さて，線形波はその伝播方向に垂直，すなわち x–y 座標面の固有距離だけに影響を与えた．そこで，このことを非線形の場合に一般化してみよう．すなわち次のメトリックをもった解を探すのである．

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}u\mathrm{d}v + f^2(u)\mathrm{d}x^2 + g^2(u)\mathrm{d}y^2$$

ここで，f と g はアインシュタイン方程式から決定される関数である．ゼロにならないクリストッフェル記号とリーマン・テンソルを見つけるのは簡単な計算である．

$$\Gamma^x{}_{xu} = \dot{f}/f, \qquad \Gamma^y{}_{yu} = \dot{g}/g$$

$$\Gamma^v{}_{xx} = 2\dot{f}/f, \qquad \Gamma^v{}_{yy} = 2\dot{g}/g$$

$$R^{x}{}_{uxu} = -\ddot{f}/f, \qquad R^{y}{}_{uyu} = -\ddot{g}/g$$

その他の成分は対称性から得られる．ここでドットは，u に関する微分を表す．すると真空での方程式は次の一つだけの式となる．

$$\ddot{f}/f + \ddot{g}/g = 0 \tag{9.32}$$

したがって，$g(u)$ を任意に与えて，この方程式を $f(u)$ に対して解くことができる．これは線形の場合と同じ自由度である．その場合は式 (9.2) に任意の $f(k_z)$ を掛け，k_z について積分すれば，$(z-t)$ の任意の関数のフーリエ表現が与えられる．実際もし，g をほとんど 1 にとれば，

$$g \approx 1 + \varepsilon(u)$$

式 (9.32) は次の解

$$f \approx 1 - \varepsilon(u)$$

をもち，これは式 (9.21) で $h^{\mathrm{TT}}_{xy} = 0$ の偏り，すなわち図 9.1 (b) で示した偏りをもった線形の波である．さらに非線形の場合も，測地線の方程式から，われわれの座標ではじめに静止していた粒子は静止し続けることが容易に導かれる．こうして近似的な線形解に対応する簡単な非線形解が得られる．

この解は平行射線をもつ平面先端波とよばれる種類の一例である．Ehlers と Kundt (1962) の 2.5 節や Stephani ら (2003) の 24.5 節参照．

幾何光学：曲った時空中の波動　この節では，考えている重力波だけが重力源であり，平坦な時空に対する摂動を与えるという仮定をし，式 (8.12) から出発した．その摂動は，特殊相対論における光の速度で運動する波動場としてふるまうことがわかった．しかし現実の宇宙には重力波以外の重力源があり，重力波はわれわれの検出器に到達するまでに，恒星や銀河や宇宙全体による重力場の中を進んでくるのである．そのとき重力波の運動はどのようなものであろうか．

その答は，$\mathbf{g}$ をあらゆる重力源によるメトリックだとしたとき，$g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ という形の，曲った時空に対する摂動を重力波が引き起すものとしてしらべることでわかる．$\mathbf{h}$ を支配する方程式を計算することは，この章のはじめに行っ

てきたやり方とほぼ同様なものであるが，曲った時空での数学を使わなくてはならない．ここでは詳細には触れないが，重要なことは，定性的にいえば，電磁波が複雑な媒質中を運動する場合に非常に似た結果として理解できることである．

波長が短い波はヌル測地線を移動し，偏りのテンソルを平行移動的に伝える．これは電磁波の場合とまったく同じであるので，同じ波源から同じ時刻に放出された光子と重力波は，真空中を伝わる限り，宇宙空間の中をともに伝播し続ける．この幾何光学近似が成り立つためには，波長が次の二つの意味で短くなくてはならない．第一に，波長は曲率の典型的なスケールより短くなくてはならない．その場合，波はなめらかに曲ったバックグラウンド時空の中のさざ波と考えられる．第二に，振動の周期がバックグラウンドの重力場の変動の時間スケールに比べて短いことである．近傍にあるヌル測地線が収束する場合，その測地線に沿って伝播する重力波も電磁波も収束して強度を増す．この現象を重力レンズ効果とよび，第 11 章で具体例を示すことにする．

重力波はつねに電磁波と歩調をあわせて伝播するとは限らない．電磁波はふつうの物質によって強く影響を受け，ヌル測地線が物質中を通過するときには，さらなるレンズ効果や散乱や吸収といった現象が引き起される．重力波の場合は，物質によってはほとんど影響を受けない．物質中を通過するときも，重力波はヌル測地線に沿って伝播する．そうなる理由は，式 (9.24) からわかるように重力波と物質の相互作用が弱いためである．波の振幅 h_{ij}^{TT} が小さければ，重力波が通過することの物質への影響は弱く，物質からの重力波への反作用も同じように小さい．したがって重力波は，宇宙の遠方からの情報をもたらすきわめて重要な運び手なのである．原理的には，重力波を使えば，塵の雲で覆われた超新星爆発の中心部や，ビッグバン直後の 1 秒にも満たない時刻の現象を “みる” ことが可能となる．

9.2 重力波の検出

一般的考察 1960 年代以降の天文学が大きく進歩したのは，テクノロジーの発展によって電磁波のスペクトルのいろいろな領域で観測できるようになっ

たことが主な原因である．1940 年代の天文学者は，可視光だけで観測していたので，クェーサー，パルサー，X 線連星系の中のブラックホール，銀河中心の巨大ブラックホール，ガンマ線バーストそして宇宙全体を満たすマイクロ波背景輻射といったような広範で刺激的な現象について何も気がつかなかった．テクノロジーの発展によって，新しい各波長で予期しない重要な情報がもたらされた．電磁波のスペクトルのほとんどの領域はこれまでにある感度のレベルでは観測がなされているが，もう一つ，まったくふれられていないスペクトルがある．それが重力波スペクトルである．

9.5 節でみるように，ほとんどすべての天体物理的現象が重力波を放出し，その最も激しいもの（もちろんそれが最も興味がある）は，莫大な量の波を放出する．ある情況では，重力波は電磁波では与えてくれない情報をもたらしてくれる．たとえば，重力波は超新星の爆発の中心から直接にわれわれにメッセージをとどけてくれる．同じ領域からの電磁波は爆発を取り巻く高密度の物質によって何回となく散乱され，その領域から抜け出すのに何日もかかり，その過程で爆発について詳しい情報のほとんどを失ってしまう．他の例としては，ビッグバンのときの重力波があり，それは宇宙が始まってから 10^{-25} 秒のときに生れたものである．その重力波はわれわれの宇宙における最も初期の情報を伝えるものであり，地球上の加速器では到達できない超高エネルギー状態での物理学の姿を教えてくれる．

予想できるもの以外にも，重力波スペクトルは，考えることすらできなかった現象への驚くべき手がかりをもたらしてくれるのは確かであろう．天文学者は宇宙における質量エネルギーの 4%だけが電磁波を放出したり受け取ったりできる荷電粒子であり，残りの 96%は電磁波を放射できないが，重力的な相互作用はするので，ある部分から重力波が放出される可能性があることを知っている．したがって，高性能の重力波観測アンテナの開発に多大の努力が注ぎ込まれてきたことは驚くことではないのである．

重力波の観測に関しての技術的な困難はとてつもないものである．それは，さまざまな重力波源から期待されるメトリックの摂動の振幅がきわめて小さい (9.3 節と 9.5 節参照）ことによる．この分野は，技術の発展，科学研究組織による開発費の投入，天体物理分野での新発見といったものの複雑な絡み合いの

中で，急速な進展を遂げてきている．本章も，高性能な検出器での観測が開始され，またもっと性能の高い装置が計画されている 2008 年の時点での情況を解説するものであるが，いまのところ重力波の直接観測はなされていない．最新の情況を知りたい読者は 9.6 節の参考文献をみてほしい．

重力波観測のために建設された検出器には 2 種類のものがある．一つはバー型検出器であり，もう一つは干渉計型検出器である．

- **質量共鳴型検出器：** バー型検出器ともよばれるもので，質量を有する固体が重力波の入射によって振動することを利用する．一番最初につくられた検出器がこのタイプのものであった (Weber，1961)．このタイプの検出器からは学ぶべきことも多いので，下で説明をする．しかし，同じく下で説明する干渉計型の検出器の感度があがっているので，共鳴型のものは主流ではなくなりつつある．

- **レーザー干渉計：** これらの検出器では高度に安定なレーザ光を用いて，他の力の作用しない質量間の固有距離を測定するものである．重力波がやってくると，以前に述べたようにその固有距離が変動する．その原理は，9.7 節の練習問題 9 に述べるような距離のモニター装置で表される．大規模な干渉計 (Hough と Rowan, 2000) がいくつかのグループによって現在稼働させられている．アメリカの LIGO（2 本の 4 km の装置と 2 km の第三番目の装置．ライゴと読む），イタリアの VIRGO（3 km．バーゴ）ドイツの GEO600（600 m．ジオ六百）と日本の TAMA300（300 m．タマ三百）がある．これらの装置では，2 組の重い質量のペアを，外部からの振動を避けた形で保持し，その間隔の変動をモニターしている．このやり方によって，これまでで最高感度の検出器が実現してきていて，最初に重力波を検出するものとなる可能性が高い．非常に高い感度を追求するものとして，飛翔体を利用した LISA（リサ）という計画もある．これらの検出器の詳細は後に述べる．

重力波の別の検出方法も研究されている．

- **飛翔体トラッキング：** この方法は，地球と惑星空間にある飛翔体の間

での通信データを使うもので，重力波を探すのに使用されてきている (Armstrong, 2006). 飛翔体に向かって放射された電波信号が往復する時間の微小な変動を比較することにより，重力波を見つけようとするものである．しかし，時間を測定する原子時計の安定性の問題と太陽風中のプラズマによる時間の遅れの存在のために，この方法で得られる感度はさほど高いものではない．

- **パルサー・タイミング：** 電波天文学者は，パルサーからの信号の到着時間の微小な不規則変動を測定している．パルサーは自転している中性子星で，指向性の強いビーム状の電波を放出している．ビームの存在は，明らかにパルサーが極度に強い磁場をもっていて，その軸が自転軸とはそろっていないために生じる．磁極が地球の方向を向くたびに，ビーム状の放射が電波の「パルス」として観測される．次章でみるように，中性子星は，毎秒数百回というようなきわめて高速の自転が可能である．パルスは自転と結びついているので，多くのパルサーは，実質的には人間のつくる時計よりも精度の高い時計であって［Cordes ら (2004)］，重力波の検出に利用できる．パルサー・タイミング測定専用の電波望遠鏡アレイによって，現在，重力波が電波望遠鏡のアレイを通過するさいに引き起すパルス到着時刻の関連性をもった不規則事象を見つけだすことにより，重力波を探索している．現在計画されている平方キロメートル・アレイ (SKA) の電波望遠鏡の装置が建設（おそらく 2020 年頃）されれば，電波天文学者は数千個のパルサーのモニターを行い重力波の信号を掘り起すための強力な装置をもつことになる．地上にある干渉計で重力波を観測するよりも前に，パルサー・タイミング・アレイで重力波を捕まえる可能性も高い．

- **宇宙マイクロ波背景放射の温度揺らぎ：** 宇宙論学者は空の宇宙マイクロ波背景放射の温度揺らぎ（第 12 章参照）をしらべることで，ビッグバンのときの重力波の信号を見つけようとしている．その効果は測定するのが難しいが，2009 年に打ち上げられたプランク衛星の観測する精度の範囲内にあるかもしれない．

干渉計，飛翔体トラッキング，パルサー・タイミングのすべてに共通しているのは，重力波の影響を探すために電磁波をモニターすることである．これらの例はすべてビーム検出器に分類されるものである．

これらの異なった観測法は，重力波の異なるスペクトル領域を観測するのにそれぞれが適していることを知っておくことは重要である．電磁波のスペクトルの場合と同じように，異なる振動数の重力波は異なる情報を担っているのである．地上の検出器（バー型と干渉計型）は通常 10 Hz から数 kHz（プロトタイプの検出器では MHz の周波数用につくられたが）の範囲を，宇宙空間に打ち上げられる干渉計では mHz の振動数領域を観測することになっている．パルサー・タイミングでは nHz 領域のみが対象である．それはパルスの到着時刻の短時間変動の平均をしなければならないためである．宇宙マイクロ波背景放射は，宇宙年齢が数十万年（第 12 章参照）であったころのきわめて長波長の重力波によって影響を受けているはずなので，現在の時点で観測できる重力波の振動数は，10^{-16} Hz のオーダーのものとなる．

共鳴型検出器　共鳴型検出器は重力波と連続体の相互作用をしらべるのにふさわしいものである．それらが原理的にどのように動くのかを理解するために，図 9.2 に示したような理想化した検出装置を考えよう．おのおのの質量が m の二つの粒子が，ばね定数 k，減衰定数 ν，のびのないときの長さ l_0 の質量をもたないばねでつながれている．このばねはわれわれの TT 座標系の x 軸に沿っていて，二つの質量の座標を x_1，x_2 とする．平坦な時空では，質量は次式に従って運動する．

$$mx_{1,0,0} = -k(x_1 - x_2 + l_0) - \nu(x_1 - x_2)_{,0} \tag{9.33}$$

$$mx_{2,0,0} = -k(x_2 - x_1 + l_0) - \nu(x_2 - x_1)_{,0} \tag{9.34}$$

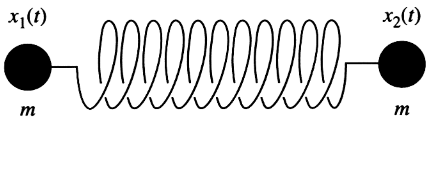


図 9.2　ばねでつながれた二つの同じ質量を使った重力波の検出装置

ここでのび ξ，共鳴振動数 ω_0 と減衰率 γ を

$$\xi = x_2 - x_1 - l_0, \qquad \omega_0^2 = 2k/m, \qquad \gamma = \nu/m \tag{9.35}$$

で定義すると式 (9.33) と式 (9.34) は次のように書ける．

$$\xi_{,0,0} + 2\gamma\xi_{,0} + \omega_0^2\xi = 0 \tag{9.36}$$

これは通常の減衰振動子の方程式である．

重力波が通過したときの情況はどうなるだろう？　これを次の三つのステップで考えていこう．

(1) **自由**粒子は TT 座標で静止したままである．これはたとえば，x_1 で波がくる前に静止していた局所慣性系は，波がぶつかった後もそこで静止したままでいることを意味する．その座標を $\{x^{\alpha'}\}$ としよう．この系の唯一の運動は波によって引き起されたものとする．すなわち $\xi = O(l_0|h_{\mu\nu}|) \ll l_0$ とする．このとき質量の得る速度も小さく，それに対してニュートンの方程式が局所慣性系で適用される．

$$mx^{j'}_{,0'0'} = F^{j'} \tag{9.37}$$

ここで $\{F^{j'}\}$ は，その質量に対する重力以外の力の成分である．$\{x^{\alpha'}\}$ はわれわれの TT 座標 $\{x^\alpha\}$ とオーダー $h_{\mu\nu}$ の項だけしか違わず，また x_1，$x_{1,0}$，$x_{1,00}$ はすべてオーダー $h_{\mu\nu}$ だから，式 (9.37) で TT 座標を用いても，その誤差は無視できる．

$$mx^j_{,0,0} = F^j + O(|h_{\mu\nu}|^2) \tag{9.38}$$

(2) おのおのの質量に対する重力以外の唯一の力は，ばねによるものである．すべての運動はゆっくりしているから，ばねの及ぼす力はメトリックを使って測った瞬間的なその**固有**ののびに比例する．ばねの固有長さを l とし，重力波が z 方向に進むとすると

$$\begin{aligned} l(t) &= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} [1 + h^{\mathrm{TT}}_{xx}(t)]^{1/2}\mathrm{d}x \\ &= [x_2(t) - x_1(t_1)]\left[1 + \frac{1}{2}h^{\mathrm{TT}}_{xx}(t)\right] + O(|h_{\mu\nu}|^2) \end{aligned} \tag{9.39}$$

したがって式 (9.38) は次のようになる.

$$mx_{1,0,0} = -k(l_0 - l) - \nu(l_0 - l)_{,0} \tag{9.40}$$

$$mx_{2,0,0} = -k(l - l_0) - \nu(l - l_0)_{,0} \tag{9.41}$$

(3) 物理的なのび ξ を

$$\xi = l - l_0 \tag{9.42}$$

と定義しよう. これに式 (3.39) を代入すると

$$\xi = x_2 - x_1 - l_0 + \frac{1}{2}h^{\mathrm{TT}}_{xx}(x_2 - x_1) + O(|h_{\mu\nu}|^2) \tag{9.43}$$

となる.

量 $(x^2 - x^1)$ に h^{TT}_{xx} が掛かったものは, ここで考えている精度の範囲内で l_0 で置き換えても式を変えるものではないので, これは次のように解ける.

$$x_2 - x_1 = l_0 + \xi - \frac{1}{2}h^{\mathrm{TT}}_{xx} l_0 + O(|h_{\mu\nu}|^2) \tag{9.44}$$

式 (9.41) と式 (9.40) の差に, これを使うと h^{TT}_{xx} の 1 次までで正しい次式が得られる.

◆
$$\xi_{,0,0} + 2\gamma\xi_{,0} + \omega_0^2\xi = \frac{1}{2}l_0 h^{\mathrm{TT}}_{xx,00} \tag{9.45}$$

これが, 重力波に対する検出装置の反応を支配する基本的な式であり, 強制減衰調和振動子の簡単な形となる. 外力の項は, 式 (9.28a) からわかるように, 重力波によって生みだされた潮汐加速度である. そこでの計算は式 (9.24) の固有距離の計算から始めたものである. このことからも, 二つの異なるやり方が, 重力波の物質に対する作用を矛盾することなく与えることがわかる. この結果を測地線偏差の方程式を使って導く別の方法は 9.7 節の練習問題 21 にある. 別の方向から入射する重力波の場合への一般化は 9.7 節の練習問題 22 で扱われている.

この種の検出器は, 固定した周波数の重力波を出す源 (たとえばパルサーや近接連星系) に対する共鳴型検出器として用いることが考えられる. [バースト (広がったスペクトルをもつ輻射の短い波束) を検出するのにも用いることができるが, ここでは議論しない.] 入射する波の形が

$$h_{xx}^{\mathrm{TT}} = A\cos\Omega t \tag{9.46}$$

としよう．すると，ξ に対する式 (9.45) の定常解は

$$\xi = R\cos(\Omega t + \phi) \tag{9.47}$$

ここで

$$R = \frac{1}{2}l_0\Omega^2 A/[(\omega_0 - \Omega)^2 + 4\Omega^2\gamma^2]^{1/2} \tag{9.48}$$

$$\tan\phi = 2\gamma\Omega/(\omega_0^2 - \Omega^2) \tag{9.49}$$

（もちろん ξ に対する一般の解は，$1/\gamma$ の時間スケールで減衰する遷移解を含む）．検出器の振動のエネルギーは，h_{xx}^{TT} の最低のオーダーで

$$E = \frac{1}{2}m(x_{1,0})^2 + \frac{1}{2}m(x_{2,0})^2 + \frac{1}{2}k\xi^2 \tag{9.50}$$

波がとどく前に静止していた検出器に対して，$x_{1,0} = -x_{2,0} = -\xi_{,0}/2$（9.7 節の練習問題 23 参照）だから

$$E = \frac{1}{4}m[(\xi_{,0})^2 + \omega_0^2\xi^2] \tag{9.51}$$

$$= \frac{1}{4}mR^2[\Omega^2\sin^2(\Omega t + \phi) + \omega_0^2\cos^2(\Omega t + \phi)] \tag{9.52}$$

この平均値は 1 周期 $2\pi/\Omega$ にわたる平均だから

$$\langle E\rangle = \frac{1}{8}mR^2(\omega_0^2 + \Omega^2) \tag{9.53}$$

時間平均を表すのにつねに山形括弧 $\langle\ \ \rangle$ を用いることにする．

振動数 Ω が知られている特定の源を検出しようとするときには，式 (9.48) から明らかなように最大の反応（共鳴）を得るため，ω_0 を Ω に一致させる．この場合，反応の振幅は

$$R_{\mathrm{resonant}} = \frac{1}{4}l_0 A(\Omega/\gamma) \tag{9.54}$$

となり，振動のエネルギーは

$$E_{\mathrm{resonant}} = \frac{1}{64}ml_0^2\Omega^2 A^2(\Omega/\gamma)^2 \tag{9.55}$$

比 Ω/γ は，ふつう振動子の質因子（quality factor）Q とよばれるものに関係している．ここで $1/Q$ は，振動の 1 ラジアンに（摩擦によって）失われる振動子のエネルギーの割合として定義される（9.7 節の練習問題 25 参照）．

$$Q = \omega_0/2\gamma \tag{9.56}$$

共鳴している場合

$$R_{\text{resonant}} = \frac{1}{16} m l_0^2 \Omega^2 A^2 Q^2 \tag{9.57}$$

実験室での数値としてどんな値が現実的だろうか？　そのような検出器のほとんどは，大きな質量をもった円筒の棒で，“ばね” にあたるのは棒がその軸に沿って引きのばされたときの弾性である．波が棒の側面に当たると，棒の縦振動を励起する．1960 年代にメリーランド大学の J. Weber によってつくられた最初の検出器は，質量 1.4×10^3 kg，長さ $l_0 = 1.5$ m，共鳴振動数 $\omega_0 = 10^4\ \text{s}^{-1}$，$Q$ が約 10^5 のアルミニウムの棒であった．この場合，$A = 10^{-20}$（9.3 節参照）の強い共鳴重力波が，10^{-20} J のオーダーのエネルギーを棒に励起する．そのとき式 (9.54) で与えられる共鳴振幅はたったの 10^{-15} m，だいたい原子核の直径にすぎない．現実の重力波の多くは，これより何桁も小さいオーダーの振幅しかもたず，棒に十分な共鳴振幅をもたらすにははるかに短い時間しか続かないだろう．

現在観測に使用されているバー型検出器　そのような小さな効果を測定しようとするとき，情況を改善するのには二つのやり方がある．一つは，その効果の大きさを増幅させることであり，もう一つは測定の邪魔になる無関係な雑音を減らすことである．そしてその後で最善の測定をどのように行うべきかを決めなくてはならない．効果の大きさは，波動の振幅とバーの長さ，そして使用する材料の Q 値で変る．われわれは振幅を制御できないし，残念なことに，装置の長さものばすことは難しい．現実に使用されるバーは 3 m 程度のもので，それより長いバーになると，無関係な雑音の影響を遮断することが，ますます困難になるためである．Q 値を大きくするには，バーとして単結晶を用いたものもあるが，それ以上によい Q 値を得ることは難しい．アンテナのデザインを工夫して，どの方向からの波動に対しても効率よく反応する球形の検出器にするといったことをすると，信号を強めることができる．しかし，バーの感度を

上げることが難しいために，バー型検出器は現時点で検出器として使用されないのである．

検出器のもう一つの課題は無関係な雑音を減少させることである．たとえば，どんな振動子にも，平均的なエネルギー kT をもつランダムな振動を引き起す熱雑音がある．ここで，T は絶対温度で，k はボルツマン定数

$$k = 1.38 \times 10^{-23}\mathrm{J \cdot K^{-1}}$$

である．われわれの考えている情況で T が実験室温度程度（$\sim$300 K）になると，熱雑音は重力波による励起エネルギーと同じ程度になる．しかし，これまでの波の振幅の推定値はかなり大きめなものであった．振幅が 10 分の 1 の波を十分な信頼度をもって検出するためには，温度を 100 分の 1 にする必要がある．そのために，バー型検出器は，1980 年代に，室温程度での測定から 3 K 程度の低温で稼働させられるようになり始めた．現在最も低温にされて感度の高いバー型検出器は，Auriga バー型検出器で，100 mK 以下になっている．

近くを走る乗物の振動や地震などの雑音源は熱雑音よりもかなり大きいことがある．したがって，バー型検出器は十分に孤立した状態にしておかなければならない．そのためバーを支持台からつり下げ，たとえば 1 Hz 程度の低い共鳴振動数の振子の状態にしておく．地面からの振動は振子をつり下げている上部を動かすが，この振動の中で，振子の振動数より高い振動に関しては，バーに伝わってこない．振子は機械的なローパス・フィルターだからである．実際，振子を何層かに重ねて使用することもでき，つり下げる枠組も，さらに振動吸収台を使用することで振動から切り離されている．

共鳴型検出器では，そのような小さな変動をどのようにして捉えるのだろうか．その測定器具はトランスデューサーとよばれる．Weber のもともとのアルミニウム・バー・アンテナでは，アンテナの真中あたりの金属ののびが最大になる場所に，張力検知器が取りつけられていた．別の観測グループは，バーの振動エネルギーを，重力波と同じ振動数で共鳴する微小質量のトランスデューサーに取り込んだ．取り込まれたエネルギーが適切であれば，トランスデューサーの振動の振幅が増幅される．感度の最も高い読みだし方法は，SQUID とよばれる極低雑音低温度超伝導装置を使用するものである．

ここまでの議論は，検出器内部に運動がない場合に，連続波を共鳴型検出器で受信することに限ってきた．振動数の広い範囲のバースト的な波がやってきたとすると，励起される振幅は広い振動数領域の雑音レベル以下である可能性があり，検出器の感度の解析を注意深く行う必要がある．しかし，一般的なやり方は変るものではない．広い振動数領域にわたる信号を測定するときのバー型での困難は，共鳴振動数（通常 600 Hz よりも高い）からかなり離れた波の振動数成分を測定するのは実際問題として（原理的には不可能ではないが）難しいことに起因する．たいていの強い重力波源は低い振動数の重力波を放出するので，そのことは深刻な問題なのである．第二の問題は，バーストに対しての振幅での 10^{-21} 程度の感度（干渉計で 2005 年に達成されている）に達するためには，バー型検出器ではいわゆる量子限界を越えなければならない．微小な励起状態では，波によってバーの振動に転換されるエネルギーは，検出に使用される共鳴モードの励起に対応する量子 1 個（フォノン 1 個）よりも小さい．量子限界以下の測定をどのように行うか，——バーのようなマクロな物体の中でハイゼンベルクの不確定原理をどう扱うか——は興味深い問題である．しかし，実際のところは解決策は見いだされていない．したがって，それがバー型検出器の直面するもう一つの深刻な問題なのである．これらの課題についての詳細は，Misner ら (1973)，Smarr (1979)，あるいは Blair (1991) を参照．

バー型検出器に関する厳しい技術的問題は，基本的には，大きさが小さいことに起因する．金属物体の共鳴を利用する検出器では数メートル以上の大きさにできず，それが重力波の潮汐力によるのびの大きさを制限してしまうのである．レーザー干渉計型検出器では km スケール（宇宙空間では数百万 km スケール）の装置がつくられている．したがって，干渉計型ではもっと大きな応答が生じ，量子限界や振動や熱雑音による悪影響が及ぶ前に，より高感度を達成できる．バー型検出器に特有な困難のために，干渉計型検出器が徐々に改良され，バー型検出器の感度を上回るようになった 2000 年以降，バー型検出器関連の研究予算は減少し続けてきている．2010 年以後は，バー型検出器は稼働を続けることはできそうにない．

光を使って距離を測る　遠方の物体までの距離を測定するのに便利なのはレーダーを使う方法である．電磁波のパルスを送りだし，遠方の物体で反射さ

れて戻ってくるまでの時間を測定し，2 で割り光速 c を掛けると距離が求まる．光は相対論の中で特別の役割を果すので，この距離の測定法は，曲った時空の中でも固有距離を測定する方法として優れたものでもある．そして，それがレーザー干渉計型重力波検出器の基本になる．

二つの自由落下している物体の間の距離を光を使ってどのように測定するのかを計算してみよう．物体は自由落下しており，その二つの物体が近くにあることは仮定しないので，TT 座標系を使用することにする．簡単化のために，+ の偏りだけをもった重力波が z 軸方向に伝播しており，メトリックが

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + [1 + h_+(t-z)]\mathrm{d}x^2 + [1 - h_+(t-z)]\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \qquad (9.58)$$

で表されるとする．さらに簡単化のために，二つの物体は x 軸上の $x = 0$ と $x = L$ の位置にあるとする．TT 座標系では，二つの物体はつねに同じ座標位置にある．距離を測定するために，原点にある物体から x 軸に沿って光子をもう一方の物体へ送りだし，もう一方の物体が反射する．第一の物体は光子を放出してから経過した固有時間を測定する．物体間の距離と重力波のメトリックとは，この固有時間とどのように関係しているのだろうか．

x 軸に沿って運動する光子は，$\mathrm{d}y = \mathrm{d}z = 0$ というヌルの世界線を ($\mathrm{d}s^2 = 0$) 動く．そのことは光子が実効的には

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{1+h_+} \qquad (9.59)$$

という速さをもつことに帰結する．これは 1 に等しくはないが，座標速度であり，相対論に矛盾するものではない．時刻 t_{start} に原点から放出された光子は時刻 $t(x)$ のときに座標 x の位置に到着する．このことがいま扱おうとしている問題である．光子が，$x = L$ の座標位置に到着するのは，式 (9.59) の実効的な光速を使って積分すると，

$$t_{\mathrm{far}} = t_{\mathrm{start}} + \int_0^L [1 + h_+(t(x))]^{1/2}\mathrm{d}x \qquad (9.60)$$

という時刻である．知りたい値 $t(x)$ が積分中にも現れるので，この式は $t(x)$ に関する方程式である．しかし線形理論では，h_+ が小さいという近似を使うことで解を求めることができる．h_+ の引数にある $t(x)$ には平坦な時空での値を使

用することができる．それは h_+ による補正は式 (9.60) では h_+ の 2 次のオーダーだからである．したがって，積分の中では，$t(x) = t_{\mathrm{start}} + x$ とおき，平方根を展開する．その結果

$$t_{\mathrm{far}} = t_{\mathrm{start}} + L + \frac{1}{2}\int_0^L h_+(t_{\mathrm{start}} + x)\mathrm{d}x$$

という積分で表される．光は反射されて戻るので，同じように考えると，光が往復する時間は

$$t_{\mathrm{return}} = t_{\mathrm{start}} + 2L + \frac{1}{2}\int_0^L h_+(t_{\mathrm{start}} + x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^L h_+(t_{\mathrm{start}} + L + x)\mathrm{d}x \tag{9.61}$$

で表される．TT 座標での時間は固有時間なので，この式が測定される時間を表している．

この式の意味はどういうものであろうか．第一に，L が重力波の波長に比べてかなり短い場合，言い換えると，往復時間が重力波の周期より小さい場合，h_+ は光子の運動する時間の間は実質的には定数であると考えられる．すると，往復時間はこのメトリックを使って測定される固有距離 L に比例する．これは驚くようなことではない．短い間隔に対して，われわれは，粒子とともに自由落下する局所慣性系をつくり上げることができるからであり，その座標系では，あらゆる実験は特殊相対論と同じでなくてはならないからである．特殊相対論では，レーダーによる距離測定は，正確な固有距離を与えるので，今の場合も同様なのである．

もっと一般的には，重力波のメトリックを測定するために，この方程式はどのように利用されるのだろうか．一番単純な使い方は，t_{return} を t_{start} で微分することである．重力波が通過するさいに，往復して戻ってくる時刻の変化の割合をモニターするのである．t_{start} が式 (9.61) の積分の中に現れるのは h_+ の引数の $t_{\mathrm{start}} + x$ のところだけなので，積分のところを微分するのは，h_+ をその引数で微分することになる．そして x で積分することは，h_+ の微分をその引数で積分することである．そうすると，h_+ にもどることになる．その結果非常に単純な式

$$\frac{\mathrm{d}t_{\mathrm{return}}}{\mathrm{d}t_{\mathrm{start}}} = 1 + \frac{1}{2}[h_+(t_{\mathrm{start}} + 2L) - h_+(t_{\mathrm{start}})] \tag{9.62}$$

が得られる．これはかなり目ざましい結果である．往復時間の変化の割合が光子が放出された時刻と原点にもどってきた時刻における重力波のメトリックだけに依存しているからである．特に，光子が遠方の物体で反射されたときの重力波の振幅は関係していない．

さて，原点から放出された信号が1個の光子ではなく，ある振動数の連続した電磁波であるとすると，電磁波の "山" を，それぞれが別々のヌル放射あるいは別々の光子が放出され反射されてもどってくるものと考えることができる．これらの放射が往復する時間の微分は電磁波の振動数の変化にほかならず，

$$\frac{\mathrm{d}t_{\mathrm{return}}}{\mathrm{d}t_{\mathrm{start}}} = \frac{\nu_{\mathrm{return}}}{\nu_{\mathrm{start}}}$$

で表される．したがって，われわれが往復する電磁波の赤方偏移を測定すれば，その値を直接重力波の振幅に結びつけることができる．

これまで考えてきたのは，物体と重力波の特別な配置の場合であった．重力波が物体の並びと垂直な方向から伝播してきていた．もし重力波が x–z 平面内で z 軸と角度 θ の方向に伝播しているとすると，往復時間の微分は次のように反射される時点での振幅を含んだ式になる．

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t_{\mathrm{return}}}{\mathrm{d}t_{\mathrm{start}}} = 1 + \frac{1}{2}\{&(1-\sin\theta)h_+(t_{\mathrm{start}}+2L) \\ &-(1+\sin\theta)h_+(t_{\mathrm{start}}) + 2\sin\theta\, h_+[t_{\mathrm{start}}+(1-\sin\theta)L]\}\end{aligned} \tag{9.63}$$

この三つの項を含んだ式は，次に説明するビーム検出器の応答を解析するための第一歩となる．この式の導出は，9.7節の練習問題27を参照のこと．

ビーム検出器　一番単純なビーム検出器は，飛翔体トラッキングである (Armstrong，2006)．惑星間空間を運動する飛翔体は，地上のトラッキング局から受け取った信号を増幅し送り返す電波受信機であるトランスポンダーを搭載している．信号の往復時間の測定から，トラッキング局は，飛翔体がどれだけ離れたところにあるのかがわかる．その測定の精度が高ければ，往復時間の小さな変化は重力波によってもたらされたものなのかもしれない．実際問題としては，この方法は実現するのが難しいものである．測定される変動が，信号が通過せざるをえない惑星間空間の薄いプラズマやイオノスフェアによる屈折

率の変化によるものかもしれないからである．これらの影響は式 (9.63) の 3 項関係式を使って重力波と区別することができる．観測される波形は，データの中の 3 か所に一つは符号が逆のものとして現れなくてはならないのである．ランダムな変動の場合にはそうしたことが起ることはほとんど考えられないからである．

プラズマによる変動は，複数のトランスポンド振動数（測定できるようにしておくとして）を使用したり，赤外レーザー光であっても，プラズマからはほとんど影響を受けない高周波領域のトランスポンドを使用することにより抑えることができる．しかし，そのようにしたときでも，測定の精度には別の要素が影響してくる．往復時間 t_{return} を測定するトラッキング局の時計の安定性の問題である．現在のところ，最も優れた時計でも 10^{-19} レベルまでの安定性しかない．そのことは，この種のビーム検出器では，10^{-20} 以下の振幅しかない重力波を測定できるものではないことを意味する．残念なことに，下で示すように，ほとんどすべての振幅が，そうした小さな値の範囲にあると考えられるのである．

それを乗り越えるには干渉計を使うことである．干渉計では，安定なレーザ光は，光の半分を 1 本の腕の方向へ導き，残りの半分の光を，それと垂直な方向の腕に導くように分割するビーム・スプリッターを通過する．二つに分れた光線の位相は相関性をもっている．腕の端にある鏡で反射された光がもどってくると，それらの光は干渉しあう状態にもどされる（図 9.3 参照）．その干渉は，二つの腕の長さの差を反映する．腕の長さの差が，たとえば重力波が通過することによって，変動すると，干渉パターンが変化し，原理的には重力波を観測できる．

さて，干渉計は，互いに直交するように配置された二つのビーム検出器だと見なされるのがふつうである．二つのビームの位相は相関関係をもっている．光のなかのある “山” は，二つの腕の中を同時に伝播し始める．腕の固有長さが等しければ，そのビームは同じ位相で戻ってきて，干渉して強めあう．腕の長さが，たとえば半波長分違うと，異なった位相の波として戻ってきて，干渉して弱めあう．干渉計を使うことで，ビーム検出器では安定性のある時計が必要であるという問題点が解消される．ここでの “時計” は腕の 1 本がその役割を

している．1 本の腕の中での光の運動が，本質的には，もう 1 本の腕の中の光の往復時間に対する基準を与えるのである．レーザーや鏡やその他の装置に関する技術によって，1 本の腕を基準として，もう一方の腕の中で光が往復する時間の変化を測定することにより，最高の精度をもつ原子時計よりも高い安定性をもって測定を行うことができるのである．

干渉計は重力波を記録するのに非常に適した装置である．その仕組を知るために，重力波の偏りの図 9.1 をみてみよう．干渉計を図の(a)の円の中に置いてみよう．ビームスプリッターが中心に，腕の両端が円と x 軸，y 軸とが交差する位置にくるようにする．+ の偏りをもった重力波が到着すると，図(b)のように一方の腕の方向がのび，同時に，もう一方が収縮する．それによって，干渉パターンから測定される腕の長さの違いが 2 倍になる．重力波がたとえば x 軸方向からくるとしても，その横方向の作用は y 軸方向に押しちぢめたりのばしたりというものであり，最大の場合の半分の大きさの信号をもたらす．しかし，図(c)のような × の偏りをもつ重力波の場合は，両方の軸に 45 度の角度で到達するので，干渉計の腕の長さを変えることはなく，観測にかからない．したがって，干渉計はほとんどすべての方向からくる信号に反応できる直線偏波の検出器なのである．

干渉計では二つの光のビームをいっしょにすることで干渉させるため，標準の波長を基準にして腕の長さの変化を測定しているのではないかとか，学生によっては，光の波長が重力波によって影響を受け，測定が不可能になるのではないか，といった誤解を招きやすい．ここでのビーム検出器の説明ではっきりさせたいのは，光の波長が意味をもつのではないことである．干渉計は基本的には二つの往復時間を比べるものであり，光が腕の中をヌル世界線に沿って行き来する限り，その光路における光の波長はまったく問題にならないのである[1]．

干渉計による観測　干渉計は現在 (2008) 最も感度の高い検出器であり，観測に使用されている．そして干渉計によって重力波をはじめて直接観測できるのではないかと考えられている．干渉計はバー型検出器に比べて二つの点で優れている．干渉計の場合，物質や物理学の基本的な問題に影響されることなく，

1) 実際，どんな場合でも光の波長と振動数は観測者に依存するので，系に依存しない形での質問は意味をもたない．そのことが，干渉計でどのようにして重力波を測定するかの説明で光の波長と振動数をもちださなかったもう一つの理由である．

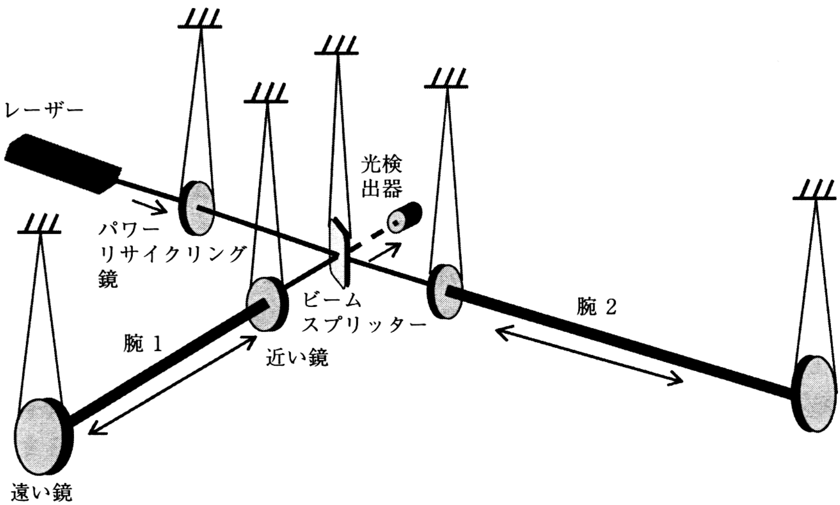


図 9.3 LIGO や VIRGO のような干渉計の構造の概略．レーザーからの光はパワーリサイクリング鏡を通過して，光が二つの腕方向に分けられるビームスプリッターへと進む．腕は空洞からなり，光の大部分を閉じ込めている．それはビームスプリッターに近いところの鏡が，光をほぼ完全に反射するためである．このパワーの増強のシステムを使用することで感度が増大する．空洞を出た光はビームスプリッターにもどってくる．干渉によって弱まるように設定された（干渉の結果が振幅の差の形になる）ビームが，光検出器の方向にやってくる．その場合，重力波が存在しないときには暗くなる．ビームスプリッターからもどってくるもう一方の光は，干渉して強めあうように設定されていてレーザーの方向へもどっていく．ほとんどすべての光がここへやってくることになり，それを減らさないように，パワーリサイクリング鏡により，新たに入射してくるレーザー光と位相がそろった状態にして，干渉計へともどす．ビームスプリッターを含めてすべての鏡は機械的な振動雑音を除去するために，つり下げられている．モードクリーナーや信号リサイクリング鏡などの光学デザインにおける改善部分は，この図には示していない．図の中の大きさは実物に比例して描かれてはいない．腕は 3 km から 4 km あり，中央部（近接鏡，ビームスプリッター，レーザー，光検出器）は一つの建物の内部に設置されている．

感度を上げることができる．そして（それは共鳴振動に依存しないので）広い振動数スペクトルの範囲で運転できるのである．

重力波の干渉計型検出器をデザインするさい，科学者が直面した問題はバー

型検出器の場合とまったく同じであった．信号の大きさを増幅し，それ以外の雑音を減少させることである．バー型の場合と異なって，干渉計では干渉装置の長さをのばすことで信号を増大させるという自然なやり方がある．腕が長くなればなるほど，重力波の振幅に対する往復時間の差がますます大きくなる．地上にある最大の干渉計は，アメリカにある 4 km の LIGO 検出器であり，イタリアにある 3 km の VIRGO 検出器がそれに次ぐ．しかし物理的な長さはそれで終るものではない．腕の中の光のビームは，腕の中でくり返し往復させられ，共鳴した光は空洞に閉じ込められることになり，それぞれの腕の中に光が滞在する時間は長くなる．それによって，重力波がやってきたとき，往復時間の差を増大させることができる．LIGO や VIRGO の光学的デザインの単純化した概略を図 9.3 に示した．

しかし，十分に長い腕にしたとしても，信号には，装置に起因するさまざまな雑音が入り込む［Saulson (1994)，Hough と Rowan (2000)］．地面振動を除くために，干渉計でもバー型の場合と同じ対策を採用し，光学装置はつり下げる形をとっている．しかも，2 層にしたり 3 層にしたつり下げ機構がふつうであるが，VIRGO では 7 層の振子を使用し，それぞれが 1 層上の振子につり下げられている．それによって装置が低周波数の振動を観測できるようになる．低周波数では，地震による雑音が強いためである．鏡やその他のつり下げ装置からの熱雑音は，バー型の場合と同様に，深刻な問題ではあるが，干渉計では，レーザービームから鏡へ熱が加わることを避けられないため，4 K といった低温にして装置を動かすという手段はとれない．現在 (2008) 干渉計はすべて室温で稼働しているが，日本では 40 K にして稼働させるという先駆的な計画がある (この計画は LCGT として知られている)．熱雑音については，鏡やつり下げるワイヤーにきわめて高い Q 値をもった物質を使用することで制御しようとしている．そうすることによって，熱雑音を鏡の振動や振子の振動モードの共鳴振動数付近の狭い領域に制限することにして，装置の測定領域の外に移動させようという工夫がなされている．つり下げワイヤーにオプティカルファイバーを使い，糊を使用しないで鏡につなぐといったことを含めた手段が，GEO600 検出器では採用されてきている．干渉計がより改善されていくと，量子雑音や鏡の位置でのハイゼンベルクの不確定性原理に直面しなければならなくなるであ

ろう．しかし，量子限界の問題でも，バー型の場合よりも，解決手段を見つけだしやすい．

雑音として厄介なのは物理学者がショットノイズとよんでいるものである．それは，二つのビームが干渉する場合における強度のランダムな変動であり，ビームが古典的で連続的な電磁波ではなく離散的な光子から構成されていることにより生じる．ショットノイズは約 200 Hz 以上の振動数領域での干渉計の感度を制限する最大の原因となる．腕の空洞に保持する光の量を増やすことで，その雑音を減らし，感度を上げることができる．光子が増えるとパワーの揺らぎが減少するからである．

異なる雑音源すべてを考慮すると，地上にある検出器の観測可能振動数領域が決まる．現在の干渉計に対しては，約 40 Hz～1 kHz の領域である．低い振動数では，つり下げ機構によって鏡を地面振動から切り離すことが難しいことが限界を決め，中間の振動数領域では，つり下げ部と鏡の熱雑音が限界を決める．高周波数領域では，ショットノイズにより感度が決る．

重力波観測は，感度の高い検出器を建設し稼働させるだけですむものではない．観測には適切なデータ解析も必要である．というのも，予想される信号は広い領域で雑音以下のレベルであるため，データをコンピューター処理して雑音を取り除かなくてはならないからである．検出器は複雑な構造をしているので，検出器内部のランダムな変動のために重力波の信号が影響を受ける可能性があり，実際問題としては，2 台以上の検出器で同時に観測することによって本当の信号であることを確認しなくてはならない．そして，異なる検出器の間の（ミリ秒スケールの）微小な時間差によって，天球上での重力波源の位置に関する情報が得られる．

2005 年の半ばから 2007 年の年末にかけて，LIGO 検出器は広い周波数領域でのバースト的な重力波の（他の 3 か所の検出器との）同時観測を 1 年以上にわたって 10^{-21} よりもよい感度で観測した．天文学者が可能な重力波源として考えるものからすると，この強度の信号は 1 年に 1 回か 2 回やってくる可能性がある．一方で，そうした信号は 100 年に一度くらいでしかやってこないという可能性もあった．GEO600 はこの時期の半分くらいの期間に同時観測を行った．VIRGO は 2007 年初頭に同程度の感度をもって観測を開始した．LIGO と

GEO600 はデータを蓄積し，LIGO 科学共同研究 (LSC) とよばれる組織でデータの解析を行う．VIRGO もデータを共有し，そのデータは LSC のデータとともに解析される．さらに大型検出器が稼働し始めるとき（前述したとおり，日本には改良計画があり，オーストラリアにもある）には，それらもこの共同研究に参加するであろう．新たな検出器は，既存の検出器の感度を上回るものである．

既存の検出器では，21 世紀の最初の 10 年が終るまでに，感度を上げる計画がある．LIGO と VIRGO では感度が 10^{-22} よりもよくなり，低周波数の限界を 10 Hz にまで下げることになると考えられている．アドバンスト LIGO とアドバンスト VIRGO とよばれる，それらの大がかりな性能改善は，多くの新しい機器といっそう強力なレーザーを使用することでなされる．後で説明するように，その時点で重力波の観測ができるようになると思われている．しかし，いうまでもなく，装置改善の途中のどの時点でも，重力波が観測されることは，ありうるのである．

地上の検出器計画よりもいっそう大がかりなのは，ヨーロッパ宇宙機関 (ESA) とアメリカの NASA が共同で行っていて，2018 年頃に打ち上げられる予定の LISA 計画である．1 Hz 以下の振動数の重力波を観測しようとするとき，宇宙空間へ進出することが必要となる．そのような低周波数では，地球のニュートン重力場は雑音ばかりなのである．重力の変動はどのようなものであれ検出器で検出され，地震波や気象現象における密度の変動がもたらす微小な重力の変動は重力波の予想される振幅よりも大きい．したがって，低周波数での観測は地球から離れたところで行う必要があるのである．

LISA は正三角形の頂点に配置された 3 台の飛翔体で構成され，地球と同じく，太陽から 1 AU のところを，地球から 20 度離れた位置で公転する．お互いは 5×10^6 km 離れており，mHz 領域の重力波を測定するのに適している．3 本の腕の組合せ方で，3 種類の 2 本腕の干渉計として使用できる．それにより，LISA はやってくる重力波の 2 種類の偏りを両方とも観測でき，天球を一様なアンテナパターンで走査するのである．地上の装置と同様に，LISA は雑音と戦わなくてはならない．熱雑音は問題ではなくなる．それは，長大な腕の長さのため，測定する信号が，つまりは腕の間の往復時間の差であるが，物質の振

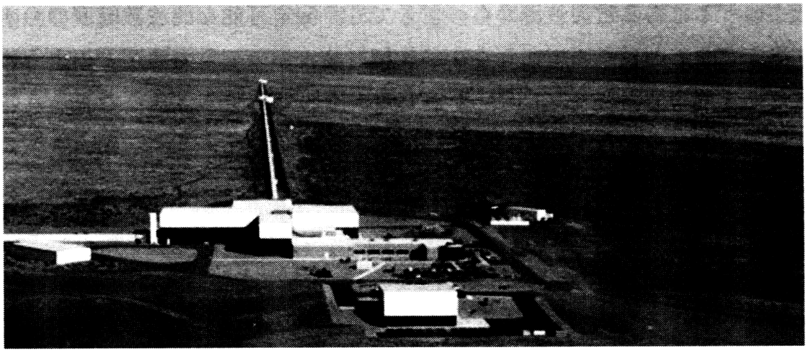


図 9.4　ワシントン州ハンフォードにある LIGO 重力波観測天文台. 4 km 腕の 1 本が遠くへのびているのがわかる. もう 1 本は左へのびており, 写真からはみ出している. 腕の中のレーザー光は, 4 km の長さの直径 1.6 m のステンレス真空チューブの中を通る. ここでは 2 組の干渉計が稼働している. 第二の干渉計は, 2 km の長さのものである. 端にくる鏡を設置している建物が腕の半ばあたりにみえる. 短いほうの干渉計は局所的な変動を見分けることに使用できる. この観測局の空中写真をみるには, Google マップのような, 地形表示エンジンを利用し, 緯度と経度 (46.45, − 119.4) をタイプするとよい. LIGO のもう一つの検出器（そこには干渉計が 1 つだけしかないが）は, ルイジアナ州リビングストンにある (30.55, − 90.79). VIRGO 検出器はピサの近くにあり (43.64, 10.50), ハノーバー近くの GEO600 の位置は (52.25, 9.81) である.（写真提供：LIGO 研究所）

動によってもたらされるものより十分に大きいからである. しかし, 太陽の放射圧とか太陽風といった外界からの変動が大きく, LISA 飛翔体は高精度で自由落下するようにつくりあげられなければならない. 各飛翔体には二つの自由運動する質量（標準質量とよばれる）が搭載され, それらは変動を受けず測地線を移動することができるものである. 飛翔体はその質量の位置を測定し, その位置を補正するためにジェットを使用するが, それは標準質量の運動に影響を与えないほど弱いものである. 標準質量は干渉計の腕の基準点として使用される. この技術はドラッグフリー操作とよばれ, LISA に関わる先進的な優れた技術の一つである.

1 W のレーザーを使用することで, LISA の感度は素晴らしいものとなり, 宇

宙の中のどこにある重力波源からの信号でも，測定可能な周波数範囲のものなら観測できることになるであろう．一般相対論において重力波がどのように発生するかを解説した後で，LISA や地上の検出器で観測できると考えられる重力波源の話題にもどる予定である．

9.3　重力波の発生

簡単な評価　地球にやってくるどんな重力波もその振幅が非常に小さいことは簡単にわかる．"強い" 重力波は，$h_{\mu\nu}=O(1)$ をもつだろう．このような振幅はニュートン・ポテンシャル（そういう概念が意味をもつとして）が 1 のオーダーのきわめて相対論的な源のごく近くでのみ期待される．質量 M の源に対して，これはそれからオーダー M の距離である．すべての輻射場と同様，重力波の振幅も源から遠くでは r^{-1} のように小さくなる．（波動方程式の解に不慣れな読者は，この例を次の節で知るだろう．）したがって，地球の質量 M の源からの距離が R なら，地球で期待できる最大の振幅は M/R のオーダーとなる．10^{23} m 離れた近くの銀河内の超新星の爆発で $10\,M_\odot$ のブラックホールができた場合，これは約 10^{-17} となる．実際はこの値は上限であり，より穏やかな現象では，はるかに小さい振幅しか与えない．

遅い運動による波動の発生　われわれのなすべきことは式 (8.42) を解くことである．

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)\bar{h}_{\mu\nu}=-16\pi T_{\mu\nu} \tag{9.64}$$

後の節でこの方程式の厳密解を見つける．ここでは，ある簡単化した（しかし現実的な）仮定をおく．$T_{\mu\nu}$ の時間依存部分は振動数 Ω の正弦振動，すなわち次の形

$$T_{\mu\nu}=S_{\mu\nu}(x^i)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t} \tag{9.65}$$

であり，$S_{\mu\nu}\neq 0$ の領域は振動数 Ω の重力波の波長 $2\pi/\Omega$ に比べ小さいと仮定する．フーリエ解析によって一般の時間依存性は正弦運動の重ね合せとなるから，最初の仮定は大きな制限ではない．実際，振動している星，パルサー，連星系など，多くの興味深い天体物理的な源は，ほぼ周期性をもっている．第二の仮定は，遅い運動の仮定とよばれる．というのは，この仮定は源の領域内の

典型的な速度（これは Ω にその領域の大きさを掛けたもの）が 1 よりはるかに小さいことを意味するからである．最も強力な重力波源以外のすべてはおそらくこの条件を満たしている．

次の形の $\bar{h}_{\mu\nu}$ に対する解を探そう．

$$\bar{h}_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}(x^i)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t} \tag{9.66}$$

(最後の解を得た段階でこの実部をとらなければならない．）この式と式 (9.65) を式 (9.64) に代入すると，

$$(\nabla^2 + \Omega^2)B_{\mu\nu} = -16\pi S_{\mu\nu} \tag{9.67}$$

以下，式 (9.64) の $\bar{h}_{\mu\nu}$ の添字は，ほとんど何の役割も果さないことを心にとめておくことは重要である．$\bar{h}_{\mu\nu}$ の各成分を単に波動方程式を満たすミンコフスキー空間の関数と見なす．式 (9.65) に至るまでのすべてのステップは，スカラー方程式 $(-\partial^2/\partial t^2 + \nabla^2)f = g$ を解く場合と同じである．

源の外（すなわち，$S_{\mu\nu} = 0$ のところ）では，式 (9.67) の解で遠方で外向きに伝わる波を表すものが欲しい．さらにそれを満たす可能な解のうち，遅い運動の極限で最も寄与の大きなものが欲しい．原点を源の内部の適当なところに選んだとき，r を球座標の動径座標として定義しよう．9.7 節の練習問題 29 で，求める解は源の外で次の形の球面波であることを示す．

$$B_{\mu\nu} = \frac{A_{\mu\nu}}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega r} + \frac{Z_{\mu\nu}}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega r} \tag{9.68}$$

ここで $A_{\mu\nu}$ と $Z_{\mu\nu}$ は定数である．$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega r}$ 項は原点 $r = 0$ に収束していく波（内向き波）を表し，他の項は外向き波を表す（9.7 節の練習問題 28 参照）．源から放出される波を考えているから，$Z_{\mu\nu} = 0$ と選ぶ．

次に問題は $A_{\mu\nu}$ を源と関係づけることである．ここで源が半径 $\varepsilon \ll 2\pi/\Omega$ の内だけに閉じ込められているという近似を使う．式 (9.67) をこの球の内部にわたって積分すると，一つの項は

$$\int \Omega^2 B_{\mu\nu}\mathrm{d}^3x \leq \Omega^2 |B_{\mu\nu}|_{\max} 4\pi\varepsilon^3/3 \tag{9.69}$$

ここで $|B_{\mu\nu}|_{\max}$ は $B_{\mu\nu}$ が球内でとる最大値である．したがって $\varepsilon \to 0$ の極限

でこの項が無視できることがわかる．式 (9.67) の左辺を積分して出てくるもう一つの項はガウスの定理から

$$\int \nabla^2 B_{\mu\nu} \mathrm{d}^3 x = \oint n \cdot \nabla B_{\mu\nu} \mathrm{d}S \tag{9.70}$$

となる．しかし表面積分は源の外でとられ，そこでは式 (9.68) で表される $B_{\mu\nu}$ の球対称成分のみが残るから，

$$\oint n \cdot \nabla B_{\mu\nu} \mathrm{d}S = 4\pi\varepsilon^2 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} B_{\mu\nu}\right)_{r=\varepsilon} \approx -4\pi A_{\mu\nu} \tag{9.71}$$

ここで近似 $\varepsilon \ll 2\pi/\Omega$ を使った．最後に式 (9.67) の右辺の積分として $J_{\mu\nu}$ を定義しよう．

$$J_{\mu\nu} = \int S_{\mu\nu} \mathrm{d}^3 x \tag{9.72}$$

これらの結果を合わせると $\varepsilon \to 0$ の極限で

$$A_{\mu\nu} = 4 J_{\mu\nu} \tag{9.73}$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = 4 J_{\mu\nu} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega(r-t)}/r \tag{9.74}$$

この表現は r^{-2} のオーダーの項と r^{-1} の形ではあるが $\varepsilon\Omega$ の高次のすべての項を無視したときの源から放出される重力波に対する式である．

上の式をさらに簡単にすることができる．そのために $\{\bar{h}_{\mu\nu}\}$ は式 (9.74) でわれわれが解いたように，その成分がお互いに何の関係もない量ではなく，一つのテンソルの成分であるという事実を用いる．式 (9.72) より

$$J_{\mu\nu} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t} = \int T_{\mu\nu} \mathrm{d}^3 x \tag{9.75}$$

であるが，この一つの帰結として次式が得られる．

$$-\mathrm{i}\Omega J^{\mu 0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t} = \int T^{\mu 0}{}_{,0} \mathrm{d}^3 x \tag{9.76}$$

ここで，$T^{\mu\nu}$ に対する保存則から

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{9.77}$$

だから，

$$T^{\mu 0}{}_{,0} = -T^{\mu k}{}_{,k} \tag{9.78}$$

したがって

$$\mathrm{i}\Omega J^{\mu 0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t} = \int T^{\mu k}{}_{,k}\mathrm{d}^3x = \oint T^{\mu k}n_k\mathrm{d}S \tag{9.79}$$

最後のステップは源を完全に含む任意の体積にガウスの定理を適用した．この体積を囲む面上で，$T^{\mu\nu}=0$ だから，式 (9.79) の右辺は消える．これは，$\Omega \neq 0$ のとき

$$J^{\mu 0} = 0, \qquad \bar{h}^{\mu 0} = 0 \tag{9.80}$$

を意味する．これらの条件は振動源の全エネルギー・運動量の保存則を具体的に表したものとなっている．$\bar{h}^{\mu 0}$ で無視した高次の部分はゲージによる項である（9.7 節の練習問題 32 参照）．

J_{ij} に対する表現も 4.10 節の練習問題 23 の結果を使うとわかりやすい形に書き直すことができる．

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int T^{00}x^l x^m \mathrm{d}^3x = 2\int T^{lm}\mathrm{d}^3x \tag{9.81}$$

7 章で遅い運動の系では，$T^{00} \approx \rho$（ニュートン質量密度）となることを学んだ．したがって式 (9.81) の左辺の積分は，質量分布の四重極モーメントとよばれる量になる．

$$I^{lm} \equiv \int T^{00}x^l x^m \mathrm{d}^3x \tag{9.82a}$$

$$= D^{lm}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t} \tag{9.82b}$$

[四重極モーメントの定義は，本によって違っている．ここでは Misner ら (1973) に従った．] この量を用いると次のように書ける．

$$\bar{h}_{jk} = -2\Omega^2 D_{jk}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega(r-t)}/r \tag{9.83}$$

式 (9.83) がオーダー r^{-2} のすべての項ばかりでなく，遅い速度の近似では重要でないすべての r^{-1} の項をも無視した近似であることを憶えておかなければならない．特に，$\bar{h}_{jk}{}^{,k}$ は高次であり，このことは式 (9.83) と (9.80) が r^{-1} と Ω の最低次までで，ゲージ条件 $\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0$ を満たしていることを保証している．

式 (9.83) の形のため，この近似はしばしば重力波の**四重極近似**とよばれる．

前に登場した平面波と同様，ここでもゲージをさらに制限する自由度がある．明らかな選択は，波の進行方向（動径方向，その単位ベクトルは $n^j = x^j/r$）に直交する TT ゲージを見つけることである．9.7 節の練習問題 32 で，このことが可能なことを示す．TT ゲージでは波は最も簡単な形をとる．われわれが波を測定する点で，それが z 方向に進んでいるように空間軸を選ぶと，式 (9.80) 以外に次の制限を課すことができる．

$$\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{zi} = 0 \tag{9.84}$$

$$\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xx} = -\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{yy} = -\Omega^2(\text{I}\!\!\!-_{xx} - \text{I}\!\!\!-_{yy})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega r}/r \tag{9.85}$$

$$\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xy} = -2\Omega^2 \text{I}\!\!\!-_{xy}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega r}/r \tag{9.86}$$

ここで

$$\text{I}\!\!\!-_{jk} = I_{jk} - \frac{1}{3}\delta_{jk}I^l{}_l \tag{9.87}$$

はトレースフリーあるいは還元四重極モーメントとよばれる．

例　9.2 節で検出器として用いたような簡単な振動子から放出される波を考えてみよう．両方の質量が，l_0 離れた平衡の位置にある点のまわりで振幅 A，角振動数 ω で振動しているとする．すると 9.7 節の練習問題 30 から，ゼロでない唯一の四重極モーメントの成分は

$$\begin{aligned} I_{xx} &= m[(x_1)^2 + (x_2)^2] \\ &= m\left[\left(-\frac{1}{2}l_0 - A\cos\omega t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}l_0 + A\cos\omega t\right)^2\right] \\ &= \text{const.} + mA^2\cos 2\omega t + 2ml_0A\cos\omega t \end{aligned} \tag{9.88}$$

I_{xx} の正弦関数の部分だけが，上で導いた公式に用いられることに注意せよ．この場合，振動数 ω と 2ω をもった 2 項がある．波動方程式 (9.64) は線形だから，おのおのの項を独立に扱い，後でその結果を足せばよい．I_{xx} の ω の項は，$2ml_0A\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ の実部である．そのトレースフリー四重極テンソルは次の成分をもつ．

$$\left.\begin{aligned} \not{I}_{xx} &= I_{xx} - \frac{1}{3}I^j{}_j = \frac{2}{3}I_{xx} = \frac{4}{3}ml_0 A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ \not{I}_{yy} &= \not{I}_{zz} = -\frac{1}{3}I_{xx} = -\frac{2}{3}ml_0 A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \end{aligned}\right\} \tag{9.89}$$

すべての非対角成分はゼロである．z 方向に伝わる波を考えると，式 (9.84)〜(9.86) から

$$\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xx} = -\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{yy} = -2m\omega^2 l_0 A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(r-t)}/r, \qquad \bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xy} = 0 \tag{9.90}$$

この波は，図 9.1 の楕円の軸が二つの質量を結ぶ線にそろっているような方向に線形に偏っている．対称性から，同じことが y 方向に伝わる波に対しても成り立つ．しかし，x 方向（すなわち二つの質量を結ぶ線に沿った方向）に伝わる波に対しては，式 (9.85)〜(9.86) で，$z \to x$，$x \to y$，$y \to z$ の置き換えをする必要がある．すると

$$\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{ij} = 0 \tag{9.91}$$

となって，x 方向には波は伝わらない．9.7 節の練習問題 36 で，任意の方向での振幅と偏りを計算して，この輻射のすべてのパターンを見つける．

I_{xx} の 2ω の部分に対しても，同様な計算から次の輻射のすべてのパターンが得られる．

$$\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xx} = -\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{yy} = -4m\omega^2 A^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega(r-t)}/r, \qquad \bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xy} = 0 \tag{9.92}$$

全体の場は，式 (9.90) と式 (9.92) の和の実部である．たとえば

$$\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xx} = -[2m\omega^2 l_0 A\cos\omega(r-t) + 4m\omega^2 A^2\cos 2\omega(r-t)]/r \tag{9.93}$$

この種の実験室サイズの発生器からの重力波を評価してみよう．たとえば,$m = 10^3\,\mathrm{kg} = 7\times 10^{-24}\,\mathrm{m}$，$l_0 = 1\,\mathrm{m}$，$A = 10^{-4}\,\mathrm{m}$，$\omega = 10^4\,\mathrm{s}^{-1} = 3\times 10^{-4}\,\mathrm{m}^{-1}$ ととると，波の振幅は約 $10^{-34}/r$ となる．ここで，r はメートルで測ったばねからの距離である．これから実験室の発生器では近い将来，有用な重力波をつくりだすことは不可能であることがわかる．

より興味深い重力波の源の例は，連星系である．厳密にいえば，われわれの重力波の導き方は，重力以外の力によって運動している [これが式 (9.77) の内容である] 源にだけあてはまる．しかし，最後の結果 (9.84)〜(9.87) は，その

運動の原因である力ではなく，運動自体のみで書かれている．したがって，式(9.84)〜(9.87) がニュートン重力で支配される系に対してさえも，よい第一次近似であることは，たぶん驚くにはあたらないだろう．（これに関しては文献をみよ.）距離 l_0 だけ離れてお互いのまわりを円運動している点として理想化された質量 m の二つの星を考える．（すなわち，半径 $\frac{1}{2}l_0$ の円上を運動している.）その軌道の式（重力 =“遠心力”）は

$$\frac{m^2}{l_0^2} = m\omega^2\left(\frac{l_0}{2}\right) \Rightarrow \omega = \left(\frac{2m}{l_0^3}\right)^{1/2} \tag{9.94}$$

ここで，ω は軌道角速度である．すると座標を適当に選べば，星は次の曲線上を動く．

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= \tfrac{1}{2}l_0\cos\omega t, & y_1(t) &= \tfrac{1}{2}l_0\sin\omega t \\ x_2(t) &= -x_1(t), & y_2(t) &= -y_1(t) \end{aligned}\right\} \tag{9.95}$$

ここで添字 1，2 はおのおのの星を表す．これらの式から

$$\left.\begin{aligned} I_{xx} &= \tfrac{1}{4}ml_0^2\cos 2\omega t + \text{const.} \\ I_{yy} &= -\tfrac{1}{4}ml_0^2\cos 2\omega t + \text{const.} \\ I_{xy} &= \tfrac{1}{4}ml_0^2\sin 2\omega t \end{aligned}\right\} \tag{9.96}$$

還元四重極モーメントのうちで残るものは，時間に依存しない項を無視し，複素数表現を用いると

$$\left.\begin{aligned} \not{I}_{xx} &= -\not{I}_{yy} = \tfrac{1}{4}ml_0^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t} \\ \not{I}_{xy} &= \tfrac{1}{4}iml_0^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t} \end{aligned}\right\} \tag{9.97}$$

すべての輻射は振動数 $\Omega = 2\omega$ ででてくる．z 方向に沿った（軌道面に垂直な）輻射は，式 (9.84)〜(9.86) から

$$\left.\begin{aligned} \bar{h}_{xx} &= -\bar{h}_{yy} = -2ml_0^2\omega^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega(r-t)}/r \\ \bar{h}_{xy} &= -2\mathrm{i}ml_0^2\omega^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega(r-t)}/r \end{aligned}\right\} \tag{9.98}$$

これは**円偏り**の輻射である（9.7 節の練習問題 15 参照）．軌道面内，たとえば x 方向の輻射も式 (9.91) を導いたような方法で求められる．

$$\bar{h}_{yy}^{\mathrm{TT}} = -\bar{h}_{zz}^{\mathrm{TT}} = \frac{1}{2}ml_0^2\omega^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega(r-t)}/r \tag{9.99}$$

他のすべての成分はゼロとなる．これは軌道面に沿った線形偏りである．この系に対する輻射のパターンは，9.7 節の練習問題 38 で詳しく取り扱われる．またここでの計算は練習問題 39 で楕円軌道にある質量の違った星からなる連星系に一般化される．

重力波の振幅は $ml_0^2\omega^2/r$ のオーダーであり，式 (9.94) から $(m\omega)^{2/3}m/r$ のオーダーとなる．連星系は重力波源としては重要なものと考えられており，実際のところ，連星系からの重力波が最初に観測されてもおかしくない．パルサーを含む連星系は，すでに重力波放出に関して，間接的ではあるが強い証拠をもたらしている［Stairs (2003)，Lorimer (2008)］．最初に発見され，しかもいまでも最も重要な連星系は，パルサー PSR B1913+16 を含む系で，Hulse と Taylor によるその連星系の発見 (1975) が，彼らに 1993 年度のノーベル物理学賞をもたらしたのである．その連星系は 2 つの中性子星（第 11 章参照）から構成されており，接近した距離でお互いのまわりを回っている．パルサーの周期のドップラー偏移から，軌道周期は 7 時間 45 分 7 秒（27907 秒あるいは $8.3721 \times 10^{12}\,\mathrm{m}$），両方の星はともに約 $1.4\,M_\odot$（2.07 km）の質量をもつと推測されている [Taylor と Weisberg (1982)]．この系が，$8\,\mathrm{kpc} = 2.4 \times 10^{20}\,\mathrm{m}$ だけ地球から離れているとすると，その重力波は地球でだいたい 10^{-23} の振幅をもつ．この章の後でこの輻射の連星軌道自体に対する効果を計算する．10 章では，質量をどのように測るかをも含めて，この系をつくっている星の力学を議論する．

大きさのオーダー評価　われわれの簡単なアプローチでは，より複雑な運動や非周期運動で発生する $\bar{h}_{\mu\nu}$ に対する解を書き下すことはできないが，式 (9.83) を使って大きさのオーダーの評価をすることができる．D_{jk} は質量 M，大きさ R の系に対して，MR^2 のオーダーだから，それからの輻射はだいたい $M(\Omega R)^2/r \approx v^2(M/r)$ の振幅をもつ．ここで v は源の典型的な内部速度である．これは直接，式 (9.99) に適用される．式 (9.93) で第 1 項は，R^2 のかわりに，その問題での二つの特徴的な長さの積 l_0A を用いていることに注意せよ．もし自己重力の下で運動している崩壊しつつある質量を扱うなら，ビリアル定理から $v^2 \sim \phi_0$（源の典型的なニュートン・ポテンシャル）であり，一方，$M/r \sim \phi_r$（観測者の距離 r での源のニュートン・ポテンシャル）となる．したがって，こ

の場合，次の簡単な評価ができる．

$$\blacklozenge \qquad h \sim \phi_0 \phi_r \tag{9.100}$$

したがって，波の振幅はつねにニュートン・ポテンシャル ϕ_r 以下か，またはそのオーダーである．それでは，なぜ ϕ_r 自体ではなく，h を検出できるのだろうか？　爆発以前に重力的にはその存在は発見できないのに，なぜ遠くの銀河での超新星からの波は見つけることができるのだろうか？　その答は重力の性質のなかに見いだすことができる．距離 r にあるサイズ l_0 の検出器にかかるニュートンの潮汐力は $\sim \phi_r l_0/r^2$ であるが，波の及ぼす力は $\sim h l_0 \omega^2$ である [式 (9.45) 参照]．したがって，波による力の方が，ニュートン的な力よりも $\phi_0(\omega r)^2 \sim (\phi_0 r/R)^2$ だけ大きい．10^{23} m 離れた検出器によって観測される大きさ 1 AU ($\sim 10^{11}$ m) の相対論的な ($\phi_0 \sim 0.1$) 系に対して，これは 10^{22} 倍となる．ついでながら，この評価は力学系の重力場をニュートン的に近似できる（すなわち重力波の効果を無視できる）最大の距離 $r = R/\phi_0$ を与える．ここで R はその系の大きさである．

式 (9.100) の評価は，すべての質量の運動が D_{jk} に寄与していると仮定しているので，楽観的な上限である．現実的な情況では，**球対称な運動は重力波を放出しない**という基本的事実から，これは甚だしい過大評価となる．この厳密な証明は，10 章でなされるが，9.7 節の練習問題 40 で下の式 (9.101) の線形理論の場合にこれを示す．T^{00} が球対称なら，I^{lm} は δ^{lm} に比例し，$\not{I}^{lm}$ は消えるので，このことはまた式 (9.82a) からもうかがえる．しかし式 (9.82a) は最大の寄与の輻射のみを与えるような近似にもとづいているので，この議論には注意がいる．もし近似の高次の項が存在するなら，球対称の運動はそれには寄与しないことを示さなければならないだろう．実際にこのことは正しく，どういう理由で，消えることになるかを知ることは重要である．その答は，式 (9.77) にあり，ちょうど電荷の保存則が電磁気学で単極輻射の存在を禁止しているように，エネルギーの保存則が線形理論で単極輻射を禁止している．

式 (9.82a) をあまり安易に使う危険性は，9.7 節の練習問題 31（e）の次の例に示されている．回転している正方形の四隅に等しい質量があると，I^{lm} に時間依存性はなく，したがってその近似では輻射は存在しない．ところが，この

運動は近似の次の高次のオーダーで輻射を放出する．

波動方程式の厳密解　波動方程式 (9.64) を勉強したことのある読者は，任意の $T_{\mu\nu}$ に対して，その外向きの波の解が遅延積分で与えられることを知っているだろう．

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu}(t, x^i) &= 4\int \frac{T_{\mu\nu}(t-R, y^i)}{R}\mathrm{d}^3y \\ R &= |x^i - y^i| \end{aligned} \tag{9.101}$$

ここで積分は，$\bar{h}_{\mu\nu}$ を評価する事象 (t, x^i) の過去光円錐にわたる．原点を源の内部にとり，場の点 x^i を遠くにとる．

$$|x^i| \equiv r \gg |y^i| \equiv y \tag{9.102}$$

また $T_{\mu\nu}$ の時間微分は小さいとする．すると式 (9.101) の積分の中で支配的な寄与は，R を r によって置き換えたものからくる．

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, x^i) \approx \frac{4}{r}\int T_{\mu\nu}(t-r, y^i)\mathrm{d}^3y \tag{9.103}$$

これは式 (9.74) の一般化である．ここで式 (9.77) の保存則

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

から，

$$\int T_{0\mu}\mathrm{d}^3y = 一定 \tag{9.104}$$

すなわち，全エネルギーと全運動量は保存される．$\bar{h}_{0\mu}$ の $1/r$ 部分は最低次で時間依存性がなく，したがってどんな波動場にも寄与しない．これは式 (9.80) の一般化である．9.7 節の練習問題 32 を参照．次に式 (9.81) を用いて，式 (9.83) の一般化が得られる．

$$\bar{h}_{jk}(t, x^i) = \frac{2}{r}I_{jk,0,0}(t-r) \tag{9.105}$$

以前と同様，TT ゲージを採用することができて次の結果が得られる．

$$\begin{aligned} \bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xx} &= \frac{1}{r}[\rlap{-}I_{xx,0,0}(t-r) - \rlap{-}I_{yy,0,0}(t-r)] \\ \bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xy} &= \frac{2}{r}\rlap{-}I_{xy,0,0}(t-r) \end{aligned} \tag{9.106}$$

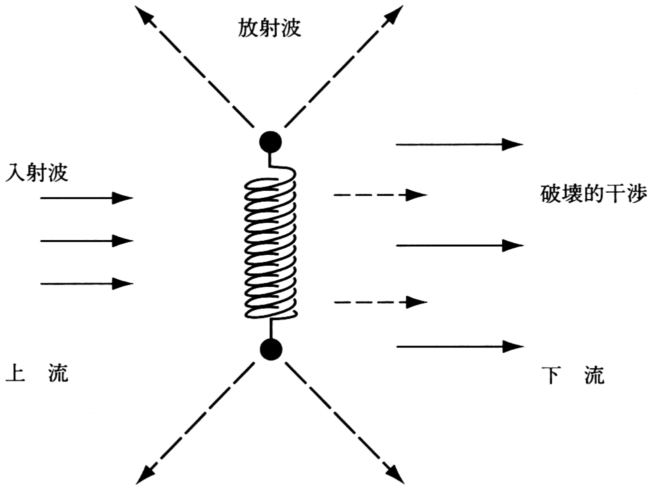


図 9.5　図 9.2 の検出器が波によって励起されたとき，それ自身も波を放出する.

9.4 重力波によって運ばれるエネルギー

概　観　重力波が通り過ぎるとき，物体にエネルギーを注ぎ込むことができることをみてきた．これが検出器の原理である．そのことはまた重力波が，その源からエネルギーをもち去ることを意味している．以下にみるように，たとえ重力波自体は検出されなくても，源に対するこのエネルギー損失の効果が観測されるような情況が存在するので，このことは重力波理論にとって非常に重要な側面である．このエネルギー損失の公式を導くには，いくつかの違った方法があり [Misner ら (1973) 参照]，問題は多くの研究者を引きつけ，さまざまな観点から研究された．Damour (1987)，Schutz (1980a)，二間瀬 (1983)，Blanchet (2006) を参照．ここでのわれわれのアプローチは，線形理論という単純なものであり重力波についてすでに知っていることを最大限に使っていく．

9.2 節の検出器としての調和振動子の議論で，重力波の場への検出器の影響は無視できるとして，検出器を一種の “テスト物体” として暗に仮定した．厳密

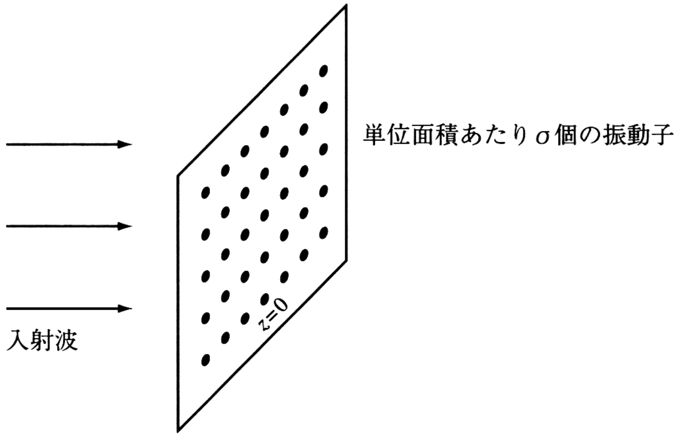


図 9.6　図 9.5 の検出器が単位面積あたり σ の密度で面に分布された情況

にいうと，これは矛盾している．もし検出器が波からエネルギーを受け取ると，検出器を通過した後では波のエネルギーは小さくなっていなければならない．すなわち検出器の“下流”で，波は“上流”よりも少しだけ振幅が小さくなっているはずである．このことは次のようにして容易に理解される．9.2 節では振動子がいったん波によって運動をし始めたとき，それ自身が波を放出するという事実を無視している．この問題は 9.3 節で解かれ，式 (9.88) で二つの振動数の波が放出されることがわかった．入射波と同じ振動数 Ω で放出された波を考えよう．正確に下流に放出された波は，入射波と同じ振動数をもつから，下流の**全体の**波動場は，その二つを重ね合せた波の振幅をもつ．以下でこの二つの波はお互いに打ち消しあうように干渉し，下流の正味の振幅は小さくなることをみる（図 9.5 参照）．（別の方向では，干渉は起らず，波は単にお互いに素通りするだけである．）この振幅の変化が波によって実際に運ばれるエネルギーの変化を意味すると仮定し，そのエネルギーの変化を検出器によって波から引き抜かれたエネルギーと等しいとおくことによって，波によって運ばれるエネルギーを，その振幅の関数として簡単に表現しよう．それがわかると任意に輻射している物体のつくり出す波はすでに 9.3 節で知っているから，波の放出に

よって物体が失うエネルギーを計算することができる．

重力波のエネルギー流束　　ここで単位時間あたりに，単位面積を通る重力波によって運ばれるエネルギー，すなわちエネルギー流束を導こう．このために一つの振動子だけでなく，$z=0$ 面を満たしている振動子の列を考える．これらはお互いに非常に密集していて，単位面積あたり，σ 個の振動子のほとんど連続的な分布を見なせるとする（図 9.6）．入射波が TT ゲージで

$$\begin{aligned}\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xx} &= A\cos\Omega(z-t),\\ \bar{h}^{\mathrm{TT}}_{yy} &= -\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xx}\end{aligned} \tag{9.107}$$

（他の成分はすべて，ゼロである）とすると，9.2 節でおのおのの振動子は（遷移解が消えた後で）次の形の定常的な振動をすることを示した．

$$\xi = R\cos(\Omega t+\phi) \tag{9.108}$$

ここで R と ϕ は，それぞれ式 (9.48)，(9.49) で与えられる．この運動が定常的なのは，振動子内の摩擦によって散逸されるエネルギーが，波の潮汐力によってばねになされる仕事で補われるからである．このことから，波は各振動子に次の量のエネルギーを供給することがわかる．

$$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = \nu(\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}t)^2 = m\gamma(\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}t)^2 \tag{9.109}$$

定常的なエネルギー損失を得るため，これを振動の 1 周期 $2\pi/\Omega$ にわたって平均すると（山形括弧は，この平均操作を表す），

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right\rangle &= \frac{1}{2\pi/\Omega}\int_0^{2\pi/\Omega} m\gamma\Omega^2R^2\sin^2(\Omega t+\phi)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}m\gamma\Omega^2R^2\end{aligned} \tag{9.110}$$

これが単位時間あたり各振動に与えられるエネルギーである．単位面積あたり，σ 個の振動子があるから，波の正味のエネルギー流束 F は，$z=0$ 面を通り過ぎるさいに，

$$\delta F = -\frac{1}{2}\sigma m\gamma\Omega^2R^2 \tag{9.111}$$

だけ，減少する．

式 (9.111) を導いた計算とは独立に，下流での振幅の変化を計算しよう．おのおのの振動子は，ωt を $\Omega t+\phi$，A を $R/2$ に変えた式 (9.88) で与えられる四重極テンソルをもっている．（各質量はばねの全体ののび R の半分の振幅 A で動く．）この場合 R は l_0 に比べてごくわずかだから $[R=O(h^{\mathrm{TT}}_{xx}l_0)]$，式 (9.88) の中の 2Ω の項は，Ω の項に比べて無視できる．したがって，この場合，振動子は次の四重極モーメントをもつ．

$$I_{xx}=ml_0R\cos(\Omega t+\phi) \tag{9.112}$$

すると式 (9.83) から，各振動子は r 離れた点で次の波をつくりだす．

$$\delta\bar{h}_{xx}=-2\Omega^2ml_0R\cos[\Omega(r-t)-\phi]/r \tag{9.113}$$

（この波が入射波に比べて小さいことを示すために，$\delta\bar{h}_{xx}$ と書く．）すべての振動子による寄与を足し合せることによって，全体の輻射場を得るのは容易である．図 9.7 で，振動子のある面から下流で距離 z の点 P を考える．P から面上に下した垂線の交点 Q を中心として面上に極座標 $(\tilde{\omega},\phi)$ をつくる．Q から距離 $\tilde{\omega}$ にある振動子 O は点 P に式 (9.113) で $r=(\tilde{\omega}^2+z^2)^{1/2}$ とした形で与えられる場をつくる．$\tilde{\omega}$ と $\tilde{\omega}+\mathrm{d}\tilde{\omega}$ の間にある振動子の数は，$2\pi\sigma\tilde{\omega}\mathrm{d}\tilde{\omega}$ だから，点 P での振動子全体のつくる場は，次のようになる．

$$\delta\bar{h}^{\mathrm{total}}_{xx}=-2m\Omega^2l_0R2\pi\int_0^\infty\sigma\cos[\Omega(r-t)-\phi]\frac{\tilde{\omega}\mathrm{d}\tilde{\omega}}{r}$$

この積分変数を r に変えると

$$\tilde{\omega}\mathrm{d}\tilde{\omega}=r\mathrm{d}r$$

だから，次の式が得られる．

$$\delta\bar{h}^{\mathrm{total}}_{xx}=-2m\Omega^2l_0R2\pi\int_z^\infty\sigma\cos[\Omega(r-t)-\phi]\mathrm{d}r \tag{9.114}$$

もし σ が一定なら，この積分は簡単であるが，その値は，$r=\infty$ で不定となる．物理的に，遠くの振動子は何の役割も果さないと期待できるから，σ は $\exp(-\varepsilon r)$ に比例すると仮定し，積分した後で ε をゼロにもっていく．そうすると次の結果が得られる．

$$\delta\bar{h}_{xx}^{\text{total}} = 4\pi\sigma m\Omega l_0 R\sin[\Omega(z-t)-\phi] \tag{9.115}$$

したがって，面状に分布した振動子は全体として平面波を出す．これと入射波を比べるため，式 (9.115) を同じ TT ゲージに書き換えると [式 (9.83) は，TT ゲージではない]（9.7 節練習問題 42 参照）．

$$\delta\bar{h}_{xx}^{\text{TT}} = \delta\bar{h}_{yy}^{\text{TT}} = 2\pi\sigma m\Omega l_0 R\sin[\Omega(z-t)-\phi] \tag{9.116}$$

これと入射波（9.107）を合せると，R の一次までで次の正味の場が得られる．

$$\begin{aligned}\bar{h}_{xx}^{\text{net}} &= \bar{h}_{xx}^{\text{TT}} + \delta\bar{h}_{xx}^{\text{TT}} \\ &= (A - 2\pi\sigma m\Omega l_0 R\sin\phi)\cos[\Omega(z-t)-\psi]) \end{aligned} \tag{9.117}$$

ここで

$$\tan\psi = \frac{2\pi\sigma m\Omega l_0 R}{A}\cos\phi \tag{9.118}$$

これから小さな位相のずれを別にして，正味の効果は振幅 A を次の量だけ小さくすることがわかる．

$$\delta A = -2\pi\sigma m\Omega l_0 R\sin\phi \tag{9.119}$$

この減少が，下流での流束 F の減少の原因でなければならない．式 (9.111) を式 (9.119) で割って，式 (9.48) と式 (9.49) を用いて，R と ϕ を消去すると，次

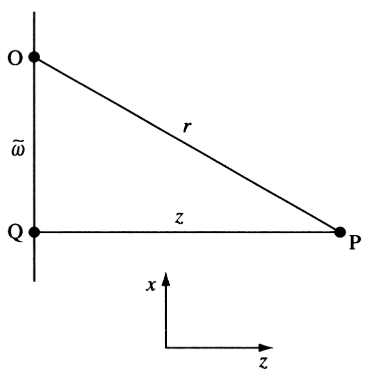


図 9.7　O の振動子による点 P での場の計算

の驚くべき簡単な式が得られる.

$$\frac{\delta F}{\delta A} = \frac{1}{16\pi}\Omega^2 A \tag{9.120}$$

これがわれわれにとって鍵になる式である. 振動数 Ω の波の振幅 A の変化 δA は, その流束 F (1 周期にわたっての平均) を変えるが, その変化は Ω と A と δA だけによることを, この式はいっている. エネルギーの保存から, この結果を導くために振動子を使ったが, 結果からは振動子は完全に姿を消している. 式 (9.120) は, 波自身の性質である. 式 (9.120) を "積分" して, 振動数 Ω, 振幅 A の波の全流束を求めることができる.

$$F = \frac{1}{32\pi}\Omega^2 A^2 \tag{9.121}$$

式 (9.107) の波の 2 乗の平均は

$$\langle(\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xx})^2\rangle = \frac{1}{2}A^2$$

となり (ここで再び山形括弧は 1 周期にわたる平均を表す), また $\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu}$ は二つだけゼロでない成分をもつから, 式 (9.121) は結局, 次のように書ける.

◆
$$F = \frac{1}{32\pi}\Omega^2\langle\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu}\bar{h}^{\mathrm{TT}\mu\nu}\rangle \tag{9.122}$$

この形はバックグラウンドのローレンツ変換に対して不変であるが, ゲージ変換に対して変化する. バックグラウンドのローレンツ変換 (回転) によって, ある偏り状態は別の偏り状態に変るから, 式 (9.122) はすべての偏り状態に適用され, したがって振動数 Ω の任意の平面波に適用される. 実際, これは単位面積あたりのエネルギーの流れを与えるから, **任意**の波面, 平面波にもあるいは 9.3 節のような膨張している球面波にも適用される. これは, つねに波面の曲率が無視できるような十分小さな面積をとることができるからである. (単一の振動数をもたない) 任意の項に対する一般化は, 9.7 節の練習問題 43 で行われる.

7.3 節のエネルギーに関する議論を憶えている読者は, 一般相対論においてエネルギーの定義ができないことから, ここでの導出全体に疑問を感じるかもしれない. 実際には, われわれはエネルギーの保存, すなわち振動子に注ぎ込まれたエネルギーは流束の減少に等しくなければならないことを**証明したわけ**

ではない．流束を導くために，それを単に仮定しただけである．しかしながら，議論を逆に進めて，ここで導いた流束が重力波のエネルギーの唯一の受け入れられる定義であると主張することはできる．というのはわれわれの計算は，h の最低次で，それが他のエネルギーと合せると保存することを示しているからである．ここで $h_{\mu\nu}$ の“最低次で”という制限は重要である．というのはわれわれはほとんど平坦な時空を使っており，最低次では保存量をつくることができるからである．線形理論を離れて高次にいくと，真のメトリックの時間依存性が重要になるため局所的なエネルギーは簡単には定義できなくなる．この問題は数ある相対論の最も根本的な問題の一つであり，どんな高等な教科書でも詳しく議論されている．われわれの方程式は線形理論の範囲内で**のみ**用いるべきものである．

輻射している系から失われるエネルギー　　式 (9.82)～(9.87) に従って輻射を出している孤立系を考える．式 (9.122) をその系を取り囲むある球面にわたって積分すると，それによる正味のエネルギー損失率が得られる．たとえば，z 軸に沿った距離 r のところで，式 (9.122) は次のようになる．

$$F = \frac{\Omega^6}{32\pi r^2}\langle 2(\rlap{-}I_{xx} - \rlap{-}I_{yy})^2 + 8\rlap{-}I^{xy}\rangle \tag{9.123}$$

ここで [式 (9.87) から導かれる] 次の恒等式

$$\rlap{-}I^i{}_i = \rlap{-}I_{xx} + \rlap{-}I_{yy} + \rlap{-}I_{zz} = 0 \tag{9.124}$$

を用いて，少し計算すると次のようになる．

$$F = \frac{\Omega^6}{16\pi r^2}\langle 2\rlap{-}I_{ij}\rlap{-}I^{ij} - 4\rlap{-}I_{zj}\rlap{-}I_z{}^j + \rlap{-}I_{zz}^2\rangle \tag{9.125}$$

ここで添字 z は輻射がやってくる座標原点からの方向であることから現れた．F のこの部分だけが，源からの半径 r の球面上の位置に依存している．$\rlap{-}I_{ij}$ のすべての成分は位置ではなく，時間に依存する．したがって，球面への単位垂直ベクトル

$$n^j = x^j/r \tag{9.126}$$

を使えば，式 (9.125) を球面上の任意の位置での表現に次のように一般化できる．

$$F = \frac{\Omega^6}{16\pi r^2}\langle 2\bar{I}_{ij}\bar{I}^{ij} - 4n^j n^k \bar{I}_{ji}\bar{I}_k{}^i + n^i n^j n^k n^l \bar{I}_{ij}\bar{I}_{kl}\rangle \tag{9.127}$$

源から出る総エネルギー（光度，ルミノシティー）は，これの半径 r の球面にわたる積分である．9.7 節の練習問題 45 で次の積分を証明する．

$$\int n^j n^k \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi = \frac{4\pi}{3}\delta^{jk} \tag{9.128}$$

$$\int n^i n^j n^k n^l \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi = \frac{4\pi}{15}(\delta^{ij}\delta^{kl} + \delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}) \tag{9.129}$$

これを使うと源の重力波の光度は，

$$\begin{aligned}\int F r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi = &\frac{1}{4}\Omega^6\langle 2\bar{I}_{ij}\bar{I}^{ij} - \frac{4}{3}\bar{I}_{ij}\bar{I}^{ij} \\ &+ \frac{1}{15}(\bar{I}^i_i\bar{I}^k_k + \bar{I}^{ij}\bar{I}_{ij} + \bar{I}^{ij}\bar{I}_{ij})\rangle\end{aligned} \tag{9.130}$$

◆
$$L = \frac{1}{5}\Omega^6\langle \bar{I}_{ij}\bar{I}^{ij}\rangle \tag{9.131}$$

$\bar{I}_{ij}$ がより一般の時間依存性をもつ場合の一般化は，次式である．

$$L = \frac{1}{5}\langle \dddot{\bar{I}}_{ij}\dddot{\bar{I}}^{ij}\rangle \tag{9.132}$$

ここでドットは時間微分を表す．

式 (9.131) と式 (9.132) は弱い重力波と遅い重力波源に対してのみ正確であることを強調しておかねばならない．非常に相対論的な重力波源に対しては，これらの式はたかだかオーダーの評価しか与えない．しかしわれわれの導き方の精神と式 (9.100) の h_{ij} の大きさの評価の議論によって，強い場の源に対して式 (9.132) からいくつかのことは学ぶことができる．I_{jk} は MR^2 のオーダーであるから，式 (9.132) より，$L \sim M^2R^4\Omega^6 \sim (M/R)^2(R\Omega)^6 \sim \phi_0^2 v^6$．このように光度は速度に非常に敏感な関数である．可能な最大の速度は，自由落下の速度のオーダーだから，$v^2 \sim \phi_0$，したがって

$$L \lesssim (\phi_0)^5 \tag{9.133}$$

$\phi_0 \lesssim 1$ だから距離化した単位での光度は，決して 1 を大きく越えることはない．ふつうの単位系では

$$L \lesssim 1 = c^5/G = 3.6 \times 10^{52}\,\mathrm{W} \tag{9.134}$$

次の簡単な議論からなぜこの光度が上限なのか理解することができる．大きさ R，光度 L の源の中の輻射場は，($|T^{0i}| \sim |v^i|T^{00} = cT^{00} = T^{00}$ だから) エネルギー密度 $\geq L/R^2$ をもち，これはその表面を横切る流束である．輻射の総エネルギーはしたがって $\gtrsim LR$ である．それゆえ輻射だけのニュートン・ポテンシャルは $\gtrsim L$ となる．次の章でそのニュートン・ポテンシャルが大きく 1 を越えるものは，その重力場が非常に強く，輻射さえも逃れられなくなり，ブラックホールをつくることが示される．こうして $L \sim 1$ がどんな源に対しても最大の光度である．この議論は重力波ばかりでなく電磁波などあらゆる種類の輻射にあてはまる．現在までに知られている最も明るい天体であるクェーサーとガンマ線バーストは（距離化した単位で）光度 $\lesssim 10^{-10}$ である．対照的に，合体するブラックホール（第 11 章）の場合，多くのシミュレーションによれば最大光度は 10^{-3} になる．その場合放出されるのは言うまでもなくすべて重力波である．

例：ハルス–テイラーの連星パルサー　　9.3 節で距離 l_0 だけ離れて円軌道にある同じ質量 M の二つの星からなる連星系の I_{ij} を計算した．式 (9.132) に式 (9.97) の実部を代入すると

$$L = \frac{8}{5} M^2 l_0^4 \omega^6 \tag{9.135}$$

が得られる．これを，l_0 を消して M と ω で書くと，

$$L = \frac{32}{5\sqrt[3]{4}} (M\omega)^{10/3} \approx 4.0 (M\omega)^{10/3} \tag{9.136}$$

この表現から二つのことがわかる．まず，L は距離化した単位で無次元であること，そして次に，まず距離化した単位で計算し，それからふつうの単位系に変換する方がたいてい簡単であるということである．その変換は，

$$\begin{aligned} L(\text{SI 単位}) &= (c^5/G)L\ (\text{距離化した単位}) \\ &= 3.63 \times 10^{52}\,\mathrm{J\cdot s^{-1}} \times L\ (\text{距離化した単位}) \end{aligned} \tag{9.137}$$

したがって 9.3 節の連星パルサー系で，その軌道が円とすると，$\omega = 2\pi/P =$

$7.5049 \times 10^{-13}\,\mathrm{m}^{-1}$ であり，

$$L = 1.71 \times 10^{-29} \tag{9.138}$$

となる．この距離化した単位での値を，ワットに変換することはもちろんできるが，より意味のあることは，これをその系のニュートン力学でのエネルギーと比べることである．軌道の半径を $r = \frac{1}{2}l_0$ と定義するとそのニュートン力学でのエネルギーは，

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}M\omega^2 r^2 + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2 - \frac{M^2}{2r} \\ &= \frac{M}{r}(\omega^2 r^3 - \frac{1}{2}M) = -\frac{M^2}{4r} \\ &= -4^{-2/3}M^{5/3}\omega^{2/3} \approx -0.40M^{5/3}\omega^{2/3} \qquad (9.139) \\ &= -1.11 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} \qquad (9.140) \end{aligned}$$

物理の問題としては，この系が変化するにどのくらいかかるかということである．換言すれば，波として放出されたエネルギーは，系のエネルギーを変えることによって，軌道を変化させる．$|E|$ を大きくし，したがって ω が大きくなり，軌道周期が短くなる．たとえば 1 年にどれだけ周期が変化するだろうか?

式 (9.139) の対数をとり，それを微分すると，

$$\frac{1}{E}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}\frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3}\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} \tag{9.141}$$

$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ は単に $-L$ だから，$\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ に対して解くことができて，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}P/\mathrm{d}t &= (3PL)/(2E) \approx -15PM^{-1}(M\omega)^{8/3} \\ &= -2.0 \times 10^{-13} \qquad (9.142) \end{aligned}$$

これはどんな単位系でも無次元の量である．1 年あたりの秒に直すと，

$$\mathrm{d}P/\mathrm{d}t = -6.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{s} \cdot \mathrm{yr}^{-1} \tag{9.143}$$

この評価の式は軌道の離心率がゼロでない場合（PSR1913+16 の場合，$e = 0.617$），変更を加える必要がある．正しい公式は 9.7 節の練習問題 49 で導かれ

る．その結果，正しいエネルギー損失率はわれわれの評価式 (9.138) の 12 倍にもなる．星の最大の角速度（お互いの距離が最短のとき）は，ω に対してわれわれが使った平均値よりも大きく，L は高い次数で角速度に依存するので，角速度の小さな変化がこの 12 というかなり大きな因子をもたらす．したがって，相対論的な予言は

$$\mathrm{d}P/\mathrm{d}t = -2.4 \times 10^{-12} \tag{9.144}$$

$$= -7.2 \times 10^{-5}\,\mathrm{s} \cdot \mathrm{yr}^{-1} \tag{9.145}$$

となる．2004 年の観測値 (Weisberg と Taylor，2005) によれば

$$\mathrm{d}P/\mathrm{d}t = -(2.4184 \pm 0.0009) \times 10^{-12} \tag{9.146}$$

となっている．この効果は他の連星パルサーでも観測されている［Lorimer (2008)］.

9.5　天体物理的な重力波源

概　観　　物理学者と天文学者は，現在の検出器を使うとどのような重力波源が観測可能かを知るために多大の努力をしてきた．このことがなされた理由は，一つには，それらの検出器に投入される資金が正当なものかどうかを判断する必要性があることであり，また別の理由は，検出器の感度が，信号を雑音と区別するためには，予測される重力波の波形の精度に依存しているというものである．重力波源として可能性のある天体の物理を解説するのは，本書で扱う範囲を超えているが，重力波源の基本的な種類を概観し，それらに関して一般相対論がどのようにかかわるのかを学び，そうした重力波源を観測することがなぜ面白いことかを理解しておくことは有益なことであろう．ここでは，4 種類の重力波源について説明する．それは，連星系，自転している中性子星，重力崩壊する天体，そしてビッグバンである．

連星系　　式 (9.98) と式 (9.99) や 9.7 節の練習問題 29 で，連星系からの重力波の振幅をどのように計算するかを知った．これらの式を使うと，LISA で観測できる周波数領域で重力波を放出しており，LISA の装置雑音を超えた振

幅をもつと考えられる連星系が，われわれの銀河の中にはいくつかあることがわかっている．したがって，LISA が観測を開始するときには，科学者は，飛翔体が正常に作動していることを確認するためにも，そして基本的なレベルで一般相対論が正しいことの証拠を見つけるためにも，重力波の信号を探すことになるであろう．

しかし，地上の検出器では，ゆっくりと公転する連星系からの信号を探すことはない．その理由は，これまでに示した計算から明らかである．等質量の連星からの重力波の光度がどれくらいか（式 (9.136)），そして束縛エネルギーがいくらか（式 (9.139)）を計算した．この二つの関係を使って，ハルス–テイラーの連星パルサーの寿命を計算できる．ここでは，それを一般的にして，等質量の連星の場合の寿命を，恒星の質量 M と公転の周波数 $f = \omega/2\pi$ を使って書くと，

$$t_{gw} = -\frac{E}{L} = 7.44 \times 10^{-4} M^{-5/3} f^{-8/3} \tag{9.147}$$

$$= 2.43 \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-5/3} \left(\frac{f}{100\,\mathrm{Hz}}\right)^{8/3} \mathrm{s} \tag{9.148}$$

が得られる．第二の式から，太陽質量の恒星からなる連星系を LIGO で観測すると，たった数秒間だけしか観測できないことがわかる．その時間の間に，信号は周波数を増大させるが，その現象を重力波関係の科学者は「チャープ」とよぶ．地上の検出器で観測できる周波数領域では，公転周期の長い連星系は観測できない．地上の検出器は，二つの恒星が合体する最終段階でのらせん的落下（スパイラルイン）の過程を探すことになる．その過程で，バースト的な重力波を生み出すからである．中性子星の場合，合体は信号の周波数が 2 kHz ほどに達したときに起る．この周波数は，中性子星の状態方程式（次章参照）に強く依存する．連星が質量 $10M_{\odot}$ のブラックホールから構成されている場合，最終的な周波数はほぼ同じで，質量の逆数に比例する．アドバンスト LIGO や VIRGO の場合，1 年あたり数個の中性子星の合体を観測でき，ブラックホールの合体は予想が難しいが，中性子星の場合と同程度である可能性がある．

一般相対論の観点から特に面白いのは，ブラックホール連星の合体を観測することである．この過程は数値的に計算できるが，観測される波形と理論的に予想される波形とを比較することにより，重力場が最も強い領域で，一般相対

論を検証することになるからである．これはまたブラックホールを直接観測する唯一の方法でもある．ブラックホール連星や中性子星連星が1個のブラックホールに合体した場合，そのブラックホールはその歪みを重力波として放出し，なめらかなカー・ブラックホール（第11章参照）に落ち着くまでの短い間，振動するのである．その「リングダウン放射」は，中性子星や他の天体とは異なったブラックホール独自の信号を運ぶのである．

0.1 mHz から 10 mHZ の間の周波数で観測する LISA は，$10^6\,M_\odot$ 程度のブラックホールの合体過程を観測できる．第11章で説明するように，天文学者はそのような巨大ブラックホールが，われわれの天の川銀河を含め，たいていの銀河の中心部に存在していることを知っている [Merritt と Milosavljevic (2005)]．LISA は，第一世代の恒星や銀河の形成時までを含めて，宇宙のどこかで起るブラックホールの合体を観測できるだけの十分な感度をもっている．LISA による観測は，銀河自身の形成過程や初期宇宙での銀河の合体過程に関してさまざまな情報をもたらしてくれるであろう．

われわれがチャープを精度よく観測でき，信号の振動数の変化率からられせん状落下の時間尺度 τ を測定できたとすると，式 (9.147) から系の質量 M を知ることができる．LISA そのものや地上の検出器ネットワークと共同での観測をすると，重力波の円偏波の度合を測定できる．そこには，公転軌道の視線方向に対する傾きの情報が含まれており，重力波の観測振幅から，その系の傾きがゼロ（フェイスオン状態）である場合に放出される標準的な振幅を計算することができる．そのあとで，式 (9.98) に戻り，質量と振動数を残して l_0 を消去すると，ただ一つの未知量である重力波源までの距離 r の式となる．このことは連星系の質量が等質量でなくても成り立つのは驚くべきことで，チャープ状態の連星系からの信号には，重力波源までの距離を導くことのできる十分な情報が含まれているのである [Schutz (1986)]．重力波天文学者はそうした系を「標準サイレン」とよぶ．第12章で説明するが，光・赤外天文学では標準光源とよばれるものがあり，それを真似たものである．そこでわかるように，LISA によるブラックホール連星の重力波の観測は，天文学者が宇宙における大規模な運動を測定する際に役立つものなのである．

自転する中性子星　中性子星は重力崩壊で形成される高密度な恒星である．

次章で一般相対論的な天体として中性子星のことを説明する．ここでは，多くの中性子星がパルサーであり，それが自転しているために，自転のたびごとに電磁波のビームが地球にやってくることになるということだけを注意しておこう．多くのパルサーは 20 Hz 以上の周波数で高速に自転している．中性子星が重力波を放出していれば，それらは地上の検出器の観測可能な振動数領域にあることになる．原理的には，パルサーとして知られていない中性子星も高速で自転していることもありうる．中性子星からのビームが地球の方向を向いていないこともあるからである．そのうえ，電波によるパルサー探索は，われわれの銀河の中の太陽近傍を探しているだけである．今までに知られていない遠方のパルサーもあるであろう．

そうした恒星は自転軸のまわりで軸対称でなければ，重力波を放出できる．パルサーは，その放射をビーム状に出しているのだから，明らかに軸対称ではない．しかし，ビームをつくり出すのにどの程度の質量の非対称性が必要なのかはわからない．他の非対称性は中性子星の半固体の外層（「クラスト」とよばれる）や，あるかもしれない固体のコアに取り込まれた非対称性に起因するものである．また，自転する中性子星は，r–モード不安定性といわれる，重力波放出に伴う不安定性を引き起すことがあり，大量の放射をするかもしれない．式 (9.84)～(9.86) を使うと，質量の非対称性による放射を計算できる．恒星がほぼ軸対称であれば，自転軸に沿った方向に出される偏りのどちらのものの振幅も，

$$h \sim 2\varepsilon\Omega^2 I_{NS}/r$$

の形で近似することができる．ここで，I_{NS} は球対称な中性子星の慣性モーメントで，ε は自転軸のまわりの星の非対称性を表す．$I_{NS} = 10^{-38}\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，$r = 1\,\mathrm{kpc}(3\times 10^{22}\,\mathrm{cm})$，$\Omega = 2\pi f$ で，$f = 60\,\mathrm{Hz}$，$\varepsilon = 10^{-5}$ をとると，$h \sim 10^{-25}$ が得られる．この値は非常に小さいけれども，観測不可能なほど小さい振幅ではない．科学者は，長時間にわたりフィルターをかけながらデータを取得すること，つまり，本質的にはフーリエ変換をすることによって，そのような小さな信号であっても取得できると考えている．フーリエ変換は，信号のパワーを一周波数に集中させ，データの中の雑音を観測する全周波数領域に分散させるものである．アドバンスト LIGO の感度が 10^{-22} あたりの周波数の

広い幅の領域から，今ここで考えているような感度が 10^{-25} の狭い振動数幅へと移ると，データ解析をする人は波形の数を少なくともこの感度の比の 2 乗，つまり，10^6 倍程度扱わなくてはならなくなる．この振動数の場合，一日弱かかることになるだろう．

自転する中性子星が発見されるまでは，ε の値がどのくらいのものかはわからなかった．しかし，多くの観測されたパルサーに対して，電波の観測から制限をつけることができる．これまでに説明した連星中性子星の場合と同様に，放射を出すパルサーはエネルギーを失うからである．エネルギーの損失のため，パルサーの回転は遅くなる．ほとんどのパルサーはその自転が遅くなっていることがわかっており，その周期の時間変化率から，発生する可能性のある重力波の振幅に上限がつけられる．それは上限でしかない．というのは，回転を遅くする要因は，電磁波や粒子の放出といった別のものであって，重力波の放出の効果はほとんどないかもしれないからである．これまでに知られているパルサーから導かれる ε の上限は 10^{-3}～10^{-7} の範囲である．

したがって，重力波を放出するパルサーの観測は，数日ではなく数か月をかけてデータを取得することが望まれる．電波観測からパルサーの位置と周波数がわかっていると，データ取得はさほど難しくはない．しかし，重力波天文学者が未知のパルサーを求めて全天を捜索するとすると，計算量が莫大なものとなるのである．それは，パルサーの信号の見かけの振動数は，1 か月以上もの期間になると，地球の自転や公転の影響で強いドップラー効果を受け，しかもその変動はパルサーの天球上での位置に依存するからである．したがって，データを解析する人はフィルターをかけるために，たくさんの異なった位置を別々に探索しなくてはならないのである．現在のところ，既存の最高性能のコンピューターの能力を超えた問題なのである．重力波観測プロジェクトでは，Einstein Home というスクリーンセーバーの形をとって，一般の人々にこのデータ処理の一部を手助けしてもらっている．

重力崩壊　Joseph Weber が人類初のバー型重力波検出器を開発しようとしたとき，超新星爆発のさいの重力波をとらえるのが目的であった．超新星爆発の華々しい光の雄姿は内部で何が起っているかを隠してしまう．原子核反応によるエネルギー生成の原料の供給が止ってしまったとき，巨星の中の高密度

なコアは内向きに崩壊を始め，その結果，解放されたエネルギーの一部を，恒星の外層を吹き飛ばす爆発のエネルギーへと転換する．しかし，崩壊していくコアに何が起り，そのエネルギーがどのように爆発に転じるかは十分には理解できていない．コアを直接観測することができないからである．重力波とニュートリノだけが，コアから直接われわれのところにやってくるので，手がかりを与えてくれるのである．

予想される重力波の振幅はほとんどわかっていない．それは，コアの初期の回転や，崩壊のさいに生じる不安定性や，高密度物質の物理が未解明であること，などに強く依存するのである．コンピューターを使って崩壊をモデル計算することは難しく，これまでの予想はすべて近似的なものに限られている．しかしながら，重力波の振幅は，9.3 節のはじめにわれわれがしたオーダー評価よりずっと小さいという考えが一般的である．

そのうえ，現在のところ，詳細な波形を予想することができないので，データ解析において，連星系や自転中性子星の場合には可能であった検出器の雑音解析に踏み込むこともできない．こうした情況からすると，初めて観測される重力波が超新星爆発からのものである可能性は低いであろう．しかし，われわれの銀河の伴銀河である大マゼラン星雲で起きた超新星 1987A のような超新星がわれわれの銀河で起きることがあれば，この予想は覆されるかもしれない．

ビッグバンからの重力波　宇宙の大規模構造とその時間変化の研究は，宇宙論といわれ，第 12 章で扱われる．宇宙論は 1980 年代以降，莫大なデータの増加と初期宇宙で起ったことへの理解が進むことで，大変革を遂げてきている．その変革の一部は重力波の研究にも大きな影響を与えている．きわめて初期の宇宙は，重力波を生み出すランダムな波源であって，その重力波は今日も，他の重力波を観測する場合のバックグラウンドとして存在しているのである．

重力波は数え切れないほど多数の個別の事象から生み出される．それらの重力波は，重ね合せられて，観測器具から生じるランダムな雑音に非常によく似たものになっている．重力波が生成したときには強いものであったけれども，宇宙の膨張がそれを冷却してしまい，現在どのくらいの強度になっているかがわれわれには皆目見当がつかないのである．その強度は十分なもので，検出器の感度が向上すると，消し去ることのできない，そして全天で等方的になって

いる「雑音」として現れるであろう．まったく同様にして，Penzias (1979) と Wilson (1979) は，ベル研究所の電波受信機によって宇宙マイクロ波背景放射を発見したのである．その発見に対しては，ノーベル物理学賞が与えられている．

しかし，重力波の信号は，当分の間，検出器での観測には微弱すぎ雑音レベルよりも小さいであろう．それでは，どのようにして観測することができるのであろうか．その答は，重力波は 1 台の検出器にとってはランダムな雑音であるが，複数の検出器ではそのランダムさに相関があることに見いだされる．同一の場所にある 2 台の検出器はまったく同じ雑音を検出する．検出器からのアウトプットの相関をとる（単純に掛算をし，それの時間積分をする）と，二つの統計的に独立な雑音の相関から予想されるものに比べてずっと強い相関が得られるはずである．

実際，現在最も感度の高い検出器は二つの LIGO 検出器と VIRGO-GEO600 のペアの 2 組である．それらは十分に離れた場所に位置しているので，ランダムな波動の相関は完全ではないかもしれない．しかし，離れた距離よりも長い波長の重力波は十分に相関しており，バックグラウンドの重力波を探査する検出器として使用できるのである．

現在のところ，わかっている上限は 2 台の LIGO 検出器によるものであり，驚くべきほどのものではない．宇宙論研究者は，バックグラウンド重力波の強さを，それらの重力波のエネルギー密度が，宇宙にあるすべての物質のエネルギーを体積で平均した全エネルギー密度のどれくらいの割合であるかで表現している．現在の観測からわかっているのは，LIGO の観測可能領域で観測されたランダムな重力波のエネルギー密度は，全体のエネルギー密度の 10^{-5} 以下だということである．アドバンスト LIGO ならば，全体の 10^{-10} 程度の限界にまで近づけるのではないかと考えられている．

LISA もまたバックグラウンド重力波を観測できるであろう．その場合，バックグラウンドは検出器雑音よりも強くなくてはならない．相関をとることができないのである．しかし，LISA の感度は，その振動数領域ではきわめて高いので，全エネルギーの 10^{-10} 程度のバックグラウンドを観測することは可能であろうと考えられている．宇宙マイクロ波背景放射観測でも非常に低い振動数領域でこのバックグラウンド重力波を観測できるかもしれない．

パルサー・タイミングによる天体からの重力波観測により，ランダムなバックグラウンド重力波を観測できるかもしれない．しかし，そこで観測されるバックグラウンドは，宇宙論的なバックグラウンドよりも大きい可能性もある．それはつねに問題となることであって，宇宙が十分に静かで，ビッグバンからの重力波のささやきを直接聞かせてくれるのは，0.1 Hz よりも高い周波数領域だけなのかもしれない．

重力波観測の理論的な予測には大きな幅があり，10^{-15} より小さいというものから 10^{-8} より大きいというものまである．それは，初期のビッグバン時代の物理的情況や物理法則そのものの理論面での不定性に起因しており，バックグラウンドの重力波を測定することが，理論に制限をつけるのに重要であることを示している．ランダムな（確率的な）バックグラウンド重力波の観測こそが，重力波検出器による一番重要な観測といえるかもしれない．

9.6 文　　献

検出器についての Joseph Weber の初期の考察については，Weber (1961) をみよ．重力波検出器の研究によって刺激を受けた最も興味深い理論的発展の一つは，いわゆる“量子非破壊（quantum nondemolition）”検出器の構想である．これは棒に励起されるのがたった一つ，あるいは二つの量子（フォノン）だけのときでさえ，その状態を乱すことなしに，任意の精度で振動棒の励起を測定する方法である．Thorne ら (1979)，Caves ら (1980) をみよ．

波動方程式の詳しい議論は，この本の範囲を越えているが，たとえば Jackson (1975) などの多くの電磁気学の教科書で詳しく取り扱われている．重力波の簡単化した議論は，Schutz (1984) にある．Schutz と Ricci (2001) も参照．

重力波の観測は急速に進展している研究分野である．したがって，最新の情況を知りたい読者は，これまでにも参考文献としてあげてきた，誰でもアクセスできつねに最新のものに改訂されている雑誌，Living Review in Relativity にあるさまざまな論文から始めて，文献にあたることが必要である．Armstrong (2006)，Blanchet (2006)，二間瀬と伊藤 (2007)，Hough と Rowan (2000)，Will (2006)．重力波と相対論の応用に関するもっと一般向けの解説は Einstein

Online ウェブサイトにある：http://www.einstein-online.info/

検出器の現状を知るには各検出器のウェブサイトが最適である．

LIGO: http://www.ligo.caltech.edu/

GEO: http://geo600.aei.mpg.de/

LSC: http://www.ligo.org/

VIRGO: http://wwwcascina.virgo.infn.it/

LISA: http://www.lisa-science.org/

バー検出器に関しては，現在も稼働していて最後に残った共鳴型検出器のものが次のサイトにある．

Rome: http://www.roma1.infn.it/rog/

Auriga: http://www.auriga.lnl.infn.it/

大検出器のデータ解析にはコンピューターの膨大な計算が必要なので，それを手伝ってくれる読者がいれば，Einstein Home というスクリーンセーバーをダウンロードすることで，コンピューターのあいた時間を使ってデータ解析の一部を実行できることになる．すでに何十万台のコンピューターがこの解析に参加してくれている．以下のウェブサイトを参照．

http://einstein.phys.uwm.edu/

9.7 練 習 問 題

1　関数 $f(s)$ が微分 $f'(s) = \mathrm{d}f/\mathrm{d}s$ をもつ．$\partial f(k_\mu x^\mu)/\partial x^\nu = k_\nu f'(k_\mu x^\mu)$ を示せ．これを用いて式 (9.4) とその次の式を示せ．

2　ある固定した空間点 $\{x^i\}$ で式 (9.2) の実部と虚部は振動数 $\omega = k^0$ で時間的に正弦振動することを示せ．

3　$\bar{h}^{\alpha\beta}(t,\, x^i)$ を $\int \mathrm{d}x^\alpha |\bar{h}^{\mu\nu}|^2 < \infty$ の性質をもつ式 (9.1) の解とする．ここで積分は他の座標を固定して，x^α にわたってとる．次のように，$\bar{h}^{\alpha\beta}(t,\, x^i)$ のフーリエ変換を定義する．

$$\bar{H}^{\alpha\beta}(\omega,\, k^i) = \int \bar{h}^{\alpha\beta}(t,\, x^i) \exp(\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}k_j x^j) \mathrm{d}t\, \mathrm{d}^3x$$

式 (9.1) を変換することによって，$\bar{H}^{\alpha\beta}(\omega,\, k^i)$ は式 (9.10) を満たす ω と k^i の値以外でゼロとなることを示せ．逆変換を適用することによって，$\bar{h}^{\alpha\beta}(t,\, x^i)$ を平面波の重ね合せとして書け．

4　式 (9.16) と式 (9.17) を導け.

5　(a) $A^{(\mathrm{OLD})}_{\alpha\beta}$ がゲージ条件 $A^{\alpha\beta}k_\beta = 0$ を満たすなら，式 (9.17) で与えられる $A^{(\mathrm{NEW})}_{\alpha\beta}$ もそれを満たすことを示せ.

(b) $A^{(\mathrm{NEW})}_{\alpha\beta}$ に対して式 (9.18) を使い，B^μ を制限せよ.

(c) $A^{(\mathrm{NEW})}_{\alpha\beta}$ に対する式 (9.19) は自由な添字 α が 0 から 3 までの任意の値をとれるので，B^μ に四つの条件を課すようにみえるが，実際には三つの制限しか与えないことを示せ．特別の線形結合 $k^\alpha(A_{\alpha\beta}U^\beta)$ が任意の B^μ に対して消えることから，これを示せ.

(d) (b) と (c) を用いて，B^μ を k^μ，$A^{(\mathrm{OLD})}_{\alpha\beta}$，$U^\mu$ の関数として解け．これらが B^μ を決め，これ以上のゲージ自由度はない.

(e) 平面波の重ね合せが式 (9.18)，(9.19) を満たすように式 (9.15) で ξ^β を適当に選べることを示せ．したがって，これらの条件はどんな種類の重力波にも適用することができる.

(f) 静的な解，すなわち $\omega = 0$ の場合，式 (9.18)，(9.19) は達成できないことを示せ.

6　式 (9.21) を導いている段落で，省略されているすべての計算を補え.

7　式 (9.22)，式 (9.23) から TT ゲージではじめに静止していた自由粒子は静止し続けることが示されるが，そのより厳密な証明を与えよ.

8　式 (9.23) の後の議論で，自由粒子は加速度を**感じるか**?　たとえば，カップの中のスープ（カップの直径は波の波長に比べてはるかに短いとする）は，波が通り過ぎるとき，はね回るか?

9　式 (9.23) の後の議論で自由粒子は加速度を**みるか**?　これに答えるため，その相対固有距離が式 (9.24) で計算される二つの粒子を考える．そのうちの一つを原点とし，それからもう一つの粒子に向かって光のビームを送る．そのビームは，跳ね返ってもとの原点に戻るとする．光を出してから受け取りまでに経過する固有時間を計算せよ．(粒子間隔は重力波の波長に比べてはるかに小さいと仮定してよい.) この時間の変化を追うことによって，原点の粒子は二つの粒子の相対加速度を “みる” ことができる.

10　(a) A ($|A| \ll 1$) と ω を定数とすると

$$h_{yz} = A\sin\omega(t-x), \qquad \text{他のすべての } h_{\mu\nu} = 0$$

は，式 (9.1) と式 (9.11) の解である．このメトリックテンソルに対して，$R_{\alpha\beta\mu\nu}$ のすべての成分を計算し，そのいくつかはゼロでなく，したがって時空は平坦ではないことを示せ.

(b) 次式で与えられる別のメトリックを考える．

$$h_{yz} = A\sin\omega(t-x), \qquad h_{tt} = 2B(x-t)$$
$$h_{tx} = -B(x-t), \quad \text{他のすべての } h_{\mu\nu} = 0$$

これが場の方程式とゲージ条件を満たすことを示せ．

(c) (b) のメトリックについて，$R_{\alpha\beta\mu\nu}$ を計算せよ．それが (a) と同じになることを示せ．

(d) (c) から二つの幾何学は同じであり，メトリックの違いは座標の小さな違いによる．次式を満たす座標変換 ξ^μ を見つけよ．

$$h_{\mu\nu}(a) - h_{\mu\nu}(b) = -\xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$$

11 (a) 式 (9.27) を導け．

(b) 図 9.1 に示された円上のテスト粒子に対して式 (9.28a)，(9.28b) を解け．

12 式 (9.28) と式 (9.29) を導いた計算と同様な計算を行い，z 方向（波の進行方向）には粒子間隔は影響を受けないことを示せ．

13 バックグラウンドのローレンツ変換の一つは，x-y 面での x，y 軸の 45 度の回転である．(x,y) から (x',y') へのそのような回転で，$h^{\rm TT}_{x'y'} = h^{\rm TT}_{xx}$，$h^{\rm TT}_{x'x'} = -h^{\rm TT}_{xy}$ となることを示せ．これは図 9.1 にかなっている．

14 (a) 式 (9.21) で $A_{xy} = 0$ とした平面波のメトリックが

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + (1+h_+)\mathrm{d}x^2 + (1-h_+)\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{9.149}$$

になることを示せ．ここで $h_+ = A_{xx}\sin[\omega(t-z)]$ である．

(b) この波は，自由粒子が x 軸と y 軸を 2 等分する直線上に並んでいる場合には，その粒子間の固有距離を変えないことを示せ．

(c) 式 (9.21) で $A_{xx} = 0$ とした平面波のメトリックが

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + 2h_\times\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{9.150}$$

になることを示せ．ここで $h_\times = A_{xy}\sin[\omega(t-z)]$ である．

(d) (c) の波は，自由粒子が座標軸上に並んでいる場合には，その粒子間の固有距離を変えないことを示せ．

(e) (c) の波は (a) の波の変動を 45 度回転させた楕円的な変形をもたらすことを示せ．

15 (a) $h^{\rm TT}_{yy} = -h^{\rm TT}_{xx}$，$h^{\rm TT}_{xy} = \pm \mathrm{i}h^{\rm TT}_{xx}$ のとき波は x-y 面内で円偏りであるという．

そのような波に対して，図 9.1 の楕円はその形を変えることなく，回転することを示せ．

(b) a をある実数として，$h_{xy}^{\mathrm{TT}} = \pm \mathrm{i}ah_{xx}^{\mathrm{TT}}$，$h_{yy}^{\mathrm{TT}} = -h_{xx}^{\mathrm{TT}}$ のとき，波は x 軸と y 軸を主軸にもつ楕円偏りであるという．α をある複素数として，$h_{xy}^{\mathrm{TT}} = \alpha h_{xx}^{\mathrm{TT}}$（平面波の一般の場合）のとき，波が，軸 x，y を主軸にもつ楕円偏りとなるように新しい軸 x，y を見つけることができることを示せ．円偏りと線形偏りは楕円偏りの特別な場合であることを示せ．

16 TT ゲージで振幅 $A^{\mu\nu}$ と $B^{\mu\nu}$ をもつ二つの平面波は，$(A^{\mu\nu})^* B_{\mu\nu} = 0$ のとき，直交する偏りをもつという．ここで，$(A^{\mu\nu})^*$ は $A^{\mu\nu}$ の複素共役である．$A^{\mu\nu}$ と $B^{\mu\nu}$ が直交する偏りをもつとき，$B^{\mu\nu}$ を 45 度回転すると $A^{\mu\nu}$ に比例することを示せ．

17 式 (9.33)～(9.36) の座標 (t, x, y, z) から，式 (9.37) の局所慣性系への変換を見つけよ．これを用いて式（9.38）を確かめよ．

18 式 (9.39) を証明せよ．

19 式 (9.40) と式 (9.41) の和を用いて，ばねの重心は波が通り過ぎても静止したままでいることを示せ．

20 式 (9.43) から式 (9.44) を導け．次に式 (9.45) を証明せよ．

21 二つの質量を結ぶ線に対して任意の方向に進み，任意の楕円偏り（練習問題 15）をもつ平面波に対して式 (9.45) を一般化せよ．

22 式 (9.45) の検出器の重心での測地線の観点から，測地線偏差の方程式 (6.87) を考察せよ．式 (9.42) で定義したベクトル ξ は重心から質量の一つへの連結ベクトルの 2 倍であることを示せ．重心で測った潮汐力から直接，式 (9.45) が導かれることを示せ．

23 式 (9.48) と式 (9.49) を導き，$t = 0$ とした式 (9.45) で与えられる初期条件に対する式 (9.46) の一般解を求めよ．

24 式 (9.53) を証明せよ．

25 与えられた Q の定義から式 (9.56) を導け．

26 (a) + の偏りをもった平面波のメトリック，式 (9.58) を使って x 軸方向に運動している光子の座標速度（TT 座標系で）の 2 乗が

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{1 + h_+}$$

で与えられることを示せ．これは 1 とは等しくない．そのことは相対論を破るのであろうか．その理由も答えよ．

(b) 実験家が図 9.1 の粒子の円の中心にいて，x 軸上の座標 $x = L$ のところの円周上にある粒子に向かって光子を送り出す．そして，その光子は円周上の粒子のところ

で反射され，実験家のいる場所へ戻されるものとする．さらに，その実験は短い時間で終るので，実験をしている間に h_+ はほとんど変化しないとする．h_+ の 1 次のオーダーの範囲で，実験家が光子を放出した時間と戻ってきた光子を受け取った時間の間の固有時間が $(2+h_+)L$ であることを示せ．

(c) このことから実験家と粒子の間の固有距離が $(1+h_+/2)L$ であることがわかる，と実験家がいうとしよう．これは実験家の実感を正しく説明しているだろうか．もし，実験家が自分と粒子の位置の間を標準的なもの差しを使うといった別の測り方をしたとき，同じ値が得られるであろうか．その理由も答えよ．

(d) 実験家が同時に y 軸上で $y=L$ のところにある粒子を使った同じ実験をしたとすると，光子は $(2-h_+)L$ という固有時間が経過したときにもどってくることを示せ．

(e) この二つの往復時間の差は $2h_+L$ で，波の振幅を測定するのに使用できる．この結果は TT ゲージを使用していることに依存するのだろうか．別の言い方をすると，別の座標系を使用しても，同じ答を得られるのだろうか．

27 (a) 波が x–z 平面で z 軸と角度 θ をなして伝播する場合に，その平面波 h_+ の中を x 軸に沿って運動するビームの往復時間の変化の割合を与える，3 項で表される往復時間関係式 (9.63) を導け．

(b) L が重力波の波長に比べて小さい極限で，往復時間の微分が $t+\delta L$ の微分に等しいことを示せ．ここで，$\delta L = L\cos^2\theta\, h(t)$ は，L の固有距離の変化である．また，$\cos^2\theta$ というファクターが出てくる理由を説明せよ．

(c) (a) の 3 項表現で，重力波も x 軸に沿って伝播している場合 $(\theta=\pm\pi/2)$ の極限を調べよ．重力波と平行に移動する光に何が起るであろうか．

28 (a) 式 (9.68) を用いて式 (9.66) でやったように $\bar{h}_{\mu\nu}$ をつくり，波の位相一定の面が，$A_{\mu\nu}$ に対しては外向きに，$Z_{\mu\nu}$ に対しては内向きに動くことを示せ．

(b) 式 (9.69)～(9.71) で省略した計算を行え．

29 源の外の真空領域（すなわち，そこで $S_{\mu\nu}=0$）での式 (9.67) は，変数分離法によって解くことができる．$\bar{h}_{\mu\nu}$ が $\sum\limits_{lm} A^{lm}_{\mu\nu} f_l(r) Y_{lm}(\theta,\phi)/\sqrt{r}$ の形の解をもつと仮定する．ここで Y_{lm} は球面調和関数である．

(a) $f_l(r)$ は次の方程式を満たすことを示せ．

$$f_l'' + \frac{1}{r}f_l' + \left[\Omega^2 - \frac{(l+\frac{1}{2})^2}{r^2}\right] f_l = 0$$

(b) 最も一般的な球対称な解は式 (9.68) で与えられることを示せ．

(c) 変数 $s=\Omega r$ を代入して，f_l が次の方程式を満たすことを示せ．

$$s^2\frac{\mathrm{d}^2 f_l}{\mathrm{d}s^2}+s\frac{\mathrm{d}f_l}{\mathrm{d}s}+[s^2-(l+\frac{1}{2})^2]f_l=0 \tag{9.151}$$

この式はベッセル方程式として知られており，その解は次数 $l+\frac{1}{2}$ のベッセル関数とよばれる．その関数の性質は物理学のほとんどの教科書で説明されている．

(d) 式 (9.151) への代入によって，関数 $f_l/\sqrt{s}$ が次の球面ベッセル関数と球面ノイマン関数の線形結合であることを示せ．

$$j_l(s)=(-1)^l s^l\left(\frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)^l\left(\frac{\sin s}{s}\right) \tag{9.152}$$

$$n_l(s)=(-1)^{l+1} s^l\left(\frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)^l\left(\frac{\cos s}{s}\right) \tag{9.153}$$

(e) 式 (9.152) と式 (9.153) を用いて $s\gg 1$ に対する j_l と n_l は次のようにふるまうことを示せ．

$$j_l(s)\sim\frac{1}{s}\sin\left(s-\frac{l\pi}{2}\right) \tag{9.154}$$

$$n_l(s)\sim-\frac{1}{s}\cos\left(s-\frac{l\pi}{2}\right) \tag{9.155}$$

(f) 同様に，$s\ll 1$ に対するふるまいは次のように与えられることを示せ．

$$j_l(s)\sim s^l/(2l+1)!! \tag{9.156}$$

$$n_l(s)\sim-(2l-1)!!/s^{l+1} \tag{9.157}$$

ここで，m がたとえば奇数の場合

$$(m)!!=m(m-2)(m-4)\cdots 3\cdot 1 \tag{9.158}$$

(g) (e) から任意の l と m に対する式 (9.67) の外向き波の解は次のようになることを示せ．

$$(\bar{h}_{\mu\nu})_{lm}=A^{lm}_{\mu\nu}h^{(1)}_l(\Omega r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{9.159}$$

ここで，$h^{(1)}_l(\Omega r)$ は第一種の球面ハンケル関数とよばれるものである．

$$h^{(1)}_l(\Omega r)=j_l(\Omega r)+\mathrm{i}n_l(\Omega r) \tag{9.160}$$

(h) 積分を行う前に式 (9.67) に $j_l(r\Omega)Y^*_{lm}(\theta,\phi)$ を掛けて，式 (9.69)〜(9.74) の計算をやり直せ．そのようにして積分されたとき，式 (9.67) の左辺は次のようになることを示せ．

$$\varepsilon^2\left(j_l(\Omega\varepsilon)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}B_{\mu\nu}(\varepsilon)-B_{\mu\nu}(\varepsilon)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}j_l(\Omega\varepsilon)\right)$$

$\Omega\varepsilon\ll 1$ のとき，これは［$r=\varepsilon$ は源の外と仮定するから，上の式 (9.159) と式 (9.156)～(9.157) を用いて］単に $\mathrm{i}A^{lm}_{\mu\nu}/\Omega$ となることを示せ．同様にして式 (9.67) の右辺は同じ近似で $-16\pi\Omega^l\int T_{\mu\nu}r^lY^*_{lm}(\theta,\phi)\,\mathrm{d}^3x/(2l+1)!!$ となることを示せ．

(i) 次に解は式 (9.159) で

$$A^{lm}_{\mu\nu}=16\pi\mathrm{i}\Omega^{l+1}J^{lm}_{\mu\nu}/(2l+1)!! \tag{9.161}$$

としたものになることを示せ．ここで

$$J^{lm}_{\mu\nu}=\int T_{\mu\nu}r^lY^*_{lm}(\theta,\phi)\,\mathrm{d}^3x \tag{9.162}$$

(j) $l=0$ として，式 (9.73) と式 (9.74) を導け．

(k) ある l に対して $J^{lm}_{\mu\nu}\neq 0$ ならば，近似 $\Omega\varepsilon\ll 1$ によって無視した式 (9.161) の中の項は，$l+1$ に対する式 (9.161) の寄与の最も大きい項と同じオーダーになることを示せ．特に式 (9.72) で $J_{\mu\nu}\neq 0$ なら式 (9.74) よりも精度のよい解を求めるためには $l>0$ の項ばかりでなく式 (9.69) のような式 (9.74) の導出で無視した項も考慮に入れなければならない．

30　質量が $\{m_{(A)},\ A=1,\cdots,N\}$ でその位置が $\{x^i_{(A)}\}$ であるような N 個の離散的な点粒子の集合に対して式 (9.82a) を書き直せ．

31　次の質量分布に対する四重極テンソル I_{jk} とそのトレースフリーテンソル $\bar{I}_{jk}$［式 (9.87)］を計算せよ．

(a) 密度 $\rho(r,t)$ の球状の星．式 (9.82) で座標原点を星の中心にとる．

(b) (a) と同じ星．ただし，座標原点を任意の点にとる．

(c) 一様な密度 ρ で x，y，z 軸に向いた長さそれぞれ a，b，c の主軸をもつ楕円体．

(d) (c) の楕円体．ただし z 軸のまわりに角速度 ω で回転しているとする．

(e) 点 $(a,0,0)$，$(0,a,0)$，$(-a,0,0)$，$(0,-a,0)$ にある質量 m の四つの質点．

(f) (e) の四つの質点．ただしそのすべてが半径 a の円を角速度 ω で z 軸のまわりに反時計回りに動いているとする．

(g) 質量をもたないばねによって結びつけられている二つの質量 m の質点．各々の質点は距離 l_0 離れた平衡の位置のまわりに角振動数 ω，振幅 A で全体の重心を固定したまま振動しているものとする．

(h) ばね定数 k，平衡での長さ l_0 のばねで結びつけられている等しくない質量 m，M の二つの質点，ばねは振幅 $2A$（全体としてのばねののび），その自然振動数で（全

体の重心を固定したまま）振動している．

32 この問題で球面波に対して TT ゲージを適用する．

(a) 式 (9.83) を TT ゲージに変換するために，B^α を x^μ のゆっくり変化する関数として，ベクトル $\xi^\alpha = B^\alpha(x^\mu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega(r-t)}/r$ で生成されるゲージ変換を用いる．オーダー $1/r$ までの一般の変換則を見つけよ．

(b) 新しい $\bar{h}_{\alpha\beta}$ がオーダー $1/r$ で次の三つの条件を満たすことを要求する．$\bar{h}_{0\mu}=0$, $\bar{h}^\alpha{}_\alpha=0$, $\bar{h}_{\mu j}n^j=0$, ここで $n^j \equiv x^j/r$ は動径方向の単位ベクトルである．この要求とさらにオーダー $1/r$ で $\Box\xi^\alpha=0$ を満たすように B^α を見つけることができることを示せ．

(c) TT ゲージで式 (9.84)～(9.87) が成り立つことを示せ．

(d) 式 (9.103) を R で展開し，r^{-1} の項を落すことで，式 (9.104) で消去できなかった $\bar{h}_{0\mu}$ の高次の項が v^2 のオーダーのゲージ項であること，つまり式 (9.103) において $\bar{h}_{00}$ では時間の 2 階微分までで，h_{0j} では時間の 1 階微分までであることを示せ．

33 (a) n^j を三次元ユークリッド空間の単位ベクトルとする．$P^j{}_k=\delta^j_k - n^j n_k$ が n^j に直交する射影テンソルとなることを示せ．すなわち，任意の V^j に対して (i) $P^j{}_k V^k$ が n^j に直交すること，(ii) $P^j{}_k P^k{}_l V^l = P^j{}_k V^k$ を示す．

(b) 式 (9.84)～(9.86) の TT ゲージ $\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{ij}$ は次の式によって式 (9.83) のもとの $\bar{h}_{kl}$ と関係していることを示せ．

$$\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{ij} = P^k{}_i P^l{}_j \bar{h}_{kl} - \tfrac{1}{2}P_{ij}(P^{kl}\bar{h}_{kl}) \tag{9.163}$$

ここで n^j は z 方向を指している．

34 Ɨ_{ik} がトレースフリー，すなわち $\text{Ɨ}^l{}_l=0$ であることを示せ．

35 練習問題 31 の系に対して，x, y, z 軸に沿ったトランスバーストレースフリー四重極輻射場，式 (9.85)～(9.86) あるいは式 (9.163) を計算せよ．式 (9.91) を導いたときのように，x 軸と y 軸上で計算するとき，添字を適当に変化させることを忘れないようにせよ．

36 式 (9.163) を用いて，あるいは式 (9.85)～(9.86) で座標軸を回転させることにより，式 (9.88) の簡単な振動子から x 軸に対して角度 θ 方向に放射される輻射の振幅と偏りを表す楕円の向きを計算せよ．

37 式 (9.93) の ω と 2ω の項は質的に違っている．2ω の項は振動子の振幅 A のみによっており，ω の項は A と質量の間隔 l_0 の両方によっている．質量は l_0 の距離動くわけではないのに，なぜ l_0 が含まれるのか？ その答は輻射の原因が応力であり，応力はばねによって，l_0 の距離を伝達**される**からである．これをみるには，応力が大

きな距離にわたって運ばれないような系について似たような計算をしてみればよい．質量の二つのペアを考えよう．おのおののペアは質量 m と $M \gg m$ の二つの粒子からなり，各ペアの中の質量は自然振動数 ω をもつ短いばねで結びつけられているとする．ペアの重心はお互いに関して静止している．二つのばねは同じ振幅で，振動の中心は $l_0 \gg A$ だけ離れ，おのおのの質量 m を振幅 A で正弦振動させている．その振動は位相がずれているとする．練習問題 31（h）の計算を用いて，この系の輻射場は式 (9.93) で ω の項を含んでいないものとなることを示せ．この系と式 (9.93) の系の違いは，質量 m の運動を維持する応力が何に起因するかによると考えることができる．

38　連星の式 (9.98)〜(9.99) に対して，練習問題 36 と同じことを計算せよ．ただし線形偏りの向きではなく，楕円偏りの楕円の向きを見つける．

39　質量 m と M の二つの球状の星が x-y 面で楕円軌道を描いてお互いのまわりを回っている．その軌道は全エネルギー E と角運動量 L をもつとする．

（a）ニュートン重力を用いて重心のまわりの両方の星の軌道の式を求めよ．軌道周期 P，最短距離 a，離心率 e を E と L の関数として表せ．

（b）この系の $\text{I}\!\!\!-_{kj}$ を計算せよ．

（c）式 (9.106) から，x 軸と z 軸に沿った TT 輻射場を計算せよ．$m = M$ で円軌道のとき，その結果が式 (9.98)〜(9.99) になることを示せ．

40　式 (9.101) から球対称な運動は重力波を出さないことを示せ．

41　式 (9.114) から本文中で示唆された方法で式 (9.115) を導け．

42　(a). 式 (9.116) を導け．

(b) 式 (9.107) と式 (9.116) を重ね合せ, R が小さいと仮定することにより式 (9.117), 式 (9.118) を導け．

（c）本文に示された方法で式 (9.120) を導け．

43　重力波に対して平均化したストレス–エネルギーテンソルを次のように定義する．

$$T_{\alpha\beta} = \langle\!\langle \bar{h}^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu,\alpha} \bar{h}^{\mathrm{TT}\mu\nu}{}_{,\beta} \rangle\!\rangle / 32\pi \tag{9.164}$$

（ここで $\langle\!\langle \quad \rangle\!\rangle$ は 1 周期にわたる時間と，すべての方向に 1 波長にわたる空間の両方の平均操作を表す.）すると，式 (9.122) の流束 F は，その波の T^{0z} 成分となることを示せ．より詳しい議論から，もしこの平均が適当に定義されるなら，式 (9.164) は実際に任意の波束のストレス–エネルギーテンソルと見なすことが示される．これはアイサクソン（Isaacson）ストレス–エネルギーとよばれる．詳しいことは Misner ら (1973) をみよ．

44　（a）式 (9.123) から式 (9.125) を導け．

(b) 式 (9.125) から式 (9.127) を正当化せよ.

(c) 練習問題 33 (b) を用いて式 (9.122) から式 (9.127) を導け.

45 (a) 式 (9.128) の積分を考える. この積分を次の方法で行う.

(i) 対称性の観点から, $\int n^j n^k \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi$ は, δ^{jk} に比例しなければならないことを示せ.

(ii) $j = k = z$ の場合を計算することによって, その比例定数を決めよ.

(b) 式 (9.129) に対して同じ方法を適用せよ. まず積分が δ^{ij} にしかよらないことを議論し, 与えられた右辺のテンソルがその添字の任意の二つを交換しても値が変らないという対称性をもつ δ^{ij} だけからつくられる唯一のテンソルであることを示せ.

46 式 (9.124) と $\bar{I}_{ij}$ が対称であることから式 (9.130), (9.131) を導け.

47 (a) 粒子の角運動量は p_ϕ である. これから $x^i =$ 一定の面を横切る連続的な系の角運動量流束は $T_{i\phi}$ であることを示せ. このことと練習問題 43 を用いて源から放出された重力波の角運動量の z 成分 [これは式 (9.164) の $T_{r\phi}$ を大きな半径の球面にわたって積分したものである] が次のように与えられることを示せ.

$$F_J = -\tfrac{1}{5}(\ddot{\bar{I}}_{xl}\dddot{\bar{I}}_y{}^l - \ddot{\bar{I}}_{yl}\dddot{\bar{I}}_x{}^l) \tag{9.165}$$

(b) $\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu}$ が $\cos(\Omega t - m\phi)$ のように書けるなら, 放出されるエネルギーと角運動量の比は Ω/m となることを示せ.

48 式 (9.135) を計算せよ.

49 練習問題 39 の任意の連星系に対して次の問に答えよ.

(a) 1 周期にわたる平均のエネルギー損失率が次のようになることを示せ.

$$\langle \mathrm{d}E/\mathrm{d}t\rangle = -\frac{32}{5}\frac{\mu^2(m+M)^3}{a^5(1-e^2)^{7/2}}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right) \tag{9.166}$$

また問題練習 47 (a) から次式を示せ.

$$\langle \mathrm{d}L/\mathrm{d}t\rangle = -\frac{32}{5}\frac{\mu^2(m+M)^{5/2}}{a^{7/2}(1-e^2)^2}\left(1+\frac{7}{8}e^2\right) \tag{9.167}$$

ここで $\mu = mM/(m+M)$ は換算質量である.

(b) 次式を示せ.

$$\langle \mathrm{d}a/\mathrm{d}t\rangle = -\frac{64}{5}\frac{\mu(m+M)^2}{a^3(1-e^2)^{7/2}}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right) \tag{9.168}$$

$$\langle \mathrm{d}e/\mathrm{d}t\rangle = -\frac{304}{15}\frac{\mu(m+M)^2 e}{a^4(1-e^2)^{5/2}}\left(1+\frac{121}{304}e^2\right) \tag{9.169}$$

$$\langle \mathrm{d}P/\mathrm{d}t\rangle = -\frac{192\pi}{5}\frac{\mu(m+M)^{3/2}}{a^{5/2}(1-e^2)^{7/2}}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right) \tag{9.170}$$

(c) 式 (9.144) を確かめよ．[たとえ (a) ができなくても，(b) と (c) は行え．] これらの式は Peters (1964) によって最初に導かれた．

10
球 対 称 星

10.1 球対称時空の座標

一般相対論における強い重力場の最初の例として，球対称な系を考えよう．そうした系は非常に単純であるが，物理的には非常に重要である．天体物理での多くの重要な天体はほぼ球対称としてよいからである．この対称性を反映する座標系を選ぶことから始めよう．

球座標での平坦な空間　普通の座標系 (r, θ, ϕ) を定義すると，ミンコフスキー空間の線要素は

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2) \tag{10.1}$$

で表される．r と t の一定の各面は球面，もう少し正確にいうと，**二次元球**，あるいは二次元球面である．そうした球面上での曲線に沿った長さは，上記の式で $\mathrm{d}t = \mathrm{d}r = 0$ として与えられる．つまり

$$\mathrm{d}l^2 = r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2) \equiv r^2\,\mathrm{d}\Omega^2 \tag{10.2}$$

で，立体角の 2 乗 $\mathrm{d}\Omega^2$ がこの式で定義されている．このような球では円周の長さは $2\pi r$ で，面積は $4\pi r^2$ である．これは，それぞれ $\mathrm{d}\Omega^2$ の係数の平方根の 2π 倍と $\mathrm{d}\Omega^2$ の係数の 4π 倍である．逆に，線要素が式 (10.2) であって，その r^2 が θ と ϕ に依存しないような三次元面は内在的に二次元球の幾何学をもつ．

曲った時空での二次元球　時空が球対称であるという言い方を，もっと正確に述べることができる．それは，ある二次元球，つまりその線要素が

$$\mathrm{d}l^2 = f(r', t)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2) \tag{10.3}$$

で表される，ある二次元曲面上に，時空の各点があることを意味する．ここで，$f(r', t)$ は多様体の残りの座標 r' と t の関数でまだ決っていない．各球面の面積は $4\pi f(r', t)$ である．球的な幾何学の動径座標を $f(r', t) \equiv r^2$ で**定義する**．これは (r', t) から (r, t) への座標変換である．こうすると，$r =$ 一定，$t =$ 一定の任意の曲面は面積が $4\pi r^2$ で円周の長さが $2\pi r$ の二次元球となる．この座標 r を "曲率座標" とか "面積座標" という．それによって球の曲率半径と面積が定義されるからである．r と球の中心から表面までの固有な長さとの間に**先験的な関係はない**．この r は球そのものの性質のみによって定義されている．その "中心"（平坦な空間では $r = 0$）は球面上の点ではないのだから，時空が球対称であるということは，中心に点が**ある**ことさえも要求してはいない．そのことの二次元空間での簡単な例は，図 10.1 のように**円**は二次元空間内にあるけれど，その円の中心はその空間の中にないというものである．それは，2 枚の平面が "細い首" でつながった空間である．細い首の真中にある軸に関して，すべては対称になっている．しかし，軸上の点（円の "中心" であるが）はここに描かれた二次元面上にはない．しかし，ϕ を軸のまわりの角度とすると，各円上での線要素は $r^2\,\mathrm{d}\phi^2$ であり，r は各円につけた一定値である．この r が球対称時空で使うのと同種の座標である．

二次元球を $t =$ 一定の三次元空間にはりめぐらすこと　r と $r + \mathrm{d}r$ にある二つの球を考える．各球には座標系 (θ, ϕ) を考えるが，これまでのところ，それらの座標系の間に何の関係も要求しなかった．すなわち，r の球での極方向はある方向にとり，$r + \mathrm{d}r$ の球では別の方向にとることが可能である．はっきりしているのは，$\theta =$ 一定，$\phi =$ 一定の線が二次元球に**直交**していることである．そうした直線は定義から接ベクトル $\vec{e}_r$ をもつ．ベクトル $\vec{e}_\theta$，$\vec{e}_\phi$ は球上にあるので，$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\phi = 0$ となる．このことは $g_{r\theta} = g_{r\phi} = 0$ を意味する．［式 (3.3) と式 (3.21) を思い出せ．］これが球対称性から許される座標の定義である．したがって，メトリックとしては

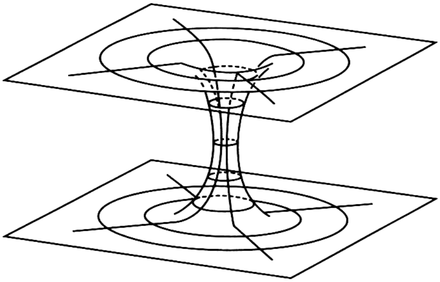


図 10.1 切り口が円形の首でつながった 2 枚の面．断面の円の中心のまわりに関する（軸）対称性があるが，断面の円の中心は二次元空間の内部にはない．

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}\,\mathrm{d}t^2 + 2g_{0r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t + 2g_{0\theta}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t + 2g_{0\phi}\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}t + g_{rr}\,\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2 \tag{10.4}$$

の形に限られる．

球対称時空　$t=$ 一定の空間だけでなく時空そのものが球対称なので，$r=$ 一定，$\theta=$ 一定，$\phi=$ 一定，の直線はやはり二次元球に垂直でなくてはならない．さもなければ，空間に特別な方向ができてしまうからである．このことから $\vec{e}_t$ が $\vec{e}_\theta$ と $\vec{e}_\phi$ に直交して，$g_{t\theta}=g_{t\phi}=0$ であることがいえる．したがって，

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}\,\mathrm{d}t^2 + 2g_{0r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t + g_{rr}\,\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2 \tag{10.5}$$

が得られる．これが球対称時空の一般的なメトリックで，g_{00}，g_{0r}，g_{rr} は r と t の関数である．これで座標系の自由度を使って最も簡単な形に直したことになる．

10.2　静的な球対称時空

メトリック　物理的に最も単純な状況は，振動していない星かブラックホールのような静的な系である．静的な時空とは次の二つの性質をもった時間座標 t の存在するものと**定義する**．(i) メトリックのすべての成分が t に依存しないこと．(ii) 時間の反転 $(t \to -t)$ に対して幾何学が変化しないこと．二番目の

条件は，状況を撮影したフィルムを逆回ししても同じにみえるという意味である．この時間反転の条件は，論理的にいって (i) には含まれていない．回転している星の例から明らかなように，時間反転は回転の方向を変えるけれど，メトリックの成分は時間的に不変であるからである．[性質 (i) を満たすが (ii) を必ずしも満たさない時空を**定常**という．]

条件 (ii) から次のことがわかる．座標変換 $(t,r,\theta,\phi) \to (-t,r,\theta,\phi)$ では $\Lambda^{\bar{0}}{}_0 = -1$，$\Lambda^{\bar{i}}{}_j = \delta^{\bar{i}}_j$ だから，

$$\left.\begin{aligned} g_{\bar{0}\bar{0}} &= (\Lambda^0{}_{\bar{0}})^2 g_{00} = g_{00} \\ g_{\bar{0}r} &= \Lambda^0{}_{\bar{0}}\Lambda^r{}_{\bar{r}} g_{0r} = -g_{0r} \\ g_{\bar{r}\bar{r}} &= (\Lambda^r{}_{\bar{r}})^2 g_{rr} = g_{rr} \end{aligned}\right\} \tag{10.6}$$

である．幾何学が不変 $(g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = g_{\alpha\beta})$ でなくてはならないので，$g_{0r} \equiv 0$ が得られる．したがって，**静的**で球対称的なメトリックは

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{e}^{2\Phi}\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{e}^{2\Lambda}\,\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2 \tag{10.7}$$

である．ただし，$g_{00}(r)$ と $g_{rr}(r)$ という未知の関数のかわりに，$\Phi(r)$ と $\Lambda(r)$ を導入した．この置き換えは $g_{00} < 0$ と $g_{rr} > 0$ がすべての点で成り立つ場合には可能である．のちにみるように，この条件は星の内部では成り立っているがブラックホールでは破れている．次の章でブラックホールを学ぶときには，座標系について注意して考えなくてはならなくなる．

束縛系である星を扱うときには，星から十分に離れたところで，時空の平坦性を要求してもよい．つまり，アインシュタイン方程式に対して，次の境界条件（漸近的正則条件）を課すことができる．

$$\lim_{r\to\infty} \Phi(r) = \lim_{r\to\infty} \Lambda(r) = 0 \tag{10.8}$$

この条件を課すことで，時空が漸近的に平坦となる．

メトリックに現れる項の物理的解釈　座標系を選択するにあたっては時空の物理的な対称性を考慮したので，メトリックの成分は物理的に有用な意味をもつ．ある半径 r_1 から別の半径 r_2 までの固有距離は

$$l_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{e}^{\Lambda}\,\mathrm{d}r \tag{10.9}$$

となる．これは考える曲線が $\mathrm{d}t=\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\phi=0$ となるものだからである．もっと重要なのは g_{00} の意味である．メトリックが t に依存しないので，7 章に述べたように測地線を運動する粒子は一定の運動量成分 p_0 をもち，それを定数 $-E$ と定義する．つまり，

$$p_0 \equiv -E \tag{10.10}$$

である．しかし，時空の半径 r の位置に（瞬時的に）静止した局所**慣性系**の観測者にとってのエネルギーは異なっている．その観測者の四元速度は $U^i=\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\tau=0$（瞬時的に静止しているから）であるので，条件 $\vec{U}\cdot\vec{U}=-1$ から $U^0=\mathrm{e}^{-\Phi}$ となる．観測されるエネルギーは

$$E^* = -\vec{U}\cdot\vec{p} = \mathrm{e}^{-\Phi}E \tag{10.11}$$

となる．したがって，一定の E で特徴づけられる測地線を動く粒子は，時空に静止した局所慣性系の観測者に対してはエネルギー $\mathrm{e}^{-\Phi}E$ をもつことになる．十分に遠方では $\mathrm{e}^{-\Phi}=1$ であるので，遠方にいる観測者が遠方にやってきた粒子を測定したとき，そのエネルギーが E であることがわかる．それを無限遠でのエネルギーという．無限遠以外では $\mathrm{e}^{-\Phi}>1$ であるので（これはのちに明らかになる），無限遠以外の場所にいる慣性系の観測者が，通過する粒子のエネルギーを測定すると，粒子はより大きなエネルギーをもつ．この余分なエネルギーは重力場を落下していくことで得た運動エネルギーである．このエネルギーについては，10.9 節の練習問題 3 で詳しく扱う．

このことは光子について特に重要である．r_1 の位置で放出された光子を十分遠方で受け取ると考えよう．局所慣性系での振動数を ν_{em}（それは光子の放出のプロセスで決っている．たとえば，線スペクトル）とすると，その局所的なエネルギーは $h\nu_{\mathrm{em}}$（h はプランク定数である）で，保存量 E は $h\nu_{\mathrm{em}}\exp[\Phi(r_1)]$ である．この光子が遠方の観測者に達したとき，観測される光子のエネルギーは E で，したがってその振動数は $E/h=\nu_{\mathrm{rec}}=\nu_{\mathrm{em}}\exp[\Phi(r_1)]$ となる．光子の**赤方偏移**を

$$z=\frac{\lambda_{\mathrm{rec}}-\lambda_{\mathrm{em}}}{\lambda_{\mathrm{em}}}=\frac{\nu_{\mathrm{em}}}{\nu_{\mathrm{rec}}}-1 \tag{10.12}$$

で定義すると，

◆
$$z=\mathrm{e}^{-\Phi(r_1)}-1 \tag{10.13}$$

のようになる．この重要な式によって，e^{Φ} に物理的な意味づけがされる．（この計算と 2 章での計算を比べてみよ．）

アインシュタイン・テンソル　　式 (10.7) で与えられるメトリックに対してはアインシュタイン・テンソルの成分が

$$G_{00} = \frac{1}{r^2}e^{2\Phi}\frac{d}{dr}[r(1-e^{-2\Lambda})] \tag{10.14}$$

$$G_{rr} = -\frac{1}{r^2}e^{2\Lambda}(1-e^{-2\Lambda}) + \frac{2}{r}\Phi' \tag{10.15}$$

$$G_{\theta\theta} = r^2e^{-2\Lambda}[\Phi'' + (\Phi')^2 + \Phi'/r - \Phi'\Lambda' - \Lambda'/r] \tag{10.16}$$

$$G_{\phi\phi} = \sin^2\theta\, G_{\theta\theta} \tag{10.17}$$

であることを示しうる．ここで，$\Phi' \equiv \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}r$ などを表している．これら以外の成分はすべてゼロである．

10.3　静的な完全流体を源とするアインシュタイン方程式

ストレス–エネルギーテンソル　　問題にするのは，流体が運動していない静的な星である．$\vec{U}$ のゼロでない成分はただ一つで U^0 である．さらに，規格化の条件

$$\vec{U}\cdot\vec{U} = -1 \tag{10.18}$$

から，前に示したように，

$$U^0 = e^{-\Phi}, \qquad U_0 = -e^{\Phi} \tag{10.19}$$

であることがわかる．したがって，$\mathbf{T}$ は式 (4.38) で与えられる成分をもち

$$T_{00} = \rho e^{2\Phi} \tag{10.20}$$

$$T_{rr} = pe^{2\Lambda} \tag{10.21}$$

$$T_{\theta\theta} = r^2p \tag{10.22}$$

$$T_{\phi\phi} = \sin^2\theta\, T_{\theta\theta} \tag{10.23}$$

となり，これら以外の成分はゼロである．

状態方程式　ストレス–エネルギーテンソルには p と ρ が含まれているが，これらは状態方程式で結びつけられている．局所的に熱平衡にある単純な流体では

$$p = p(\rho, S) \tag{10.24}$$

の形の関係がつねに成り立つ．これは圧力をエネルギー密度と比エントロピーの関数として与えるものである．しばしば扱うのはエントロピーが一定（特に，非常に小さい）であると考えられる情況で，そのときには

$$p = p(\rho) \tag{10.25}$$

となる．もちろん異なった流体では異なった関数形をしている．今後は何らかのこうした関係がつねに存在することを仮定していく．

運動方程式　保存則［式 (7.6)］は

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \tag{10.26}$$

である．これはフリーな添字 α の各値に対しての四つの式である．対称性からただ一つだけが恒等的にゼロにならない．その一つは $\alpha = r$ に対するもので，

◆
$$(\rho + p)\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} \tag{10.27}$$

と表される．この式からわかることは，重力場の影響 $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}r$ のなかで，流体を静的に保つためには，どれだけの圧力勾配が必要かということである．

アインシュタイン方程式　アインシュタイン方程式の $(0,0)$ 成分は式 (10.14) と式 (10.20) から求められる．ここでは $\Lambda(r)$ を

◆
$$m(r) \equiv \frac{1}{2}r(1 - \mathrm{e}^{-2\Lambda}) \tag{10.28}$$

で定義される未知の関数 $m(r)$ に置き換えると便利である．この式は，また

◆
$$g_{rr} = \mathrm{e}^{2\Lambda} = \frac{1}{1 - \dfrac{2m(r)}{r}} \tag{10.29}$$

を意味してもいる．こうして $(0,0)$ 成分の方程式は

◆
$$\frac{\mathrm{d}m(r)}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2 \rho \tag{10.30}$$

となる．これは $m(r)$ が半径 r の球の質量だとするニュートン的方程式と同じ形である．したがって，相対論でも $m(r)$ を質量関数とよぶが，一般相対論では全エネルギーをある領域のみに閉じ込められないので，r より内側の質量エネルギーと解釈することはできない．10.5 節でニュートン的アナロジーについてもう少ししらべる．

式 (10.15) と式 (10.21) から，(r, r) 成分の方程式は

◆
$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 \rho}{r[r - 2m(r)]} \tag{10.31}$$

の形にまとめられる．式 (10.25) のような状態方程式を使うと，式 (10.25), (10.27)，(10.30)，(10.31) が四つの未知量 Φ，m，ρ，p に対する四つの方程式となる．式 (10.24) のようなもっと一般的な状態方程式が必要なときには，S は完全に任意な関数である．(θ, θ) と (ϕ, ϕ) 成分のアインシュタイン方程式からは新しい情報は生れない．それは，(i) 式 (10.16)，(10.17)，(10.22)，(10.23) から明らかなように，二つの式は本質的には同じであり，(ii) ビアンキの恒等式からこの方程式が式 (10.26)，(10.30)，(10.31) を使って求められるのである．

10.4 外 部 時 空

シュワルツシルト・メトリック　　星の外側では $\rho = p = 0$ だから，方程式は

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} = 0 \tag{10.32}$$
$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = \frac{m}{r(r - 2m)} \tag{10.33}$$

の二つとなる．この方程式の解は，$r \to \infty$ で $\Phi \to 0$ を要求すると

$$m(r) = M = 一定 \tag{10.34}$$

$$\mathrm{e}^{2\Phi} = 1 - \frac{2M}{r} \tag{10.35}$$

となる．したがって，外部のメトリックは**シュワルツシルト・メトリック**とよ

ばれる

$$\blacklozenge \qquad \mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\dfrac{2M}{r}} + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2 \tag{10.36}$$

の形となる．r が大きいときには

$$\mathrm{d}s^2 \approx -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1+\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2 \tag{10.37}$$

となる．この式が

$$\mathrm{d}s^2 \approx -\left(1-\frac{2M}{R}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1+\frac{2M}{R}\right)(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2) \tag{10.38}$$

となる座標系 (x, y, z) を見つけることができる．ここで $R \equiv (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ である．これは全質量 M の星の遠距離場のメトリックであることがわかる［式 (8.60) 参照］．このことから式 (10.28) の定義と M という記号を使用することが正当化される．

メトリックの一般性　Misner ら (1973) の教科書のようなもっと一般的な扱いによって，**バーコフの定理**が証明される．それは，たとえメトリックが静的であるという仮定をはずしても，つまり式 (10.5) から出発しても，真空中のアインシュタイン方程式の球対称で無限遠で平坦になる解はシュワルツシルト解 (10.36) に限られるというものである．このことから，星が動径方向に振動したり崩壊していても，一定の質量 M に対する静的な外部メトリックとなるわけである．このことから導かれる一つの結論は，振動している球対称の系からは重力波が放出されないということである．（これと似たことは電磁気学にもある．“単極子” の電磁波はないことに対応する．）この結果は線形理論によって 9.7 節の練習問題 40 でしらべておいた．

10.5 星の内部構造

星の内部では，$\rho \neq 0$, $p \neq 0$ であるから，式 (10.27) を $(\rho+p)$ で割って，式 (10.31) を使って Φ を消去できる．その結果得られる式

$$\blacklozenge \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{(\rho+p)(m+4\pi r^3\rho)}{r(r-2m)} \tag{10.39}$$

をトールマン–オッペンハイマー–ヴォルコフ (T–O–V) 方程式という．$\mathrm{d}m/\mathrm{d}r$ に対する式 (10.30)，(10.25) のような状態方程式と合せて，m，ρ，p に対する三つの方程式となる．ここで Φ は二次的な意味しかもたず，ほかの量が求められたときに式 (10.27) から計算できる．

方程式の一般的解法　　二つの 1 階の微分方程式 (10.30)，(10.39) があるので，積分するには二つの定数が必要である．一つは $r=0$ での m の値，もう一つは $r=0$ での p の値である．$m(r=0)=0$ であることを示そう．半径 $r=\varepsilon$ の小さい球の円周は $2\pi\varepsilon$ で，その固有半径は $|g_{rr}|^{1/2}\varepsilon$ (線要素から) である．したがって，$r=0$ のまわりの小さな円では円周の長さと半径の比は $2\pi|g_{rr}|^{-1/2}$ となる．ところで，多様体の**任意の**点で局所的に平坦にするのは可能なことなので，時空が $r=0$ で局所的に平坦であれば，$r=0$ のまわりの小さな円では円周の長さと半径の比は 2π でなくてはならない．したがって，$g_{rr}(r=0)=1$ である．つまり，r がゼロに近づくと $m(r)$ もゼロに近づくが，それは r の近づき方よりも**もっと急速でなければならない**．もう一つの定数 $p(r=0)\equiv p_{\mathrm{c}}$ あるいは状態方程式から ρ_{c} によって星のモデルが決る．**ある状態方程式 $p=p(\rho)$ に対して，球対称で静的な星のモデルは，中心密度をパラメーターとした 1 パラメーター系列をなす**．この結果は，1 階の常微分方程式の解の一意性定理から生れる．

$m(r)$，$p(r)$，$\rho(r)$ がわかると，星の**表面**は $p=0$ なる点として定義される．[式 (10.39) により圧力は中心から外に向かって単調に減少する．] $p=0$ が表面になる理由は，p はあらゆる点で連続でなければならないからである．さもなければ，流体要素に無限の圧力勾配と無限の力が作用するからである．星の外部の真空中では $p=0$ だから，表面も $p=0$ でなければならない．したがって，内部解の積分はそこでやめ，外部のメトリックがシュワルツシルト・メトリックになることを要求する．表面の半径を R としよう．すると，幾何学的になめらかであるためには，メトリックは $r=R$ で連続でなくてはならない．星の内部では

$$g_{rr}=\left(1-\frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}$$

で，外部では

$$g_{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

である．連続性から定数 M は

$$M \equiv m(R) \tag{10.40}$$

で定義されることが明らかである．こうして遠方の軌道によって決定された星の全質量は，ニュートン理論と同じように

◆ $$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho \, \mathrm{d}r \tag{10.41}$$

のように積分で求められることがわかる．しかしながら，この類似性は誤解を招きやすい．積分は体積要素 $4\pi r^2 \, \mathrm{d}r$ についてであって，**固有**体積要素についてでは**ない**からである．$t =$ 一定の超曲面上の固有体積は

$$|-g|^{1/2} \, \mathrm{d}^3x = \mathrm{e}^{\Phi+\Lambda} r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \tag{10.42}$$

で与えられ，(θ, ϕ) の積分を行ってしまうと，$4\pi r^2 \mathrm{e}^{\Phi+\Lambda} \, \mathrm{d}r$ となる．したがって，M は単に流体要素の固有エネルギーの和というものでは決してない．固有体積と座標体積の違いは，全質量に寄与する“重力のポテンシャルエネルギー”がこれらの座標系に含まれているところにある．この点を詳しくしらべる必要はあるまい．このことから，相対論的な方程式にニュートン的な解釈をほどこすさいには注意が必要だということがわかる．

M がわかると，星の外部での g_{00} が定まり，星の表面での g_{00} は

$$g_{00}(r = R) = -\left(1 - \frac{2M}{R}\right) \tag{10.43}$$

から得られる．これが星の内部での Φ を定める残りの微分方程式 (10.27) の積分定数を与える．こうして，解がすべて求められる．

星の構造を解くにあたって，点 $r = 0$ が時空の点であることをはじめて仮定したことに注意してもらいたい．前に，そうしたことは必要ではないことを述べたし，内部解の**前の**議論ではそうした仮定はしなかった．ここでその仮定をしたのは，曲りがあるという点以外では，ユークリッド空間と大域的なトポロ

ジーが同じであるはずだと考えられる“ふつうの星”を扱いたいからである．しかし，シュワルツシルトの外部解の場合は $r = 0$ での仮定とは無関係で，ブラックホールを考えるときには，$r = 0$ が非常に異なっていることがわかるであろう．

ふつうの星の場合には $2m(r) < r$ がつねに成り立つことにも注意しておきたい．このことは，$r = 0$ で $m(r)/r \to 0$ が必要であることをすでにしらべたから，$r = 0$ の近傍では確かに正しい．ε は小さい量でしかも r が増大するにつれて減少するものとして，ある半径 r_1 の近くで $r - 2m(r) = \varepsilon$ となったとしよう．すると，T–O–V 方程式 (10.39) によって，圧力勾配は $1/\varepsilon$ の大きさの負の値であることになる．このことから，圧力を任意の有限な値から急速に減少させるため，ε がゼロになる**前**に圧力がゼロになってしまう．しかし，圧力がゼロになると星の表面に到達したことになる．表面の外側では m が一定で r は増大する．こうしてふつうの星の時空中では $m(r)$ は $r/2$ まで大きくなりえない．

ニュートン的な星の構造　内部解を求める前に，これらの方程式のニュートン的極限について簡単にふれておこう．ニュートン的な場合には，$p \ll \rho$ なので，$4\pi r^3 p \ll m$ でもある．さらに，メトリックはほぼ平坦なので，式 (10.29) で $m \ll r$ とできる．これらの関係から式 (10.39) が

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{\rho m}{r^2} \tag{10.44}$$

と簡単化される．これはニュートン的な星の平衡状態の方程式そのものである [Chandrasekahar (1939) 参照]．このことは，前に述べた m のもつ意味と ρ のニュートン的極限が質量密度であることを考えれば不思議なことではない．式 (10.44) とそのもともとの式 (10.39) とから，ニュートン的な場合に比べて，相対論的な効果は圧力勾配を急激にすることがわかる．言い換えれば，流体を静止させるためには，一般相対論ではニュートン重力より強い力がなくてはならない．大ざっぱにいうと，このことが強い重力を表現していると考えられる．極端な例が重力崩壊である．重力場が強すぎて，流体の圧力では支えきれなくなる．この崩壊については 10.7 節で詳しく議論する．

10.6　星の内部の厳密解

ニュートン理論でも，与えられた状態方程式に対して式 (10.30)，(10.44) を解析的に解くことは，たいへんに難しい．相対論的な式はもっとたいへんになる[1]．ここでは相対論的な方程式の二つの厳密解，一つは Schwarzschild によるものと，もう一つは Buchdahl (1981) が求めた解とについてしらべよう．

シュワルツシルトの密度一定の内部解　式 (10.30) と式 (10.39) を簡単に解くために，

$$\rho = \text{一定} \tag{10.45}$$

を仮定する．この式が状態方程式のかわりをする．もちろん，この仮定は物理的に正しいものではありえない，実際，音速は $(\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho)^{1/2}$ に比例するので，無限大になってしまう．しかしながら，高密度の中性子星の内部ではほぼ一様密度になっているので，方程式系を解く方法を示すという教育的な意味以外に，この解にはある程度の重要性がある．

式 (10.30) はすぐに積分できて，

$$m(r) = 4\pi\rho r^3/3, \qquad r \leqslant R \tag{10.46}$$

となる．ここで R は星の半径であって，まだ定められていない．R の外側では密度はゼロなので，$m(r)$ は一定となる．g_{rr} の連続性から $m(r)$ が R で連続でなくてはならない．このことから，

$$m(r) = 4\pi\rho R^3/3 \equiv M, \qquad r \geqslant R \tag{10.47}$$

であり，この定数を M で表し，シュワルツシルト質量という．

そうすると，T–O–V 方程式 (10.39)

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{4}{3}\pi r \frac{(\rho+p)(\rho+3p)}{1-8\pi r^2\rho/3} \tag{10.48}$$

1)　状態方程式を考えなければ，式 (10.44)，(10.39) を解くことは簡単である．たとえば，関数 $m(r)$ が任意に仮定できて，式 (10.30) から $\rho(r)$ が求められ，式 (10.44) あるいは式 (10.39) を p について解きうる可能性がある．そうして得られる二つの関数 $p(r)$ と $\rho(r)$ から r を消去して "状態方程式" $p = p(\rho)$ が得られる．この関係は物理的に現実を反映しているとはいえず，こうした方法で求められた厳密解は天体物理学者の求めるものではない．

を解くことができる．任意の中心圧力 p_c を使って容易に積分できて，

$$\frac{\rho+3p}{\rho+p}=\frac{\rho+3p_c}{\rho+p_c}\left(1-2\frac{m}{r}\right)^{1/2} \tag{10.49}$$

が得られる．この式から，

$$R^2=\frac{3}{8\pi\rho}[1-\{(\rho+p_c)/(\rho+3p_c)\}^2] \tag{10.50}$$

あるいは

$$p_c=\rho[1-(1-2M/R)^{1/2}]/[3(1-2M/R)^{1/2}-1] \tag{10.51}$$

であることがわかる．この式を使って式 (10.49) の p_c を置き換えると，

$$p=\rho\frac{(1-2Mr^2/R^3)^{1/2}-(1-2M/R)^{1/2}}{3(1-2M/R)^{1/2}-(1-2Mr^2/R^3)^{1/2}} \tag{10.52}$$

となる．式 (10.51) では $M/R\to 4/9$ のとき $p_c\to\infty$ となることに注意したい．これが，もっと一般的な星に対しても成り立つ，M/R についての一般的な上限であることがあとでわかる．

一様密度の場合については，式 (10.27) から Φ を求めれば完全に解けたことになる．ここで，R における Φ の値は g_{00} の連続性からわかっており，

$$g_{00}(R)=-(1-2M/R) \tag{10.53}$$

である．したがって，

$$\exp(\Phi)=\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{2M}{R}}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{2Mr^2}{R^3}},\qquad r\leqslant R \tag{10.54}$$

であることがわかる．Φ と m は r の単調増加関数で，p は単調減少であることに注意せよ．

ブハダールの内部解　Buchdahl (1981) は状態方程式

$$\rho=12(p_*p)^{1/2}-5p \tag{10.55}$$

について解を求めた．ここで，p_* は任意定数である．この式には物理的な裏づけは特にはないが，二つのうまい性質がある．(i) 局所的な音速 $(\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho)^{1/2}$ が

1 より小さくできて，星の内部すべての点で因果律を破らない．(ii) p が小さいときこの式は

$$\rho = 12(p_* p)^{1/2} \tag{10.56}$$

となり，これはニュートン理論の恒星内部構造論で $n = 1$ のポリトロープといわれるものになっている．$n = 1$ のポリトロープはニュートン理論で厳密に解ける数少ない場合の一つで（10.9 節練習問題 14 参照），ブハダールの解はその一般相対論的な拡張と考えられる．因果律の条件から

$$p < p_*, \qquad \rho < 7p_* \tag{10.57}$$

となる．

たいていの厳密解[2)]と同様にブハダールの解もふつうの方程式の形から導くことは難しい．この場合には，別の動径座標 r' が必要になる．この座標は，次に示す式 (10.59) で普通の r との関係が定義されるもので，その式には二番目の任意定数 β と，関数[3)]

$$u(r') \equiv \beta \frac{\sin Ar'}{Ar'}, \qquad A^2 \equiv \frac{288\pi p_*}{1-2\beta} \tag{10.58}$$

が含まれている．これを使って，

$$r(r') = r' \frac{1-\beta+u(r')}{1-2\beta} \tag{10.59}$$

と表される．解の求め方［Buchdahl (1981) 参照］を示すのはやめて，解を書き記すだけにしよう．式 (10.7) で定義したメトリック関数を使って，$Ar' \le \pi$ のとき，

$$\exp(2\Phi) = (1-2\beta)(1-\beta-u)(1-\beta+u)^{-1} \tag{10.60}$$

$$\exp(2\Lambda) = (1-2\beta)(1-\beta+u)(1-\beta-u)^{-1}(1-\beta+\beta\cos Ar')^{-2} \tag{10.61}$$

2) 厳密解とは，多項式や三角関数などの座標の単純な関数を使って書き表されるものである．そうした解を見つけるためには，うまい座標系，単純な幾何学，鋭い直感，さらにたいていの場合は好運といったものの積み重ねが必要である．厳密解についての最近の解説は Stefani ら (2003) をみよ．

3) Buchdahl はこれらに対して，別の記号を使っている．

$$p(r) = A^2(1-2\beta)u^2[8\pi(1-\beta+u)^2]^{-1} \tag{10.62}$$

$$\rho(r) = 2A^2(1-2\beta)u(1-\beta-\tfrac{3}{2}u)[8\pi(1-\beta+u)^2]^{-1} \tag{10.63}$$

となる．ここで $u = u(r')$ である．$u = 0$，つまり $r' = \pi/A \equiv R'$ で表面 $p = 0$ となる．この場所で

$$\exp(2\Phi) = \exp(-2\Lambda) = 1 - 2\beta \tag{10.64}$$

$$R \equiv r(R') = \pi(1-\beta)(1-2\beta)^{-1}A^{-1} \tag{10.65}$$

となっている．したがって，β は表面での M/R の値で，それは式 (10.13) からすると星の表面での赤方偏移と

$$z_{\mathrm{s}} = (1-2\beta)^{-1/2} - 1 \tag{10.66}$$

の関係で結ばれている．この系列のモデルの非相対論的極限は，明らかに $\beta \to 0$ の極限である．星の質量は

$$M = \frac{\pi\beta(1-\beta)}{(1-2\beta)A} = \left[\frac{\pi}{288p_*(1-2\beta)}\right]^{1/2}\beta(1-\beta) \tag{10.67}$$

と表される．

β のみが星の相対論的度合を与えるので，定数 p_*（または A）は単に全体的な大きさをスケールさせるパラメーターである．距離の単位を適当に選ぶことによって，任意の値をとることが可能である．したがって，モデルの構造に意味のある変化をもたらすのは β である．先に述べたように，β の下限はゼロである．その上限は因果律の制限 (10.57) と次のことから求められる．つまり，式 (10.62) と式 (10.63) によって，

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}u\left(1-\beta-\frac{3}{2}u\right)^{-1} \tag{10.68}$$

であって，その最大値は $r = 0$ の中心で

$$p_{\mathrm{c}}/\rho_{\mathrm{c}} = \beta(2-5\beta)^{-1} \tag{10.69}$$

となることである．この式の値が 1/7 より小さいことから

$$0 < \beta < \frac{1}{6} \tag{10.70}$$

が得られる．この範囲はニュートン $(\beta \approx 0)$ から非常に相対論的（表面での赤方偏移がほぼ 0.22）に至るまでの物理的に意味のあるモデルをカバーしている．

10.7　現実の星と重力崩壊

ブハダールの定理　前の節で，半径が $(9/4)M$ より小さい一様密度の星は存在しないことを示した．そのような星を静的な状態に支えるには無限大の圧力が必要になるためである．このことは**任意の**星のモデルについてもいえて，ブハダールの定理［Buchdahl (1959)］として知られている．半径が $R = 9M/4$ の星をつくったとして，それを内向きに（球対称的に）押したとする．その星は内向きに崩壊する以外にない．二度と静的な状態にはもどりえない．しかし崩壊している間，外部のメトリックはシュワルツシルト・メトリックである．したがって，崩壊の後には，外部はシュワルツシルトの真空解である．これがブラックホールのメトリックであり，次章で詳しく検討する．まずは，重力崩壊の原因についてしらべてみよう．

恒星質量程度のブラックホールの形成　ブラックホールを形成する可能性を現実的に評価するためには，星の進化の仕方を理解することから始めるべきであろう．ここでは簡単なあらすじを述べる．詳しくは 10.8 節の参考文献をみよ．

太陽のようなふつうの星の光度は中心核で起っている核反応，主として水素がヘリウムに変る反応によるものである．恒星はつねにエネルギーを放出しているので，静的に保つためにはそのエネルギーを補充する核反応が必要である．太陽は約 100 億年にわたって定常的に水素を燃焼していく．太陽よりも重い恒星は，その質量を支えるために中心核部分が太陽より高温高密であり，定常的な状態には数百万年しかとどまらない．原子核反応率の温度と密度依存性がきわめて高いからである．天文学者はその定常な状態を「主系列星」とよぶ．それらの恒星の表面温度と光度をグラフに描くと，恒星がグラフ上で幅の狭い領域に分布するからである．通常の恒星の温度と光度は恒星の質量で決っている．

しかし，中心核領域の水素がヘリウムに変ってしまうと，エネルギー源が消

え，恒星の中心核は蓄えたエネルギーをゆっくりと放出しながら収縮を始める．この収縮が中心核を圧縮しその温度を上昇させる．そのことは，自己重力系ではエネルギーを失うと温度が上昇するという面白い現象を引き起し，それは恒星の比熱が負であることを意味している．そうした系は熱力学的に不安定である．その不安定性の結果，恒星はついには崩壊してブラックホールになるか，以下にみるような量子力学的な力のような，非熱的な力によって支えられることになる．

収縮する中心核の温度はそのうち十分に高くなり，ヘリウムを炭素と酸素に変換するという別の核反応に火をつけ，エネルギーを放出し始める．原子核反応率は温度依存性が大きいので，恒星の光度が劇的に増大する．新たなエネルギー流束に対抗するため，恒星の外層は膨張せざるをえず，恒星は「コア・ハロー」構造を形成する．恒星の表面積は非常に大きくなるので，内部がきわめて高温であるにもかかわらず，表面温度は太陽の表面温度よりも低くなる．そのような恒星は，低い表面温度のために放出されるエネルギーの大部分が赤いスペクトル領域からのものとなり，赤色巨星とよばれる．赤色巨星の大きな光度のために，多くの赤色巨星では大部分の物質が吹き飛ばされ，質量を減少させる．そのような強い恒星風を伴う恒星は壮麗な「惑星状星雲」をつくり出し，天文写真のなかでも特に見栄えのするものとなる．

その後，恒星はヘリウムを消費しつくす．次に何が起きるかは，その時点で残された質量によって異なる．ある恒星はただ冷え始め，量子力学的な圧力（後述）によって永遠に支えられた白色矮星という小さな質量の恒星に収縮していく．あるいは，恒星の中心部分の温度が高い場合には，炭素をケイ素へ，ケイ素を鉄へと変換する核反応が続いて起きることもある．そうしてついには，星はエネルギーを使いつくす．なぜなら ^{56}Fe は一番安定な元素であって，鉄をほかの元素に変えるにはエネルギーを放出するどころか，かえって吸収しなくてはならないからである．その後の進化は，星の質量，回転，磁場そして化学組成の四つの量によって変る．

まず，ゆっくり回転している星を考える．このときには，回転はその構造にほとんど影響しない．太陽質量以下の星は白色矮星といわれる状態へとなめらかに進化していく．この星では，熱的な原因でなく量子力学的な原因による圧

力が支配している．量子力学的圧力については後にふれる．太陽のように比較的軽い質量の星で重要なのは，この量子論的な効果をしのいだり，進化の早い段階で急激な収縮を引き起すほどには，重力が強くないことである．より重い星でも水素燃焼をしている主系列段階を通過することは確かだが，その後に起ることは今でも完全には解明されてはいない．近接連星系の星では主系列を離れて赤色巨星に進化するときに大量の質量を相手の星に流入させるので，進化はもっと複雑になる．星が星風や相手の星へ流出することにより質量を大量に失うと，その後の進化は太陽の場合と同様に静かなものである．しかし，すべての星がこの道筋をたどるわけではなく，核反応のある段階で，十分に重い恒星の中心核の場合，量子力学的な圧力では重力を支えることができず，中心核は崩壊する．恒星が重すぎることがなければ（初期の質量が太陽質量の 15～20 倍程度の場合)，平均密度が原子核密度に達したとき，原子核の強い反発力で崩壊を止めることができるであろう．それによって落下してくる物質は跳ね返されて，II 型超新星とよばれる壮大な爆発へと転じる．（しかし，この跳ね返りの物理や崩壊するもののうちでどの程度が爆発に転じるかは，2010 年の時点ではわかっていない．）高密度な中心部は後述する中性子星として残される．初期の時点での恒星の質量がもっと大きい場合，コンピューター・シミュレーションによると，崩壊を妨げることができず，おそらくは γ 線バーストとよばれるある種の爆発を伴いながらも［Woosley と Bloom (2006)］，ブラックホールを形成する．これらのいわゆる “恒星質量程度の” ブラックホールは，それぞれのもとの恒星の質量に応じて，太陽質量の 5～60 倍の間の質量をもつであろう．そうしたブラックホールの多くは，次章で説明するように，われわれの銀河の中にある X 線連星を構成していることがわかっている．

この描像は回転や磁場によって大きく変えられるが，現在研究中である．回転は流れを引き起して，星の内部と外部を混合して主系列の進化を変えるかもしれない．崩壊の段階では，崩壊するコアの角運動量が保存するとすれば，回転はきわめて重要になる．しかし，強い磁場によって角運動量はコアから別の場所に輸送され，かなり球対称的な崩壊をさせるかもしれない．

恒星の組成も重要な問題である．最近形成された大部分の恒星は天文学者が種族 I とよぶ分類に属していて，太陽の組成に似た相対的な元素組成をしてい

る．種族 I は，前の世代の恒星進化とその恒星の超新星爆発でつくり出されたすべての元素を含んだ星間雲から生れる．しかしながら，第一世代の恒星（変な名前だが種族 III とよばれる）は水素とヘリウムのみから形成された．それらの元素だけがビッグバンで生み出されたからである（第 12 章参照）．それらの恒星ははるかに重く（太陽質量の数百倍），短時間で進化して重力崩壊し，天文学者が中間質量ブラックホールとよぶ，太陽質量の 100 倍から数千倍の質量をもつブラックホールを形成したのである［Miller と Colbert (2004)］．

中間質量ブラックホールという名前は，その質量が恒星質量ブラックホールと天文学者がふつうの銀河のほぼすべてのものの中心領域に発見してきている超大質量ブラックホールの質量の間にある質量だからである．それらについては次章で詳しく説明する．

量子力学的圧力　ここで，白色矮星や中性子星を支える力について初歩的な説明をしよう．電子が体積 V の箱の中にあるとする．ハイゼンベルクの不確定性原理より，その運動量は

$$\Delta p = hV^{-1/3} \tag{10.71}$$

の程度の大きさだけ不確定である．ここで，h はプランク定数である．運動量が p と $p+\mathrm{d}p$ の間にあるとき，運動量空間では体積 $4\pi p^2\,\mathrm{d}p$ の領域にあることになる．この領域の中に含まれる体積 $(\Delta p)^3$ の "細胞" の数は

$$N = 4\pi p^2\,\mathrm{d}p/(\Delta p)^3 = \frac{4\pi p^2\,\mathrm{d}p}{h^3}V \tag{10.72}$$

となる．電子の運動量を Δp より正確に定義することは不可能であるから，これが体積 V の箱の中にあって p と $p+\mathrm{d}p$ の間の運動量をもつことのできる状態の数である．さて，電子はフェルミ粒子で，2 個の粒子が同じ状態を占めることができないという性質をもつ．（このことが周期表の多様性とか，物質の固さや相対的な不浸透性を説明する．）電子はスピン 1/2 で，各運動量状態には二つのスピン状態（"上向き" と "下向き"）がある．したがって，全部で

$$V\frac{8\pi p^2\,\mathrm{d}p}{h^3} \tag{10.73}$$

個の状態があり，それが体積 V の箱の中にあって p と $p+\mathrm{d}p$ の間の運動量を

もつことのできる電子の**最大の**数である．

ここで，電子気体をできる限り冷却することを考えてみよう．つまり，各電子の運動量をできる限り減らすわけである．全体で N 個の電子があれば，$p=0$ からある上限値 p_{f} までの運動量状態をすべて埋めつくしたときに最も冷却されたことになる．ここで，p_{f} は

$$\frac{N}{V}=\int_0^{p_{\mathrm{f}}}\frac{8\pi p^2\,\mathrm{d}p}{h^3}=\frac{8\pi p_{\mathrm{f}}^3}{3h^3} \tag{10.74}$$

で定義される．N/V は粒子数密度だから，冷却した電子気体では

$$n=\frac{8\pi p_{\mathrm{f}}^3}{3h^3},\qquad p_{\mathrm{f}}=\left(\frac{3h^3}{8\pi}\right)^{1/3}n^{1/3} \tag{10.75}$$

の関係が成り立つことがわかる．p_{f} をフェルミ運動量という．フェルミ運動量は粒子の質量でなくて，単位体積あたりの粒子数にのみ依存していることに注意せよ．

各電子は質量 m，エネルギー $E=(p^2+m^2)^{1/2}$ をもっている．したがって，そうした気体中では全エネルギー密度が

$$\rho=\frac{E_{\mathrm{TOTAL}}}{V}=\int_0^{p_{\mathrm{f}}}\frac{8\pi p^2}{h^3}(m^2+p^2)^{1/2}\,\mathrm{d}p \tag{10.76}$$

となる．ここで扱っているのは閉じた系なので，圧力は式 (4.22) で ΔQ をゼロにして求めることができる．つまり，

$$p=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}(E_{\mathrm{TOTAL}})=-V\frac{8\pi p_{\mathrm{f}}^2}{h^3}(m^2+p_{\mathrm{f}}^2)^{1/2}\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{f}}}{\mathrm{d}V}-\rho$$

である．一定の粒子数 N なので，

$$V\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{f}}}{\mathrm{d}V}=-n\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{f}}}{\mathrm{d}n}=-\frac{1}{3}\left(\frac{3h^3}{8\pi}\right)^{1/3}n^{1/3}=-\frac{1}{3}p_{\mathrm{f}}$$

となって，

$$p=\left(\frac{8\pi}{3h^3}\right)p_{\mathrm{f}}^3(m^2+p_{\mathrm{f}}^2)^{1/2}-\rho \tag{10.77}$$

が得られる．非常に相対論的になった気体では $p_{\mathrm{f}}\gg m$（気体が小さな V に押しちぢめられたときこういう情況になるが）なので，

$$\rho \approx \frac{2\pi p_{\rm f}^4}{h^3} \tag{10.78}$$

$$p \approx \frac{1}{3}\rho \tag{10.79}$$

が得られる．これが“冷たい”電子気体の状態方程式である．したがって，最大限冷却されていても，気体の圧力は密度と同程度の大きさをもつ．4.10 節練習問題 22 によれば，式 (10.79) は光子気体で成り立つ関係でもあることがわかる．相対論的なフェルミ気体が光子気体のようにふるまうのは各電子のエネルギーが静止質量をはるかに超えていて，静止質量の寄与は小さく，ゼロとしてしまってもほとんど変りないからである．

白色矮星　ふつうの星が圧縮されると，電子が原子核からの束縛を受けなくなって，電子と原子核の 2 種類の気体が存在するようになる．それらの気体は同じ温度であり，粒子あたりのエネルギーが同じなので，質量の軽い電子のほうが粒子あたりでははるかに小さな運動量をもつ．圧縮されると，フェルミ運動量は電子の運動量と同程度になるまで上昇する［式 (10.75)］．すると実質的には冷たい電子気体となって，星を支える圧力を供給する．原子核の方は，$p_{\rm f}$ よりずっと大きな運動量をもつので，古典的な気体にとどまり，その圧力への寄与は小さい．一方では，電子に比べて中性子と陽子は数が多く，かつそれらはずっと重いので，重力のほとんどは原子核が及ぼす．したがって，ニュートン重力の（ここではニュートン重力を使うのが適当である）質量密度は

$$\rho = \mu m_{\rm p} n_{\rm e} \tag{10.80}$$

で，μ は電子数と核子数の比（1 か 2 程度の値），$m_{\rm p}$ は陽子の質量，$n_{\rm e}$ は電子の数密度である．電子が相対論的なときの気体全体の圧力と密度の関係は

$$\left.\begin{aligned} p &= k\rho^{4/3} \\ k &= \frac{2\pi}{3h^3}\left(\frac{3h^3}{8\pi\mu m_{\rm p}}\right)^{4/3} \end{aligned}\right\} \tag{10.81}$$

となる．ニュートン的な星の構造を決める式は

$$\left.\begin{aligned} \frac{{\rm d}m}{{\rm d}r} &= 4\pi r^2\rho \\ \frac{{\rm d}p}{{\rm d}r} &= -\rho\frac{m}{r^2} \end{aligned}\right\} \tag{10.82}$$

である．大きさの程度は，（質量 M，半径 R，密度の典型的な値が $\bar{\rho}$，圧力の典型的な値が $\bar{p}$ の星では）

$$\left.\begin{aligned} M &= R^3\bar{\rho} \\ \frac{\bar{p}}{R} &= \bar{\rho}\frac{M}{R^2} \end{aligned}\right\} \tag{10.83}$$

と考えられる．$\bar{p} = k\bar{\rho}^{4/3}$ とおくと，式 (10.81) から

$$k\bar{\rho}^{1/3} = \frac{M}{R} \tag{10.84}$$

が得られる．これと式 (10.83) から R を消去して，M について

$$M = \left(\frac{3k^3}{4\pi}\right)^{1/2} = \frac{1}{32\mu^2 m_{\mathrm{p}}^2}\left(\frac{6h^3}{\pi}\right)^{1/2} \tag{10.85}$$

という式が得られる．距離化単位を使うと（$\mu = 2$ として）

$$M = 0.47 \times 10^5\,\mathrm{cm} = 0.32M_{\odot} \tag{10.86}$$

となる．ここでの導き方からわかるように，この値は，重力が冷たい非相対論的な原子核気体に起因しているとき，相対論的な電子気体で支えうる最大質量のだいたいの目安を与えていると考えてよい．この値を**チャンドラセカール限界質量**とよび，式 (10.82) を積分して正確に計算すると，$M \approx 1.3M_{\odot}$ となる．この値より重い星は電子の圧力では支えきれず，白色矮星にはなりえない．実際，上限質量は中心密度が $10^{10}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ 程度ではより小さくなり，次に述べる不安定性から決ってくる．

中性子星　物質を白色矮星に典型的なもの ($\rho \lesssim 10^{10}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$) よりさらに圧縮すると，電子の運動エネルギーが非常に大きくなり，陽子と結合して中性子をつくると，エネルギーが解放されニュートリノによって運び去られることになる．したがって，圧縮していくと圧力を担っていた気体から電子が失われていく．圧力は急速には回復しないので，星は不安定となる．中心密度が $10^{16}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ になるまで，安定な星は存在しない．この密度では，電子は基本的にすべて陽子と結合して純粋な中性子気体を形成する．この気体もフェルミ気体なので，電子のときに導いたのと同じ量子的な状態方程式 (10.78)，(10.79) に従う．中性子星と白色矮星の違いは二つある．一つは，p_{f} を電子よりはるかに重い中性子

の典型的な運動量まで高めるには，ずっと高い密度にならなければならないことで，二番目はエネルギー密度が中性子自体によって担われることである．自己重力の源になるほかのイオンは存在しない．したがって，ここでは極度に圧縮されたところでの状態方程式は式 (10.79)，つまり

$$p = \frac{1}{3}\rho \tag{10.87}$$

となる．残念ながら，この場合には上限質量を与える単純な方法はない．相対論的な方程式（式 (10.30) と式 (10.39)）をすべて使用しなければならないからである．

実際のところ，中性子星物質は天文学者がいまだに解明できていない複雑でありながらも魅力的な物質状態である．高密度状態の縮退した中性子は，中性子星の内部の高温（10^6 K 以上）にもかかわらず超流動状態にある．中性子は粒子密度の小さい陽子と電子と化学平衡状態にあり，陽子は超伝導状態にある．そうした状態は，中性子星が，回転軸と必ずしも一致していない，しかもその関係が解明されていないきわめて強い磁場を生み出している理由を理解するのに重要であると考えられる．中性子星の中心では，密度がきわめて大きいので中性子が分解して，自由に運動しているクォークになっているかもしれない．そうした状態の場合，原子核理論家が原子核物質の状態方程式を計算することはきわめて難しいことがわかっている．物理状態が地上でできる実験の範囲を超えており，（強い相互作用である）核力の短距離力性や複雑性のために，状態方程式を得るには，何らかの近似と仮定をしなくてはならないのである．そこで，これまでに提唱された状態方程式は数多く，それらは異なった中性子星の構造を与えることになる [Lattimer と Prakash (2000)]．状態方程式によって中性子星の半径と質量の関係が変り，そのため中性子星の上限質量も異なってきて，$1.5M_\odot$ から $2.5M_\odot$ の範囲にあるとしかいえない．ある中性子星の半径と質量を観測できれば，この不定性の大部分が解消されるであろう．あるいは，われわれがたくさんの中性子星の質量を観測によって知ることができ，しかもそのなかに中性子星の上限質量のものがあると考えられる場合には，それもまた非常に意味をもつ．

中性子星は（前章で述べたように）最初はパルサーとして観測された．しか

し，X 線や γ 線放射の観測からパルスを出さない中性子星も知られるようになっている．恒星進化と中性子星形成の関係は十分に理解されているわけではないが，パルサーの研究から中性子星がしばしば超新星爆発のときに形成されることは明らかになっている．天文学者は数多くのパルサーが超新星残骸の位置にあることを明らかにすることができ，特に，若いパルサーの一つである PSR B0531+21 がかに星雲の真中にあることを示した．パルサーの運動の解析から，生れたときに $400\,\mathrm{km\cdot s^{-1}} \sim 1000\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ 程度の速度をもって「蹴り出された」と考えられている．この速度は，太陽が銀河中心のまわりを回っている速度である $200\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ や，恒星どうしの不規則運動の相対速度である数十 $\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ と比べてみるとよい．この「キック」は重力崩壊とそれに続く初期の爆発の非球対称性に起因している．

中性子星の構造を理解しようとする観点から最も関心を引かれるパルサーは連星系の中にあるものである．連星系では天文学者は軌道運動を使ってその質量を測定できたり，少なくとも質量に制限をつけることができる．いまでは正確な質量のわかった中性子星も多く，驚くべきことに，$1.4M_\odot$ のまわりに集中している [Lorimer (2008), Stairs (2003)]．しかしながら，中性子星のなかには $2M_\odot$ を超える質量をもっているものもあるようである．いくつかの連星系のなかの中性子星は，ブラックホールと同様に X 線源であり，相手の星からガスが流入している．そのガスの流入によって回転が速められ高速に回転する．現在までに知られている最高速のパルサーは PSR J1748-2446ad であり，そのスピンは 716 Hz である．

回転があると，原理的には，恒星の質量の上限を引き上げることができる (Stergioulas 2003)．その上限は回転に起因する不安定性が決めるために，その不安定性が作用し始めるまで高速化できる［Friedman と Schutz (1978), Andersson ら (1999), Kokkotas と Schmidt (1999)］．現実的には，その不安定性のために質量は球対称の場合の 1.5 倍以上にはならないであろう．

10.8 文　　献

ここで取り扱った球座標系はたいていの教科書と同じである．しかしこの方法は系統的でないので，ほかの対称性をもった場合へこの方法を一般化できるかどうかは明らかではない．もっと系統的に扱うには群論的方法を用いるとよい．これについては Stefani ら (2003) をみよ．

球対称で静的なメトリックよりも複雑なメトリックに対してリーマン・テンソルとアインシュタイン・テンソルを計算するのは時間のかかる面倒な仕事である．“Maple” や “Mathematica” といった最近の計算機による数式処理システムには自動的にテンソル計算をするパッケージが備えられている．手計算でこの計算を行う方法としてカルタンの素晴らしいやり方があり，Misner ら (1973) に書かれている．

球対称星の構造についての詳細な記述は Shapiro と Teukolsky (1983) になされている．星の構造を導くのに，星の表面での g_{00} と g_{rr} の連続性を使った．不連続面での正しい “接続条件” は Misner ら (1973) の本に詳しく述べられている．

文献中には，ほかにも圧縮性の星の厳密解がある．それについては，Stefani ら (2003) をみよ．

核燃焼の各段階を通じた恒星の進化はコンピューター・シミュレーションによって大きく発展してきた広大な研究領域である．しかし，まだ多くの問題が残されている．特に連星系をなす恒星の進化は，相互の作用がどのように影響するかが問題となっている．Hansen ら (2004) と Tayler (1994) がよい教科書である．

フェルミ気体の状態方程式のもっと厳密な導き方は，量子力学の教科書にある．白色矮星の上限質量の詳しい導き方は Chandrasekhar (1957) をみよ．また Shapiro と Teukolsky (1983) も参照．

白色矮星と中性子星の間の中心密度では星が存在できなくなるという不安定性については，Harrison ら (1965)，Shapiro と Teukolsky (1983)，Zel’dovich と Norikov (1971) などの本に述べられている．パルサーに関する解説として

は Lyne と Smith (1998) や Lorimer と Kramer (2004) がある．

ブラックホール形成の主要な道筋は重い恒星の中心部の崩壊であり，それが II 型の超新星爆発に至ると考えられている．その超新星爆発はまた重力波の発生源でもあるであろう．もっと重い恒星の崩壊はいわゆる極超新星（ハイパーノバ）と γ 線バーストを引き起すのであろう．最近の研究に関して本書を補うには，Höflich ら (2004) がある．最新の情報は，2 年ごとに開催されている相対論的天体物理学に関するテキサスシンポジウムの論文集を参照するとよい (Texas Symposium in Relativistic Astrophysics)．白色矮星の崩壊によって引き起される別の型の超新星は中性子星を生み出さない．Ia 型超新星を引き起すメカニズムについては宇宙論に関する第 12 章で説明する．

ウェブ上には，中性子星とブラックホール，そして X 線観測に関して多数の情報がある．読者はアインシュタイン・オンラインのウェブサイトにある初心者向けの解説を読むことができる．

(http://www.einstein-online.info/)

10.9 練 習 問 題

1 $\mathrm{d}s^2 = \eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta$ から出発して，座標変換 $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, $\theta = \arccos(z/r)$, $\phi = \arctan(y/x)$ によって，式 (10.1)，$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)$ となることを示せ．

2 式 (10.5) を導くのに，$\vec{e}_t$ が $\vec{e}_\theta$ と $\vec{e}_\phi$ に直交していなければ，メトリックには特別な方向ができると述べた．このことをみるのに，t と r を固定した回転では，$(g_{\theta t}, g_{\phi t})$ の組はベクトル場のように変換されることを示せ．それは球上全体にあるベクトル場を定義する．もしそれらがゼロでなければ，それらは球上全体にあるベクトル場を定義する．そのようなベクトル場では，ゼロでなければ球対称ではありえない．このことを説明せよ．6.4 節の最初に述べた球面上での平行移動の議論を考えてみるとよい．

3 式 (10.11) で与えられる，局所的に測定された粒子のエネルギーは，同じ粒子が同じ速度で観測者のところを運動するときの特殊相対論でのエネルギーに等しい．したがって，そのなかには時空の曲率といった重力に関する情報は含まれていない．式 (7.34) を参考にして，遅い粒子の弱い重力場の極限での E^* と E の差が重力のポテンシャルエネルギーであることを示せ．

4　6.9 節の練習問題 35 の結果を使って，式 (10.14)〜(10.17) の $G_{\mu\nu}$ の成分を計算せよ．

5　先に使った座標系で，静的な星では $U^r = U^\theta = U^\phi = 0$ であることを，変換 $t \to -t$ の結果がどうなるかを考えて証明せよ．

6　(a) 式 (10.18) から式 (10.19) を導け．

(b) 式 (4.37) から式 (10.20)〜(10.23) を導け．

7　状態方程式が $p = p(\rho, S)$ の形をしているとき，静的な星のモデルをどうつくるかを述べよ．このとき，$S(r)$ か $S(m(r))$ のようなもう一つの関係式が必要であることを示せ．

8　(a) 静的で球対称という仮定のために ${T^{\alpha\beta}}_{;\beta}$ は $\alpha = t$, θ, ϕ に対してはゼロになることを示せ．[式 (10.20)〜(10.23) から計算してはいけない．もっと簡単な説明を考えよ．]

(b) 式 (10.20)〜(10.23) から式 (10.27) を導け．

(c) 式 (10.14), (10.20), (10.29) から式 (10.30) を導け．

(d) 式 (10.31) を証明せよ．

(e) 式 (10.39) を導け．

9　(a) 新しい動径座標をシュワルツシルトの r を使って

$$r = \bar{r}(1 + M/2\bar{r})^2 \tag{10.88}$$

で定義する．$r \to \infty$ で $\bar{r} \to r$ となるが，地平線 $r = 2M$ では $\bar{r} = M/2$ となることに注意しよう．球対称なメトリックが

$$\mathrm{d}s^2 = -\left[\frac{1 - M/2\bar{r}}{1 + M/2\bar{r}}\right]^2 \mathrm{d}t^2 + \left[1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right]^4 [\mathrm{d}\bar{r}^2 + \bar{r}^2\,\mathrm{d}\Omega^2] \tag{10.89}$$

の形になることを示せ．

(b) 通常のように式 $x = \bar{r}\cos\phi\sin\theta$, $y = \bar{r}\sin\phi\sin\theta$, $z = \bar{r}\cos\theta$ によって，準デカルト座標を定義すると，(練習問題 1 のように)

$$\mathrm{d}\bar{r}^2 + \bar{r}^2\,\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

である．したがって，メトリックは等方座標といわれる (x, y, z) 座標に変換される．$\bar{r} \to \infty$ の極限をとり，

$$\mathrm{d}s^2 = -\left[1 - \frac{2M}{\bar{r}} + O\left(\frac{1}{\bar{r}^2}\right)\right]\mathrm{d}t^2 + \left[1 + \frac{2M}{\bar{r}} + O\left(\frac{1}{\bar{r}^2}\right)\right](\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)$$

であることを示せ．これによって，式 (10.38) が証明される．

10 一様密度の星について次の計算を行え.

(a) 式 (10.48) を積分して，式 (10.49) を求め，さらに式 (10.50)～(10.52)，(10.54) に至る計算を行え.

(b) $M = 1M_\odot = 1.47\,\mathrm{km}$ で $R = 1R_\odot = 7 \times 10^5\,\mathrm{km}$（太陽のような星）と $M = 1M_\odot$ で $R = 10\,\mathrm{km}$（典型的な中性子星）の場合に e^{Φ} を計算して星の中心から出た光の無限遠での赤方偏移を求めよ.

(c) $\rho = 10^{-11}\,\mathrm{m}^{-2}$ と $M = 0.5M_\odot$ として，R の値と表面と中心における e^{Φ} を計算し，表面から中心に達する光の赤方偏移を求めよ．密度 $10^{-11}\,\mathrm{m}^{-2}$ は $\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ ではいくらか?

11 式 (10.57) の条件を導け.

12 式 (10.60)～(10.63) が式 (10.14)～(10.17) と式 (10.20)～(10.23) で与えられるアインシュタイン方程式か，あるいは式 (10.27)，(10.30)，(10.39) の解になっていることを示せ.

13 式 (10.66) と式 (10.67) を導け.

14 指数 n のニュートン的ポリトロープは，ある定数 K を使って $p = K\rho^{(1+1/n)}$ で表される状態方程式をもち，式 (10.30) と式 (10.44) を満たす．ポリトロープについては Chandrasekhar (1957) に詳しい．ブハダールの状態方程式が $\rho \to 0$ のときに漸近する $n = 1$ の場合を考えよう.

(a) ρ が

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{2\pi}{K}\rho = 0 \tag{10.90}$$

を満たすことを示せ．またこの式の解は

$$\rho = \alpha u(r), \qquad u(r) = \frac{\sin Ar}{Ar}, \qquad A^2 = \frac{2\pi}{K}$$

となることも示せ．ここで α は任意定数である.

(b) ブハダールの解のニュートン的極限 ($\beta \to 0$) をしらべることで，ニュートン的定数 α と K がブハダールの定数 β と p_* とどう関係づけられるかを示せ.

(c) ニュートンの方程式から，$p(r)$，全質量 M，半径 R を求め，それらが式 (10.62)，(10.67)，(10.65) のニュートン極限に一致することを示せ.

15 ブハダールの解以上の現実的な星の構造を計算するには数値的に行うしかない．しかし，式 (10.39) では $r = 0$ で分母がゼロになってしまう．したがって，数値計算ではこの点を避けなくてはならない．一つの方法は，$r = 0$ 付近で式 (10.30)，(10.39) の解として

$$m(r) = \sum_j m_j r^j$$
$$p(r) = \sum_j p_j r^j \tag{10.91}$$
$$\rho(r) = \sum_j \rho_j r^j$$

のようにべき級数展開したものを求めることである．状態方程式 $p = p(\rho)$ が中心密度 ρ_c のまわりで

$$p = p(\rho_c) + (p_c\Gamma_c/\rho_c)(\rho - \rho_c) + \cdots \tag{10.92}$$

の形に展開でき，ここで Γ_c は ρ_c での断熱指数 $\mathrm{d}(\ln p)/\mathrm{d}(\ln \rho)$ であると仮定する．式 (10.90) の各展開で最初の 2 項までを求め，展開が 0.1%以上の誤差をもたないための最大の半径 r を求めよ．その半径でのべき展開の値を初期値として，数値積分を始めることができる．

16 (a) 10.7 節で導いた二つの簡単な状態方程式, $p = k\rho^{4/3}$ [式 (10.81)] と $p = \rho/3$ [式 (10.87)] はたいへんに異なったものである．最初の式には次元をもった任意定数 k を含むが，2 番目の式にはそうしたものはない．このことから 2 番目の状態方程式を使って求められる星のモデルのみが，ある定数 μ と ν を使って $\rho = \mu/r^2$，$m = \nu r$ という解をもちうることを示せ．そのさい重要なのは，長さの単位を変更することで $\rho(r)$ は任意の値をとりうるけれど，式の中にはそれ以外にそうした変更によって影響される定数はないことである．

(b) このことから，この形の唯一の解は $\mu = 3/(56\pi)$，$\nu = 3/14$ のものであることを示せ．この解は物理的には適当ではない．$r = 0$ で特異的になるし，表面がないからである．

(c) $r = 0$ で特異的でなく有限のところに表面のある解は存在するであろうか?

17 (この問題ではコンピューターか適当なメモリー付のプログラム可能な電卓が必要である.) k が式 (10.81) で与えられるとき，状態方程式が

$$p = \begin{cases} k\rho^{4/3}, & \rho \leqslant (27k^3)^{-1} \\ \frac{1}{3}\rho, & \rho \geqslant (27k^3)^{-1} \end{cases} \tag{10.93}$$

である星のモデルを数値的に計算せよ．これは現実の “固い” 中性子星の状態方程式の粗い近似になっている．ρ_c の値として，$\rho_c/\rho_* = 0.1$，0.8，1.2，2，5，10 の場合の系列を求めよ．ここで，$\rho_* = (27k^3)^{-1}$ とする．練習問題 15 で求めたべき展開を使って積分を始めよ．系列を追っていくと，質量や，M/R の値や，中心の赤方偏移の値が極限的に何かの値に近づくだろうか?

18 式 (10.80) の前に述べたように，原子核は圧力にほとんど寄与しないということが，いま考えている領域，つまり k をボルツマン定数［式 (10.81) の k と同じではない］として $m_e < p_f^2/3kT < m_p$ の範囲では正しいことを示せ．白色矮星の場合 $n \approx 10^{37}\,\mathrm{m}^{-3}$ として，この温度の範囲を求めよ．

19 太陽の赤道の回転速度は $2\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$ である．

(a) 回転が剛体的（一様角速度）で，太陽の密度が一定であるとして，角運動量を求めよ．実際の角速度は内部に向かって増大しているらしい．したがって，この値は太陽の角運動量の下限を与える．

(b) 太陽が質量と角運動量を保存しながら崩壊して中性子星の大きさ（たとえば，半径 10 km）になったとすると，剛体回転の角速度はいくらになるか?　非相対論的にいえば，赤道面上での遠心力はニュートン的な重力を上回るであろうか?

(c) $1M_\odot$ で半径 10 km の中性子星が 1 秒あたり 30 回の速さで回転している（典型的な若いパルサー）．ニュートン的な言い方では，赤道面上での遠心力と重力の比はいくらか?　このことからすると星はゆっくりと回転していることになる．

(d) $1M_\odot$ の主系列星が赤道面での典型的な強さ 1 gauss の双極子磁場をもっているとする．赤道面での磁束の保存を仮定して，この星が半径 10 km に崩壊したとすると磁場の強さはいくらになるか?（かに星雲のパルサーの磁場はだいたい 10^{11} gauss である．）

11
シュワルツシルト幾何学とブラックホール

11.1 シュワルツシルト時空での質点の運動

“シュワルツシルト幾何学” とは球対称な星の外側の真空な時空の幾何学である．それは質量 M という一つのパラメーターによって決定され，前章で発展させた座標系では次の線要素をもつ．

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \qquad (11.1)$$

これが重要なのは星の重力場であるばかりでなく，以下にみるように球対称ブラックホールの幾何学でもあるからである．このメトリックの物理的重要性を理解するため時間的測地線とヌル測地線（自由に運動している粒子と光子の経路）を注意深く研究していこう．

ニュートン重力におけるブラックホール　一般相対論的なブラックホールの説明を始める前に，ブラックホールの理論は本当のところはさほど奇妙なものではなく，ブラックホールと同じような天体が 2 世紀ほど前に想像されていたということを注意しておくのがよいであろう．ニュートン重力の一部である弱い等価原理に従えば，ある物体の重力場の中での運動は，粒子の位置と速度だけによって決り，その粒子の内部の組成によらない．ある粒子がある物体の重力場から逃げ去ることができるか否かは，速度だけで決められる．その粒子が運動を始めた場所で，粒子の速度がそこでの脱出速度を超えているかという

問題である．恒星のような球対称の天体の場合，脱出速度は物体の中心からどれだけ離れているかで決る．

さて，星がみえるのは光が星の表面から脱出できるからである．1700 年代の末までさかのぼると，イギリスの物理学者 John Michell とフランスの数学者であり物理学者であった Pierre Laplace が（独立に）脱出速度が光速を超える星があるかもしれないと考えた．その時代には，光は有限の速さで運動する粒子と考えられていた．Michell と Laplace は二人とも，自然界に太陽と同じ質量で太陽よりももっと半径の小さい天体があれば，その脱出速度は大きくなることを知っていた．したがって原理的には，半径を小さくすると，脱出速度が光速を超えることが可能になる．そうなると星は暗くなってみえなくなる．球対称の星の場合には，簡単な計算ですむ．エネルギー保存則により，質量 M，半径 R の恒星表面から放出された粒子は，（ニュートン的な場合の言葉でいうと）重力エネルギーと運動エネルギーが等しくなるときが脱出できるか否かの境目の状態である．

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{R} \tag{11.2}$$

この式で，$v = c$ とすると，星がみえなくなる大きさに対する次の条件が得られる．

$$R = \frac{2GM}{c^2} \tag{11.3}$$

驚くべきことだが，後に示すように，この関係式は一般相対論におけるブラックホールの半径とまったく同じなのである（11.2 節参照）．ところで，Michell も Laplace も太陽の質量と光速度の値を知っていて，この半径が極端に小さく数 km ほどになることがわかっていたので，彼らにとってはその計算は単なるお遊び程度のものでしかなかった．

今日では，これは単なるお遊びではない．光を閉じ込めてしまう程度の大きさの天体は，宇宙のそこかしこで発見されており，質量も太陽質量の数倍から 10^9～10^{10} 倍に至るまでさまざまである（詳細は後の 11.4 節を参照）．数 km 程度の大きさの天体というのは当時考えられたほどおかしなものではない．太陽質量の星の場合，現在の c と G の値を使うと，約 3 km となる．前章で，中

性子星がおそらくそれと同程度の質量をもっていて，その3倍程度の半径であることと，太陽質量の3倍以上の質量になるともはや支えられなくなることを知った．したがって，中性子星が大量の物質を降着させたり，二つの中性子星が合体したりすると（ハルス–テイラーの連星中性子星は 10^8 年たつと合体するはずである），中性子星よりももっとコンパクトな何ものかが必然的に形成される．そのうえ，もっと重いブラックホールを形成するのはもっとありうる話なのである．大きさが式(11.3)で与えられる天体の（ニュートン的な言葉での）平均密度を考えてみよう．それは

$$\overline{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3 M^2} \tag{11.4}$$

となる．この値は M^{-2} の依存性があるので，ブラックホールを形成するのに必要な平均密度は質量が大きなものほど小さくてすむ．$10^9 M_\odot$ の質量の天体は，密度が水の値にまで上昇しただけで，ニュートン的な「暗い星」になることを計算するのは簡単である．天文学者は，クェーサー（11.4節参照）を活動させていると考えられているブラックホールの典型的な質量がその程度であると思っている．したがって，そうした天体を形成するには特別変った物理を必要とするものではないのである．

ニュートン的な暗い星という昔の概念と本章でこれから説明する現代のブラックホールの概念には基本的なところで類似性があるが，大きな差も存在する．一番根本的には，Michell と Laplace の場合，星が暗いのは光が無限遠に脱出することができないからである．星はそこにあって，光を出して輝いている．光はつねに星の表面から放出されるのだが，空に向かって投げ出されたボールのように，光は最終的には重力によって引きもどされるのである．相対論では，後で示すように，光がブラックホールの「表面」から外へ出ることは決してない．そしてこの表面も重い天体の「端」ではなく，ブラックホールを形成する物質が避けることの絶対にできない崩壊を起した後に残される，何もない空間なのである．

保存量　われわれは相対論的なブラックホールの説明を質点の軌道をしらべることから始めよう．そうすることで最後には，光が捕捉されるか逃げ去ることができるかがわかるようになる．われわれは［式(7.29)とそこでの議論か

ら］時空がある対称性をもつときには，質点の軌道のそれに付随した運動量成分が保存することを学んだ，われわれが考えている時空は十分多くの対称性（時間に依存せず，球対称）をもつので，それらに対応した保存量の値によって軌道が完全に決定できることが以下でわかる．質量をもった“粒子”と質量をもたない“光子”を同時に取り扱っていこう．

メトリックが時間によらないことから，軌道上でエネルギー $-p_0$ は一定である．静止質量 $m \neq 0$ の粒子に対し，単位質量あたりのエネルギー $\tilde{E}$（比エネルギー）を定義し，光子についてはエネルギー E を使用する．

$$\text{粒子：}\quad \tilde{E} \equiv -p_0/m, \qquad \text{光子：}\quad E \equiv -p_0 \tag{11.5}$$

次にメトリックが対称軸まわりの角 ϕ によらないことから，角運動量 p_ϕ が一定となる．上と同様に質量をもつ粒子の比角運動量 $\tilde{L}$ と光子の角運動量 L を次のように定義する．

$$\text{粒子：}\quad \tilde{L} \equiv p_\phi/m, \qquad \text{光子：}\quad L \equiv p_\phi \tag{11.6}$$

球対称性から，運動はつねに一つの平面上に拘束され，その平面を赤道面に選ぶことができる．するとその軌道上で θ は一定 $(\theta = \pi/2)$ だから，$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\lambda = 0$，ここで λ は軌道上の任意のパラメーターである．p^θ はこの量に比例しているから，p^θ もまた消える．運動量の他の成分は

$$\begin{aligned}
\text{粒子：}p^0 &= g^{00}p_0 = m\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\tilde{E}\\
p^r &= m\mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau\\
p^\phi &= g^{\phi\phi}p_\phi = m\frac{1}{r^2}\tilde{L}
\end{aligned} \tag{11.7}$$

$$\begin{aligned}
\text{光子：}p^0 &= \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}E\\
p^r &= \mathrm{d}r/\mathrm{d}\lambda\\
p^\phi &= \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\lambda = L/r^2
\end{aligned} \tag{11.8}$$

光子の p^r に対する式は，アフィンパラメーター λ の**定義**と見なすべきである．これから方程式 $\vec{p}\cdot\vec{p} = -m^2$ は次のようになる．

粒子：

$$-m^2\tilde{E}^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}+m^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2+\frac{m^2\tilde{L}^2}{r^2}=-m^2 \tag{11.9}$$

光子：

$$-\tilde{E}^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2+\frac{L^2}{r^2}=0 \tag{11.10}$$

これらの式は次のように軌道の基本式を与える．

$$粒子：\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)=\tilde{E}^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) \tag{11.11}$$

$$光子：\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2=E^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{L^2}{r^2} \tag{11.12}$$

軌道のタイプ　上の両方の式は同じ一般形をしており，次のように有効ポテンシャルを定義する．

$$粒子：\quad \tilde{V}^2(r)=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) \tag{11.13}$$

$$光子：\quad V^2(r)=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{L^2}{r^2} \tag{11.14}$$

図 11.1 と図 11.2 にこれらの典型的な形を描き，その上のいくつかの点に名前をつけ，また可能な軌道を示した（破線）．式 (11.11)，(11.12) はともに，左辺が正またはゼロだから，軌道のエネルギーはポテンシャル V よりも小さくなってはならない．［ここと式 (11.17) までは，両者にまったく同様にあてはまるので，E と V は $\tilde{E}$, $\tilde{V}$ をも表すものとする．］したがって，与えられた E に対して軌跡のとりうる動径の範囲は V が E よりも小さい半径の範囲に制限される．たとえば（両方の図の）G で表された E の値をもつ軌道を考えてみよう．もしそれが $r=\infty$ からやってきたとすると，図の破線が V と交わる点 G より小さい r の領域には到達することができない．点 G を**転回点**という．点 G で，$E^2=V^2$ だから，式 (11.12) から $(\mathrm{d}r/\mathrm{d}\lambda)^2=0$ となる．同様の結論は式 (11.11) からも得られる．何が起るかをみるために，式 (11.11) と式 (11.12) を微分しよう．粒子に対して，

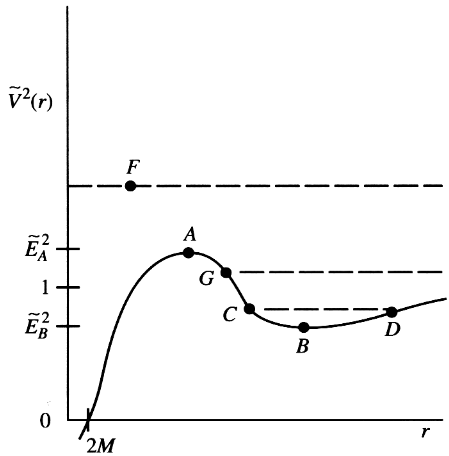


図 11.1　シュワルツシルト・メトリック中で，ある固定した角運動量をもつ，質量をもった粒子に対する典型的な有効ポテンシャル

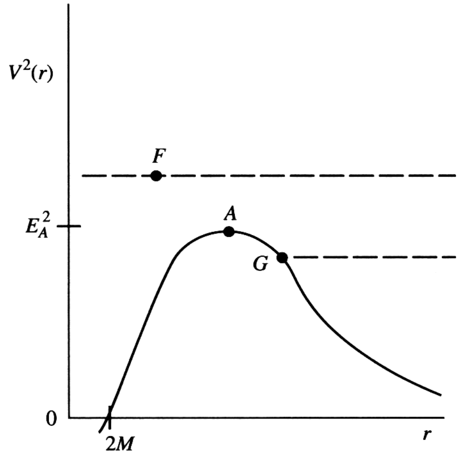


図 11.2　質量のない粒子に対する有効ポテンシャル

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \tilde{V}^2(r)$$

を τ に関して微分すると

$$2\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\tau^2}\right)=-\frac{\mathrm{d}\tilde{V}^2(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}$$

したがって

$$\text{粒子：}\quad \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\tau^2}=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\tilde{V}^2(r) \tag{11.15}$$

同様にして，光子に対する式は次のようになる．

$$\text{光子：}\quad \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\lambda^2}=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}V^2(r) \tag{11.16}$$

これらの式は，ニュートン方程式

$$m\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{\nabla}\phi$$

の相対論版である．ここで ϕ はある力のポテンシャルである．さて再び点 G に目を向けると，軌道の動径方向の加速度は外向きであり，したがって粒子（あるいは光子）はそこで最小の半径にきて，外向きに加速され向きを変えて $r=\infty$ にもどっていく．これは “双曲線” 軌道である．（ニュートン重力における完全な双曲線となる軌道との類推である．）

式 (11.15) あるいは式 (11.16) から明らかに円軌道 ($r=$ 一定) は V^2 の最大あるいは最小のところのみで可能である．図では，このことは点 A と B でのみ起る（光子に対しては，点 B は存在しない）．しかし式 (11.15) と式 (11.16) から，r の小さな変化は最大点から離れていくような加速度をもたらすので，その点は不安定である．したがって粒子の場合，図の $\tilde{L}$ の値に対して一つの安定な円軌道 (B) と一つの不安定な円軌道 (A) が存在する．光子の場合，この L の値に対して一つの不安定な円軌道だけが存在する．これらの r の値は次式から得られる．

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right)\right]$$

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{L^2}{r^2}\right]$$

その結果は，それぞれ

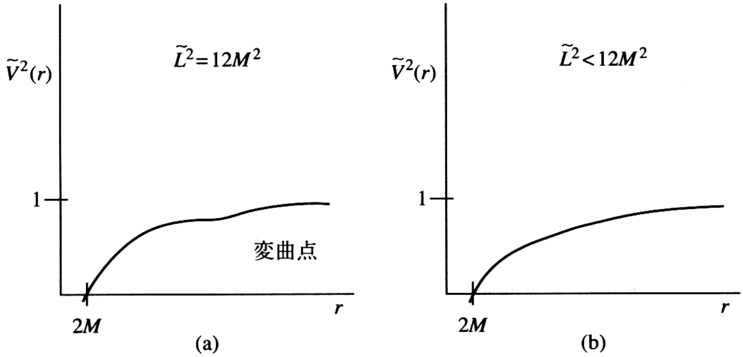


図 11.3　示された単位質量あたりの角運動量に対しての図 11.1 と同じ有効ポテンシャル

$$\text{粒子：}\quad r = \frac{\tilde{L}^2}{2M}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12M^2}{\tilde{L}^2}}\right) \tag{11.17}$$

$$\text{光子：}\quad r = 3M \tag{11.18}$$

粒子に対しては期待どおり二つの値がある．しかしそれは $\tilde{L}^2 > 12M^2$ のときだけであり，$\tilde{L}^2 = 12M^2$ のときには二つの半径は一致し，$\tilde{L}^2 < 12M^2$ なら解はまったく存在しない．このことは小さな $\tilde{L}$ に対して $\tilde{V}^2(r)$ の曲線の形が質的に変ってしまうことを意味している．図 11.3 に $\tilde{L}^2 = 12M^2$ と $\tilde{L}^2 < 12M^2$ の二つの場合を示す．粒子の円軌道が可能なためには最小の $\tilde{L}$ があるから，式 (11.17) で $\tilde{L}^2 = 12M^2$ として得られる最小の円軌道半径 r がある．

$$\text{粒子：} r_{\text{MIN}} = 6M \tag{11.19}$$

光子に対しては，L のいかんにかかわらず，不安定な円軌道はつねに同じ半径 $r = 3M$ になる．

最後に考える必要のある軌道は，図 11.1 と図 11.2 の点 F を通る線で与えられるエネルギーをもつものである．この直線はポテンシャル曲線と交わらないから，軌道は $r = 2M$ を通り抜けて決してもどってこない．11.7 節の練習問題 1 からそのような軌道に対して衝突パラメーター b は小さいことがわかる．それは $\tilde{L}$ を固定したとき，より小さな $\tilde{E}$ をもつ軌道の場合に比べて，もっと直

接にブラックホールにねらいを定めているのである．

もちろん考えている幾何学が星の場合，その半径 R は $2M$ より大きく，図 11.1〜11.3 のポテンシャルは R の外側でのみ正しい．粒子が R にとどくと，星とぶつかることになる．R/M の値によって，ある種の軌道だけが可能になる．

近日点移動　星のまわりで (安定な) 円軌道にある粒子 (あるいは惑星) は，軌道を完全に一回りして，周期 P とよばれるある決った座標時間の間に同じ点 (すなわち ϕ の同じ値) にもどってくる．この周期は次のようにして決めることができる．式 (11.17) から，半径 r の安定な円軌道は次の角運動量をもつ．

$$\tilde{L}^2 = \frac{Mr}{1 - \dfrac{3M}{r}} \tag{11.20}$$

円軌道では $\tilde{E}^2 = \tilde{V}^2$ だから，その軌道は次のエネルギーをもつ．

$$\tilde{E} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \bigg/ \left(1 - \frac{3M}{r}\right) \tag{11.21}$$

さて，

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} \equiv U^\phi = \frac{p^\phi}{m} = g^{\phi\phi}\frac{p_\phi}{m} = g^{\phi\phi}\tilde{L} = \frac{1}{r^2}\tilde{L} \tag{11.22}$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \equiv U^0 = \frac{p^0}{m} = g^{00}\frac{p_0}{m} = g^{00}(-\tilde{E}) = \frac{\tilde{E}}{1 - \dfrac{2M}{r}} \tag{11.23}$$

これから角速度が得られる．

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\phi} = \frac{\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{r^3}{M}\right)^{1/2} \tag{11.24}$$

周期，すなわち ϕ が 2π だけ変化するのに要する時間は，したがって

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{M}} \tag{11.25}$$

これはもちろん粒子の固有時間ではなく，座標時間である．（しかし，座標時間は粒子の遠方では固有時間と一致する．11.7 節の練習問題 7 をみよ．）偶然にもこれはニュートン重力での結果と一致している．

少しだけ円からずれた軌道は，その基準の円のまわりを内へ外へと振動してい

る．ニュートン重力では軌道は完全な楕円であり，その軌道は**閉じている**．すなわちある決った時間の後には，同じ点（同じ r と ϕ）にもどってくる．一般相対論ではそうならない．図 11.4 に典型的な軌道を示す．しかし相対論の効果が小さく，軌道がほぼ円のときには，相対論的軌道はほとんど閉じていなければならない．それはゆっくりとその中心のまわりを回転している楕円のようにみえるはずである．この軌道を記述する一つの方法は，星に最も近づく点，すなわち**近日点**（perihelion）に目をつけることである．[“peri” は最短を “helion” は太陽を意味する．任意の星のまわりの軌道の場合，“近星点”（periastron）がより適切な名前である．地球（“geo”）のまわりの軌道に対しては “近地点”（perigee）という．“peri” の反対は “ap” であり，最長距離を意味する．したがって軌道はどの天体のまわりを回るかによって，遠日点（aphelion），遠星点（apastron），遠地点（apogee）をもつ．特定の天体を指定しない一般の場合には短軸端と長軸端という.］近日点は星のまわりをある速度で回り，それが測定できると期待される．水星に対しては，実際に測定されており，1 世紀あたり 43″ という値が得られている．これを計算してみなければならない．他のすべての惑星は太陽からもっと離れており，それらの軌道に対するニュートン重力への相対論的補正ははるかに小さい．水星の近日点移動の測定はきわめて困難な仕事で，1800 年代にはじめて行われた．他の惑星による水星軌道の摂動など，その他の多くの影響により，実際に測定される移動は 1 世紀あたり約 5 600″ にもなる．そのうちの 43″ だけが，ニュートン重力では説明がつかず，アインシュタインが一般相対論によって正確にこの値を予言したことが，理論の正しさの最初の証拠となった．

この計算のために，まず粒子の軌道の式を求めることから始めよう．式 (11.11) から $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau$ がわかっている．これを式 (11.22) の $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\tau$ で割ると

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = \frac{\tilde{E}^2 - \left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)\left(1 + \dfrac{\tilde{L}^2}{r^2}\right)}{\tilde{L}^2/r^4} \tag{11.26}$$

次の量を定義すると便利である．

$$u \equiv 1/r \tag{11.27}$$

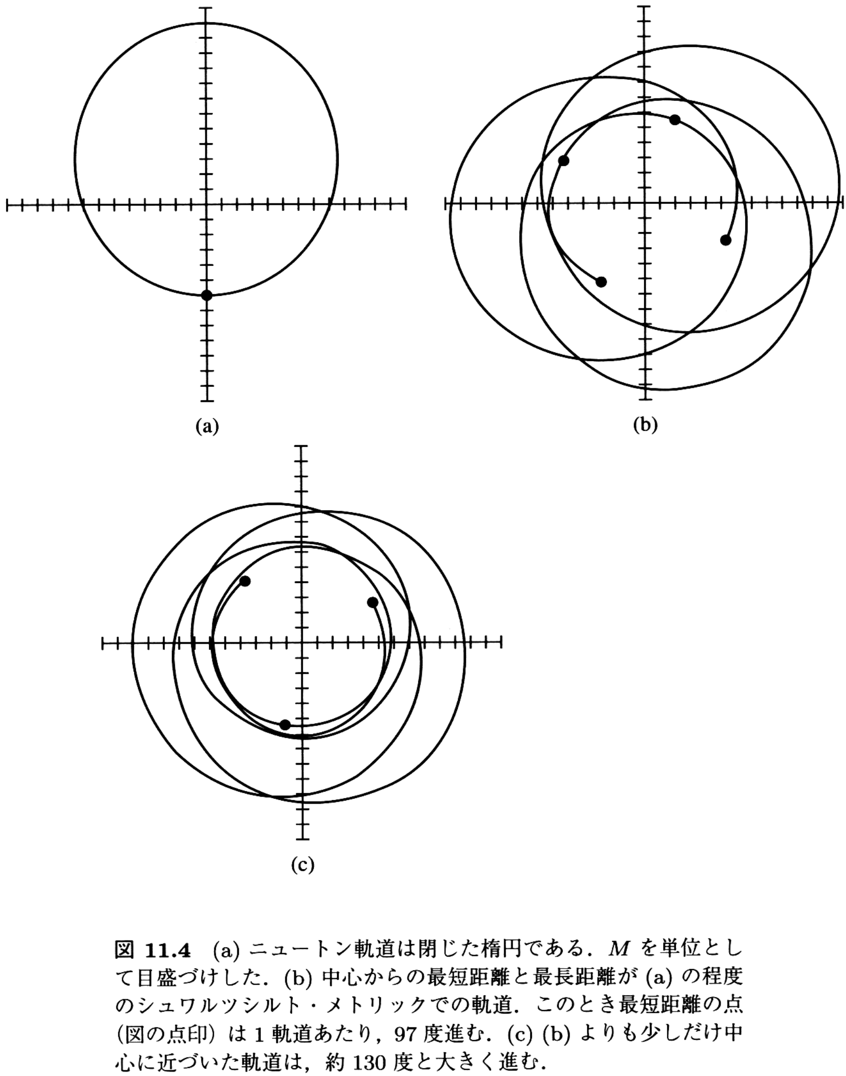


図 11.4 (a) ニュートン軌道は閉じた楕円である．M を単位として目盛づけした．(b) 中心からの最短距離と最長距離が (a) の程度のシュワルツシルト・メトリックでの軌道．このとき最短距離の点 (図の点印) は 1 軌道あたり，97 度進む．(c) (b) よりも少しだけ中心に近づいた軌道は，約 130 度と大きく進む．

これを使うと

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = \frac{\tilde{E}^2}{\tilde{L}^2} - (1-2Mu)\left(\frac{1}{\tilde{L}^2} + u^2\right) \tag{11.28}$$

ニュートン軌道はこの u^3 の項を無視することによって得られる（11.7 節の練習問題 11 参照）．

$$\text{ニュートン：}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = \frac{\tilde{E}^2}{\tilde{L}^2} - \frac{1}{\tilde{L}^2}(1-2Mu) - u^2 \tag{11.29}$$

ニュートン理論での円軌道は，$u = M/\tilde{L}^2$ [式 (11.17) の平方根を 1 ととる] をもつから，円からのずれを表す次の量を定義する．

$$y = u - \frac{M}{\tilde{L}^2} \tag{11.30}$$

すると次式が得られる．

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = \frac{\tilde{E}^2 - 1}{\tilde{L}^2} + \frac{M^2}{\tilde{L}^4} - y^2 \tag{11.31}$$

この式は次のとき満たされることが容易にわかる．

$$\text{ニュートン：}y = \left[\frac{\tilde{E}^2 + M^2/\tilde{L}^2 - 1}{\tilde{L}^2}\right]^{1/2} \cos(\phi + B) \tag{11.32}$$

ここで B は任意．これは明らかに周期的である．ϕ が 2π 進むと y，したがって r はもとの値に戻る．定数 B は単に軌道の最初の向きを指定する．われわれの目的にとって重要ではないが，r について解いてみると

$$\text{ニュートン：}\frac{1}{r} = \frac{M}{\tilde{L}^2} + \left[\frac{\tilde{E}^2 + M^2/\tilde{L}^2 - 1}{\tilde{L}^2}\right]^{1/2} \cos(\phi + B) \tag{11.33}$$

これは**楕円**の式である．

次に相対論的な場合を考え，前と同様に y を定義しよう．しかし今度は式 (11.28) で u^3 の項を無視するかわりに，軌道はほとんど円であるとする．すなわち y は小さいという仮定をおき，y^3 の項を無視する．すると

相対論的，ほぼ円軌道の場合

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = \frac{\tilde{E}^2 + M^2/\tilde{L}^2 - 1}{\tilde{L}^2} + \frac{2M^4}{\tilde{L}^6} + \frac{6M^3}{\tilde{L}^2}y + \left(\frac{6M^2}{\tilde{L}^2} - 1\right)y^2 \tag{11.34}$$

この式は右辺の最後の 2 項から 2 乗の項をつくることにより，式 (11.31) と同じ形にすることができる．その結果は

$$y = y_0 + A\cos(k\phi + B) \tag{11.35}$$

ここで B は任意，そして他の定数は次のように定義される．

$$
\begin{aligned}
k &= \left(1 - \frac{6M^2}{\tilde{L}^2}\right)^{1/2} \\
y_0 &= 3M^3/k^2\tilde{L}^2 \\
A &= \frac{1}{k}\left[\frac{\tilde{E}^2 + M^2/\tilde{L}^2 - 1}{\tilde{L}^2} + \frac{2M^4}{\tilde{L}^6} - y_0^2\right]^{1/2}
\end{aligned}
\tag{11.36}
$$

定数 y_0 が現れるのは，軌道が $y = 0$ $(u = M/\tilde{L}^2)$ ではなく，$y = y_0$ のまわりに振動することを意味している．式 (11.30) は一般相対論での円軌道に対する正しい半径を使っていない．振幅 A も少し違ってくるが，ここで最も面白いのは k が 1 でないことである．式 (11.35) から軌道は，$k\phi$ が 2π 進むと同じ r に戻る．したがって一つの近日点から次の近日点までの ϕ の変化は，次式で与えられる．

$$
\Delta\phi = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\left(1 - \frac{6M^2}{\tilde{L}^2}\right)^{-1/2} \tag{11.37}
$$

ほとんどニュートン軌道の場合，これは次のようになる．

$$
\Delta\phi \simeq 2\pi\left(1 + \frac{3M^2}{\tilde{L}^2}\right) \tag{11.38}
$$

一つの軌道から次の軌道までの近日点の進みは

$$
\Delta\phi = 6\pi M^2/\tilde{L}^2 \ \text{rad}\ （1\ 軌道あたり） \tag{11.39}
$$

この式で円からのずれは，すでに無視した項と同じオーダーの変化を与えるから，$\tilde{L}$ を r で表すために式 (11.20) を使うことができる．さらに非相対論的な星のまわりの軌道を考えるなら，式 (11.20) を次のように近似できる．

$$
\tilde{L}^2 = \frac{Mr}{1 - \dfrac{3M}{r}} \approx Mr
$$

したがって，

$$
\Delta\phi \approx 6\pi\frac{M}{r} \tag{11.40}
$$

水星の軌道の場合，$r = 5.55 \times 10^7\,\text{km}$，$M = 1M_\odot = 1.47\,\text{km}$，だから

$$(\Delta\phi)_{\text{Mercury}} = 4.99 \times 10^{-7}\ \text{rad}\ (1\,軌道あたり) \tag{11.41}$$

1 周期は，0.24 年だから

$$(\Delta\phi)_{\text{Mercury}} = 0.43''(1\,年あたり) = 43''(1\,世紀あたり) \tag{11.42}$$

連星パルサー　近星点移動が観測可能な他の系は，9.3 節で議論したハルス–テイラーの連星パルサー PSR B1913+16 である．この系は球対称星のまわりを回る「テスト粒子」ではなく，ほぼ等質量の恒星がお互いの共通重心のまわりを回っているが，近天体移動（いまの場合，近星点移動）が同じように起る．ハルス–テイラー連星系の二つの中性子星の平均間隔は 1.2×10^9 m，また $M = 1.4M_\odot = 2.07$ km より，式 (11.40) から大体の評価として，$\Delta\phi = 3.3 \times 10^{-5}$ rad（1 軌道あたり）$= 2^\circ.1$ (1 年あたり）が得られる．これは水星の場合よりはるかに容易に測ることができる．実際は，軌道の大きな離心率と二つの星がほぼ等しい質量をもつことを考慮に入れてより詳しい計算をすると，$4^\circ.2$ (1 年あたり）という値が得られる．

ここでの目的のため，われわれは星の既知の質量から近星点の移動量を計算した．しかし実際には 1 年あたり $4.2261^\circ \pm 0.0007$ という観測値が PSR B1913+16 連星系のなかの中性子星の質量を決めるデータの一つとなる．もう一つのデータは別の相対論的効果で，これは次の二つの効果からくる信号の赤方偏移である．その一つは特殊相対論的な“横ドップラー”効果であり，式 (2.39) の $O(v^2)$ の項である．もう一つはパルサーの軌道が楕円のため伴星の重力ポテンシャルの強いところへ行ったり弱いところに行ったりすることによる重力赤方偏移の変化である．これらの効果は観測では区別することはできないが，両者が一緒になった赤方偏移は星の質量によって決るもう一つの情報を与える．これと近星点移動そして軌道に対するニュートン的な質量関数を用いて両方の星の質量と軌道の傾きを決めることができる［Stairs (2003) 参照］．

PSR B1913+16 は，最初に発見された連星パルサーであるが，現在では天文学者は多数の連星パルサーを見つけている [Lorimer (2008), Stairs (2003)]．そのなかで最も目ざましいのは，二重パルサーとよばれる PSR J0737-3039 である．それは，連星の両方が電波パルサーである系として一番最初に発見されたものである［Kramer ら (2006)］．この系では，近星点移動が 1 年につき 17°

もある．両方のパルサーを追うことができるので，一般相対論が単純なニュートン的なものからどれだけずれるかを検証するのに最適な系なのである．

ポスト・ニュートン的重力　近星点移動は，ニュートン的な軌道運動に一般相対論がもたらす影響の一例である．式 (11.37) から式 (11.38) を導くとき，軌道がニュートン的なものに近いということを仮定し，微小量 $M^2/\tilde{L}^2$ に関してテイラー展開を行った．その量は式 (11.20) から $(M/r)(1-3M/r)$ であることがわかる．この量は粒子の軌道がブラックホールから遠く離れている場合，つまり $r \gg M$ のときには非常に小さいものである．したがって，ブラックホールから離れている場合には，その軌道はほとんどニュートン重力の場合の軌道で，近星点移動のような小さな補正項が現れるだけである．こうした軌道は，ニュートン重力の言葉でいえば，重力ポテンシャル M/r が小さい場合であり，そしてそれは粒子の運動速度が小さい場合でもある．運動速度は円軌道の場合，ポテンシャルと $v^2 = M/r$ で結びついている．極端に相対論的な天体であっても，遠方の重力はニュートンのものに近くなる．われわれは，近星点移動をポスト・ニュートン効果とよぶ．ニュートン重力での運動に対する，弱い重力場における遅い運動という極限での補正項のことである．

8.4 節で示したように，一般相対論の方程式に，場（そこでは h とよんだ）が弱くて速度が小さいという同じ極限を適用すると，ニュートン重力の場の方程式が導かれる．同じ近似での，アインシュタインの場の方程式の 1 次のポスト・ニュートン近似を保ちながら，近似を高次のオーダーに進めていくことができる．それを実行してみれば，以前に述べたように，近星点移動が軌道運動に共通して現れる特徴であることが示されるであろう．その節において，重力ポテンシャルが ϕ であるニュートン的な系を記述するメトリックが，ϕ の 1 次のオーダーで

$$\mathrm{d}s^2 = -(1+2\phi)\mathrm{d}t^2 + (1-2\phi)(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2) \tag{11.43}$$

の形になることを示した．比較のために，式 (11.2) で表されるシュワルツシルト・メトリックの弱い重力場の近似をとると，

$$\mathrm{d}s^2 \approx -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1+\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \tag{11.44}$$

となる．ここで，メトリック g_{rr} を展開し，M/r に関しての最低次の項を残した．この 2 組のメトリックは似ていて，g_{00} の項は一致している．しかし，まったく同じではなく，式 (11.43) の空間部分を通常の球座標に変換してみると，式 (11.44) の線要素の空間部分は

$$\mathrm{d}l^2 = \left(1 + \frac{2M}{r}\right)(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2) \tag{11.45}$$

となる（平坦な空間で，デカルト座標から球座標への変換を思い出したい読者は，式 (6.19) と 6.9 節の練習問題 28 を参照）．これが式 (11.44) と違うのは，シュワルツシルト・メトリックがニュートン極限を満たさないことを意味しているのであろうか．それは，そうではなくて，座標の影響が現れているのである．

線要素が式 (11.45) の形になる座標を等方座標とよぶ．x 方向，y 方向，z 方向のメトリックに違いがないからである．等方座標とシュワルツシルト座標とでは，動径座標の定義が異なっている．等方座標を $(t, \bar{r}, \theta, \phi)$ と書き，(t, θ, ϕ) はシュワルツシルト座標と同じであるとするとき，r が大きいところで，

$$\bar{r} = r - M \tag{11.46}$$

で与えられる変換をしてみる．M/r あるいは $M/\bar{r}$ の最低次までを考えると，式 (11.44) の $1 + 2M/r$ は $1 + 2M/\bar{r}$ となる．しかし，$\mathrm{d}\Omega^2$ の前にある r^2 の項は，（1 次のオーダーで）$\bar{r}^2(1 + 2M/\bar{r})$ となる．この単純な変換で，式 (11.44) の線要素が動径座標 $\bar{r}$ に関しての式 (11.45) に変るのである．こうして，シュワルツシルト解の遠方の場は式 (8.50) の形になることがわかる．

近星点移動以外にも，一般相対論のポスト・ニュートン効果は当然のことながらたくさんある．次の段落で光の曲りを説明する．この章のもっと後で，重力場の源が回転していることによる慣性系の引きずりに触れる（グラビトマグネ作用ともいわれる）．アインシュタイン方程式をさらに展開して，1 次のポスト・ニュートンよりも高次の，2 次のポスト・ニュートン，高次のポスト・ニュートン効果を求めることもできる．物理学者はそのような展開に関する研究を行ってきている．そうすることによって，中性子星やブラックホールがらせん軌道を描きながら落下していく運動を正確に予測することができ，それはその過程で放出される重力波を検出するために有用なのである．

ポスト・ニュートン近似では，重力場が弱いだけでなく運動が遅いことも仮定される．このことは，惑星のニュートン的運動（ケプラー運動）がメトリックの g_{00} 成分だけで決ることを意味する．なぜなら，粒子の世界線に沿って経過する固有時間間隔の計算には，粒子の空間的な距離の変化（たとえば，$\mathrm{d}r$ とする）は，$\mathrm{d}r/\mathrm{d}t \ll 1$ なので，時間の変化 $\mathrm{d}t$ に比べずっと小さいからである．g_{00} はまた重力赤方偏移にも関係していたことを思い出してほしい．そのため，ニュートン重力は重力赤方偏移と同じであり，一方を知れば他方がわかるのである．ニュートン重力は，時空のなかの時間の歪みそのものから生み出されるのである．空間の歪みはポスト・ニュートン補正のレベルで初めて現れるものである．

重力による光の屈折　光子はニュートン重力では有界な軌道をもたないので，前節では粒子のみを取り扱った．この節で光子に対する同様の効果を考えよう．光子の直線軌道は重力場を通るとき曲げられる．歴史的にはこれが最初に予言された一般相対論的効果であり，1919 年の日食で確かめられたことが，アインシュタインの名を世界的に有名にした［McCrea (1979) 参照］．ドイツ人の理論を（Eddington に率いられた）イギリスのチームが観測で確かめたことは，この二国間の科学上の交流を阻んでいた第一次世界大戦後の緊張を和らげるのに偶然にも役立った．現在でも重力による光の曲りは，天文学にとって重要なものである．重力レンズについて後の段落で述べるが，その前に重力によって光がなぜ曲り，どのように曲るのかを理解しておく必要があるだろう．

シュワルツシルト・メトリックでの光子の経路を，M/r が経路に沿って小さいという仮定の下に計算することから始めよう．軌道の式は式 (11.8) と式 (11.12) の平方根の比である．

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = \pm \frac{1}{r^2\left[\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{r^2}\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)\right]^{1/2}} \tag{11.47}$$

ここで次のように**衝突パラメーター**を定義した．

$$b \equiv L/E \tag{11.48}$$

11.7 節の練習問題 1 で b が曲りのないニュートン理論での r の最小値であるこ

とが示される．したがって，これは光子の入射直線とそれに平行で質量中心を通る直線との距離を表している．$L > 0$ をもった入射光子は次の式に従う．

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{b^2} - u^2 + 2Mu^3\right)^{1/2}} \tag{11.49}$$

ここで，u は以前と同様に定義される．

$$u = 1/r \tag{11.50}$$

式 (11.49) で u^3 の項を無視すると，M の効果はすべて消えてしまい，解は直線となる．

$$r\sin(\phi - \phi_0) = b \tag{11.51}$$

これはもちろんニュートン的な場合の効果である．

次に完全に無視はせずに，$Mu \ll 1$ と仮定しよう．このとき

$$y \equiv u(1 - Mu), \qquad u = y(1 + My) + O(M^2u^2) \tag{11.52}$$

と定義すると，式 (11.49) は次のようになる．

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}y} = \frac{(1 + 2My)}{\left(\dfrac{1}{b^2} - y^2\right)^{1/2}} + O(M^2u^2) \tag{11.53}$$

これは次のように積分できる．

$$\phi = \phi_0 + \frac{2M}{b} + \arcsin(by) - 2M\left(\frac{1}{b^2} - y^2\right)^{1/2} \tag{11.54}$$

初期軌道は，$y \to 0$，したがって $\phi \to \phi_0$ である．ϕ_0 は入射方向である．光子は，$y = 1/b$ のとき，最小の r に到着する．これは式 (11.22) で $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\lambda \doteqdot 0$ とおき，われわれの近似 $Mu \ll 1$ を使うとわかる．そのときの角は $\phi = \phi_0 + 2M/b + \pi/2$ である．こうして光子は最短点を角 $\pi/2 + 2M/b$ で通過する．対称性から最短点を通った後，同じ角だけ曲るから（図 11.5），全体で $\pi + 4M/b$ だけ曲ることがわかる．もし軌跡が直線なら，この角は π だから，正味の曲りは

$$\Delta\phi = 4M/b \tag{11.55}$$

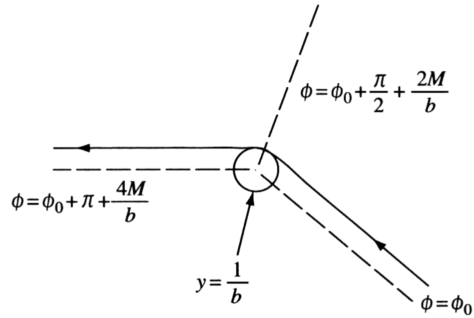


図 11.5　光子の曲り

となる．われわれの近似の範囲内で，b としては衝突パラメーター L/E よりはむしろ最接近点の動径距離を用いることができる．太陽の場合，最大の曲りは $b = R_\odot$ のとき，すなわち太陽半径の b をもつ軌道で得られる．$M = 1M_\odot = 1.47\,\mathrm{km}$, $R_\odot = 6.96 \times 10^5\,\mathrm{km}$ だから

$$(\Delta\phi)_{\odot,\max} = 8.45 \times 10^{-6}\ \mathrm{rad} = 1''.74 \tag{11.56}$$

木星なら，$M = 1.12 \times 10^{-3}\,\mathrm{km}$，$R = 6.98 \times 10^4\,\mathrm{km}$ より

$$(\Delta\phi)_{\psi,\max} = 6.42 \times 10^{-8}\ \mathrm{rad} = 0''.013 \tag{11.57}$$

これはヒッパルコス衛星で測定されている．

もちろん衛星による恒星の位置の観測は地球の近くでなされるわけで，天球上で太陽に近くない星からの光は式 (11.48) で与えられる完全な屈折が起る前に衛星にとどく．この様子を図 11.6 に示した．衛星の位置に**静止**している観測者にとって星の見かけの位置は，それからの光線の経路に接するベクトル $\vec{a}$ の方向である．もし太陽からの距離 r がわかっていると，星の真の方向 $\vec{s}$ を計算することができる．11.7 節の練習問題 16 で一般的な結果が導かれる．

光の曲りは一般相対論の正しさを示すのに決定的な役割を果したが，光の曲りについては，面白いことに，純粋にニュートン的な説明があるのである．それは，1784 年に Cavendish が，1801 年にドイツの天文学者 J. G. von Söldner (1776–1833) が独立に予想したものである．その議論は光が光速度 c で運動す

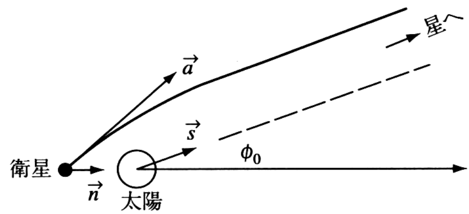


図 11.6　太陽の周縁にない星からの光は，図 11.5 の完全な屈折をする前に地球にとどく．

る粒子としてふるまうことに基礎をおいている．重力場中の粒子の運動は速度だけに依存するので，Cavendish も von Söldner もその屈折角が $2M/b$ であるという結果を計算することができた．その値は式 (11.55) で与えられる一般相対論の予言する値のちょうど半分である．Einstein は，その結果を知らなかったようで，自分で彼らと同じ結果を 1908 年に求めている．それは重力の相対論的な理論を探る最初の段階のころである．したがって，一般相対論の勝利は，光が曲ることを予言したことではなく，屈折の角度を正確に予言したことにあるのである．

このニュートン的な値が，一般相対論の予言する値の半分であることの理由を理解するのは簡単である．ポスト・ニュートン効果を述べた段落の最後の注意を思い出してほしい．惑星の軌道は g_{00} だけによって決るのである．惑星の速度が小さいからである．ところが，光の速さは遅くない．空間的な位置の変化 $\mathrm{d}r$ は時間の変化 $\mathrm{d}t$ と同程度である．そのことは，光子の運動を決めるさいには，メトリックの空間成分，たとえば g_{rr} は g_{00} 成分と同等の寄与をすることを意味する．式 (11.44) をみてみれば，g_{00} と g_{rr} の平坦な場合からのずれが同じであることがわかる．g_{00}（ニュートン的な計算にかかわる唯一の部分）により生み出される屈折角がいくらであっても，それは g_{rr} によって倍になるのである．ニュートン重力により得られるよりも，一般相対論で与えられる光の屈折角が大きくなる分は，時間と同様に空間の曲りを直接示す証拠なのである．

重力レンズ　　もちろんその同じ星からの光は屈折を起す星の反対側をも通り，図 11.7 のように屈折した後，お互いに交差することも起る．もし星（★）

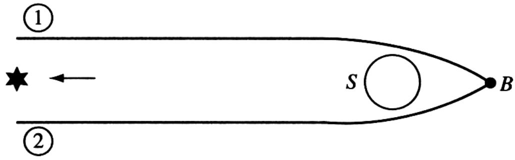


図 11.7 光の屈折は多重の像をつくる

が屈折を起す物体 (S) から非常に遠ければ，光線①と②は平行と思ってよい．すると点 B での観測者は，一つの星の見かけ上違った方向からくる**二つの像**をみることになる．

これは天体の並び方がとても単純で特別な場合であるが，重力を及ぼす天体がレンズの働きをすることの原理を示したものである．レンズ作用は本質的には普遍的で，屈折がどんなに小さくても，観測者 B を光源 S から十分に遠方に置くことで，光源の 1 点からの光を二つの方向からくるものとして観測できる．われわれが空をみたときにそうした二重像がみえないのは，われわれのいる場所が，ある星とレンズに対して適切な場所 B に対応する位置である確率が小さいためである．そしてまた，多くの光源が点状ではないこともあって，点 B における像の角度での離れ方（屈折角程度のオーダーの量）が，空の天体を角度で測った大きさよりも小さいと，二つの光線の差を見極めることができないのである．

しかし，宇宙のより遠いところを観測できるような，大きくて性能の高い望遠鏡を天文学者がつくってきたことにより，空が重力レンズの像で満たされていることがわかってきた．特に重要なのは，銀河団による重力レンズである．宇宙には多数の銀河があるため，比較的遠方の銀河団のさらに向こうに，われわれの望遠鏡の位置に多重像を生み出すようなレンズ作用を受ける銀河の集団が存在している可能性が高いのである．適切な位置関係を正確に満たしている確率がかなり大きいということである．さらに，銀河団の質量が莫大なものであるので，重力レンズによる屈折角が，より遠方の銀河像の大きさよりもずっと大きい．したがって，それを区別することが容易なのである．実際，われわれは，レンズ作用を引き起す物質分布が不規則なために生れる，ある天体の多重

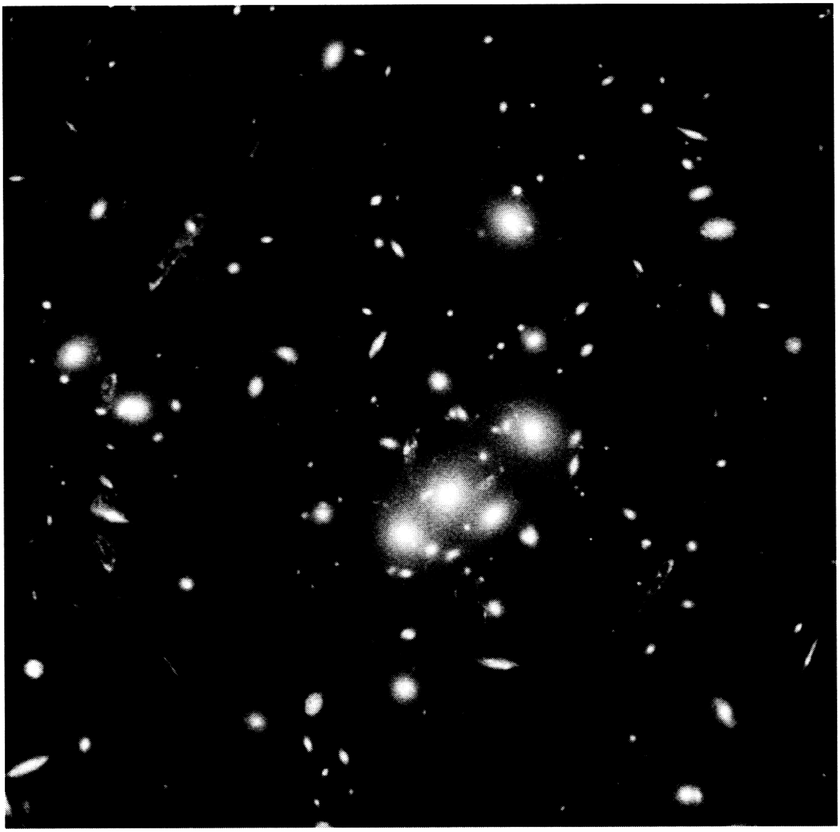


図 11.8　ハッブル宇宙望遠鏡で撮影された銀河団 0024+1654 には，もっと遠くにある銀河のたくさんの像が写っている．その像は，銀河団の中心と像を結ぶ直線に垂直な方向に引きのばされ，その直線の方向には押しつぶされた楕円形をして連なっている．この写真は W.N. Colley と E. Turner（プリンストン大学），J.A. Tyson（ベル研究所，ルーセント・テクノロジー）と NASA によって提供されたものである．

像をみることができる．その一例が図 11.8 にある．

分れた像を生み出すことよりも重要なことは，光の収束作用で像の明るさが増大することである．これを増光作用という．重力レンズによる銀河像の増光作用により，天文学者はより遠方の天体を観測できるため，きわめて初期の宇

宙を調べることが可能となる．重力レンズはまた，レンズ作用を引き起している物質分布を知るのに役立ち，それによって銀河団には，輝く星から推測される質量より大量の質量があることがわかる．天文学者はそれをダークマターとよぶ．そしてそれは次章で宇宙論を扱うさいの重要な対象となるのである．

観測されるレンズ像の詳細な研究から，ダークマターは銀河団の中で，銀河として集っている星の分布に比べ，ずっとなめらかに分布していることがわかる．銀河団の質量は，恒星から推定される質量の 10 倍以上あると考えられている．ダークマターは電荷をもっていない何かから構成されているのであろう．というのは，遠方の銀河からの光は，ダークマターを通過するさい，吸収されることも散乱されることもなく，また電磁波を放出することもないようだからである．物理学者は，ダークマターのようにふるまう素粒子を知らない．ニュートリノを別として，現在 (2008) 知られている電気的に中性な素粒子はすべて不安定であって，短時間で崩壊する．そしてニュートリノは質量が小さすぎて銀河団の重力場に閉じ込めておくことができない．ダークマターは現在の天文学と素粒子物理学の境界にある最大の謎の一つである．

重力レンズを研究することで，何らかの形で集っている物質を明らかにすることができる．われわれの銀河の中の個々の星によるレンズ効果（マイクロレンズ効果という）を観測すると，ダークである恒星質量程度の天体があるらしいことがわかる．それらは銀河の中のより遠くにある星の前を横切るさいにレンズ作用を引き起すことで観測できる．その場合，観測者は二つの離れた像を観測するのではない．そうではなく，レンズがない場合に到達するよりも多くの光を，レンズによって観測者の望遠鏡にもたらすことで，遠方の星が明るくなってみえるのである．この増光は一時的な現象である．レンズの役割を果す天体も運動しており，レンズ作用という事象も一時的なものだからである．レンズ効果を受ける星の近傍をしらべてみると，レンズ作用を及ぼす天体はふつうの白色矮星ほども明るくないが，太陽質量の数十%程度の質量をもっているらしいことがわかる．われわれの銀河の質量のかなりを占めるかもしれないこれらの重力レンズ効果天体の正体は，いまだに (2010) 謎である．

11.2　地平面の性質

座標特異領域　式 (11.1) の線要素で $r = 2M$ のとき，何かおかしなことが起ることは明らかである．しかしそれが幾何学それ自体によるのか，それとも単に座標系に関するものなのかは自明ではない．座標特異領域（座標が幾何学を適切に記述していない領域）は，ふつうの解析学では知られていない．極での球座標を考えてみよう．球上の北極は座標 $\theta = 0$，$0 \leq \phi < 2\pi$ をもつ．すなわち ϕ は $\theta = 0$ に対してどんな値でもとりうるが，すべての値は一点に対応している．球面上の座標図を図 11.9 のように描くことを考えてみよう．（世界地図はしばしばこのように書かれる．）この図では $\theta = 0$ の点が一点であることは明白ではない．しかし $\theta =$ 一定の円の円周を計算すれば，$\theta \to 0$ および $\theta \to \pi$ となるにつれてそれが 0 に近づくことを確かめられる．このことによって，$\theta = 0$，$\theta = \pi$ が一点であると納得できる．すなわち不変な幾何学的意味をもつ問題を問うことによって，座標の質がよいか悪いかいうことができる．球の場合，メトリックは正定値であり，したがって二点の距離がゼロならそれらは同一点である．（たとえば $\theta = 0$，$\phi = \pi$ と $\theta = 0$，$\phi = 2\pi$ の二点，11.7 節の練習問題 18 参照．）相対論では違った二点間の不変距離がゼロであるような

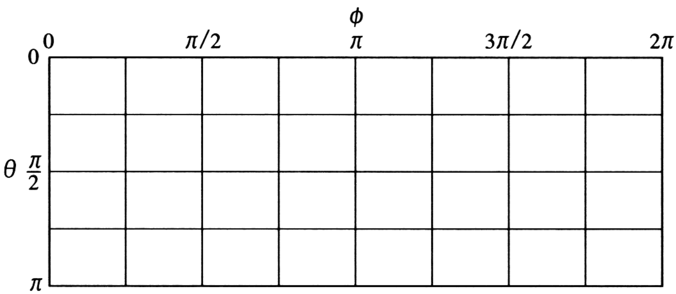


図 11.9　平らな紙の上に球を描く一つの方法．$\phi = 0$ と $\phi = 2\pi$ は実際には同一の線であるし，線 $\theta = 0$ と $\theta = \pi$ とはそれぞれが一点である．したがって球座標は，球のすべてを忠実に表しているとはいえない．

曲線（ヌル曲線）が存在するので情況はもっと複雑である．実際，$r=2M$ 面の性質についての問題はきわめて微妙で，1960 年までは満足いく答が得られなかった．(これはまたちょうどよいタイミングであった．というのは新しいテクノロジーがクェーサー，パルサー，X 線源の観測を可能にし，10 年足らずでブラックホールが天文学にとって重要になり始めたからである.）メトリックについてのいくつかの幾何学的問題を考え，そしてこの面で特異にならない座標を与えることによって問題を検討していこう．

落下粒子　任意の有限の距離 R から $r=2M$ 面に落ちていく粒子を考えよう．落下するまでにどれだけの固有時間を要するだろうか?　すなわち粒子のもっている時計でどれだけの時間が経過するだろうか?　それを議論するのに最も簡単なのは，動径沿いにまっすぐ落下する粒子である．そのとき，$\mathrm{d}\theta=0$, $\mathrm{d}\phi=0$ だから $\tilde{L}=0$，したがって式 (11.11) から

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2=\tilde{E}^2-1+\frac{2M}{r} \tag{11.58}$$

あるいは

$$\mathrm{d}\tau=-\frac{\mathrm{d}r}{\left(\tilde{E}^2-1+\dfrac{2M}{r}\right)^{1/2}} \tag{11.59}$$

(負の符号は粒子が内向きに落ちるからである.）$\tilde{E}^2>1$（束縛されていない粒子）なら，明らかに R から $2M$ までの右辺の積分は有限である．$\tilde{E}=1$（無限遠で静止状態から落下した粒子）のときは，積分は容易にできて

$$\Delta\tau=\frac{2M}{3}\left[\left(\frac{r}{2M}\right)^{3/2}\right]_{2M}^{R} \tag{11.60}$$

となり，有限である．$\tilde{E}<1$ のときには，粒子は $1-\tilde{E}^2=2M/r$［式 (11.58) 参照］よりも大きな r には行けないから何も問題はない．したがって，どんな粒子も有限の固有時間内で地平面（$r=2M$ 面）に到達することができる．実際，この積分の下限を $2M$ より小さくして $r=2M$ のもう一方側に変えても何の問題もない．粒子は有限の固有時間で $r=2M$ 面の内側へ入っていくことができる．

次に落下するのにどれだけの座標時間を要すか考えてみよう．まず

$$U^0 = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = g^{00}U_0 = g^{00}\frac{p_0}{m} = -g^{00}\tilde{E} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\tilde{E}$$

より

$$\mathrm{d}t = \frac{\tilde{E}d\tau}{1 - \dfrac{2M}{r}} = -\frac{\tilde{E}dr}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)\left(\tilde{E}^2 - 1 + \dfrac{2M}{r}\right)^{1/2}} \tag{11.61}$$

簡単のため，$\tilde{E} = 1$ の場合を考え，次の新しい変数を定義することによって，$r = 2M$ の近くを検討しよう．

$$\varepsilon \equiv r - 2M$$

すると

$$\mathrm{d}t = \frac{-(\varepsilon + 2M)^{3/2}\mathrm{d}\varepsilon}{(2M)^{1/2}\varepsilon} \tag{11.62}$$

$\varepsilon \to 0$ につれてこの積分は, $\ln \varepsilon$ のように発散することは明らかである．発散は, $[1-(2M/r)]^{-1}$ の項からきており，この項は $\tilde{E}$ を含まないので，$\tilde{E} \neq 1$ に対しても発散が起る．したがって無限の座標時間の後にはじめて粒子は $r = 2M$ 面に到着する．固有時間では有限だから，座標時間のこのふるまいはたちが悪い．

$r = 2M$ の内側　座標時間がどれだけたち悪くふるまうかをみるため，粒子が $r = 2M$ に到達した後，何が起るか考えてみよう．$r = 2M$ で壊されない限り，もっと小さな r にいくことは明らかである．$r = 2M$ で“曲率特異領域”があれば，重力がどんなものもこなごなにしてしまうほど強くなり，粒子が壊されてしまう．しかし，落下粒子の局所慣性系でリーマン・テンソルの成分 $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ を計算すると $r = 2M$ で有限であることがわかる（11.7 節の練習問題 20 参照）．したがって粒子はそのまま落下していくと結論せざるをえない．$\varepsilon \equiv 2M - r$ を導入して $r = 2M$ 近くの内側をみてみると，そのメトリックは

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\varepsilon}{2M - \varepsilon}\mathrm{d}t^2 - \frac{2M - \varepsilon}{\varepsilon}\mathrm{d}\varepsilon^2 + (2M - \varepsilon)^2\mathrm{d}\Omega^2 \tag{11.63}$$

となる．$r = 2M$ の内側で $\varepsilon > 0$ だから，t, θ, ϕ 一定の線は $\mathrm{d}s^2 < 0$ をもち，時間的であることがわかる．したがって ε（そして r）は時間的な座標である．一方，t は空間的になる．t と r がおかしいことはますます明らかになった！　落

下粒子は時間的世界線をたどらなければならないから，たえず r を変えなければならない．もちろんこれは r が小さくなっていくことを意味する．したがって $r = 2M$ の内側の粒子は必ず $r = 0$ に到達する．そこでは**真の**曲率特異点があり，無限大の力で破壊される（11.6 節の練習問題 20 参照）．もし $r = 2M$ の内側の粒子が，その切迫した破滅を知らせるために，$r = 2M$ の外側の誰かに光子を送ろうとしたらどうなるだろうか？ この光子はたとえどんな方向に送られようとも，その粒子が局所的にみる "時間" で先に進まなければならない．このことは r が減少することを意味している．したがって光子もまた外側に逃れることはできない．$r = 2M$ 以内のすべてのものは，その中に閉じ込められ，さらに $r = 0$ の特異点に引きずり込まれ破壊される運命にある．$r = 0$ は $r = 2M$ 以内のあらゆる時間的そしてヌル世界線の未来にあるからである．いったん，粒子が $r = 2M$ 面を横切ると外の観測者からはみることができなくなる．なぜなら，みるということは，その外側の観測者に光子が到達することである．したがって，この面は**地平面**（horizon）とよばれる．というのは地上の地平線も（違った理由から）同じ効果をもつからである．以後，$r = 2M$ 面をシュワルツシルト地平面とよぶ．

座標系　今までのわれわれのアプローチは純粋に代数的であったため，幾何学的な描像が現れてきていない．幾何学的描像を得るためには，まず最初にシュワルツシルト座標での座標図を描いてみよう．そしてその上で光円錐，あるいはある事象から動径方向にのびている内向きと外向きのヌル世界線の経路を描いてみよう（図 11.10）．これらの光円錐は θ，ϕ 一定に対する $\mathrm{d}s^2 = 0$ を解くことによって計算される．

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = \pm\frac{1}{1 - \dfrac{2M}{r}} \tag{11.64}$$

t–r 図で，これらの線は星から遠いところで傾き ± 1（特殊相対論での標準的な光円錐）をもつが，$r \to 2M$ につれて $\pm\infty$ に近づく．これはそれらがより縦向きになり，光円錐が "閉じていく" ことを意味する．粒子の世界線は局所的な光円錐の内側に限られるから（粒子は光速を超えてはならない），この光円錐が閉じていくと粒子の世界線はより縦向きにならざるをえない．粒子が $r = 2M$ に到達するとすれば，それは $t = \infty$ である．これが粒子が無限大の座標時間

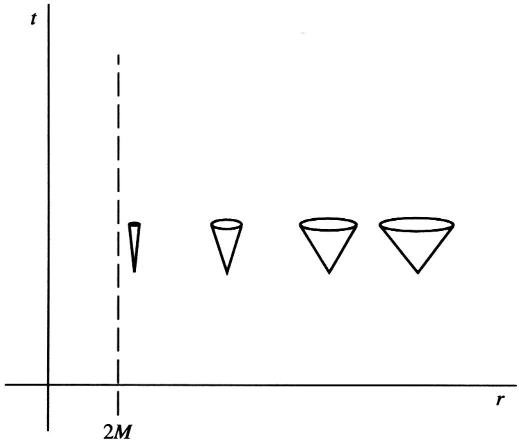


図 11.10　シュワルツシルト座標で書かれた光円錐は，$r = 2M$ 面の近くで閉じていく．

かかって地平面に到達するという代数的結果の背後にある“描像”である．どんな粒子も有限の固有時間 t では地平面に到達できないことに注意せよ．このことは線 ($r = 2M$, $-\infty < t < \infty$) が実際には線ではなくて，時空の一点であることを示唆している．すなわち，われわれの座標系は単一の事象を無限の線 $r = 2M$ に引きのばした結果，質が悪くなったのである．この引きのばしのために，どんな粒子も地平面に到達するとしたら，それは $t = +\infty$ の“後”に $r = 2M$ を横切らなければならないことになってしまう．この特異点は図 11.9 の球座標の極でのふるまいに非常によく似ている．そこでも質の悪い座標での直線全体が実際の空間の一点を表している．図 11.10 の座標図は，**幾何学**を正しく表そうとしているのではなく，座標だけを表したものであることに注意せよ．光円錐が閉じていくことから，幾何学はうまく表していないことがわかる．光円錐は実際には閉じていかない (粒子は有限の**固有**時間で地平面に到達し，そこでまったく特異性のない幾何学に出会う) から，光円錐が閉じていかないような座標系を見つければ幾何学が正しく記述できる．

クルスカル–スゼッケル座標　　そのような座標を探すのは長く困難な仕事だったが，これは 1960 年に見つけられた．この座標はクルスカル–スゼッケル

座標（Kruskal–Szekeres）u, v として知られ，次のように定義されている．

$$\begin{aligned} &r > 2M \\ &\left.\begin{aligned} u &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} \mathrm{e}^{r/4M} \cosh\frac{t}{4M} \\ v &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} \mathrm{e}^{r/4M} \sinh\frac{t}{4M} \end{aligned}\right\} \end{aligned} \tag{11.65}$$

$$\begin{aligned} &r < 2M \\ &\left.\begin{aligned} u &= \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{r/4M} \sinh\frac{t}{4M} \\ v &= \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{r/4M} \cosh\frac{t}{4M} \end{aligned}\right\} \end{aligned} \tag{11.66}$$

（この変換は，$r = 2M$ で特異であるが，そこでの座標特異性を取り除くために必要である．）この座標でのメトリックは次のように書かれる．

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{32M^3}{r}\mathrm{e}^{-r/2M}(\mathrm{d}v^2 - \mathrm{d}u^2) + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \tag{11.67}$$

ここで，r は座標と見なすべきではなく，式 (11.65) と式 (11.66) によって次式のように陰に与えられる u と v の関数と見なす．

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} = u^2 - v^2 \tag{11.68}$$

式 (11.67) についていくつかのことを注意しておく．まず，$r = 2M$ でメトリックのどの項にも特異性はみられない．しかし，$r = 0$ でわれわれが期待するとおり特異点がある．動径ヌル世界線 ($d\theta = d\phi = ds = 0$) は次式となる．

$$dv = \pm du \tag{11.69}$$

この最後の結果は非常に重要である．これは (u, v) 図で光円錐が特殊相対論と同じになることを意味する．したがって，座標図で幾何学を視覚化するのにこの座標が特に便利となる．(u, v) 図を図 11.11 に示した．この図を 5.8 節の練習問題 21 の結果と比べてみよ．

この図について説明しよう．第一に二つの光円錐が描かれている．**任意の** 45 度の傾きをもった直線が動径ヌル世界線である．第二に，u と v だけが書かれていて，θ と ϕ は省略されている．したがって，図の各点は実際には事象のつくる二次元球である．第三に，r が一定の曲線は式 (11.68) から明らかなよう

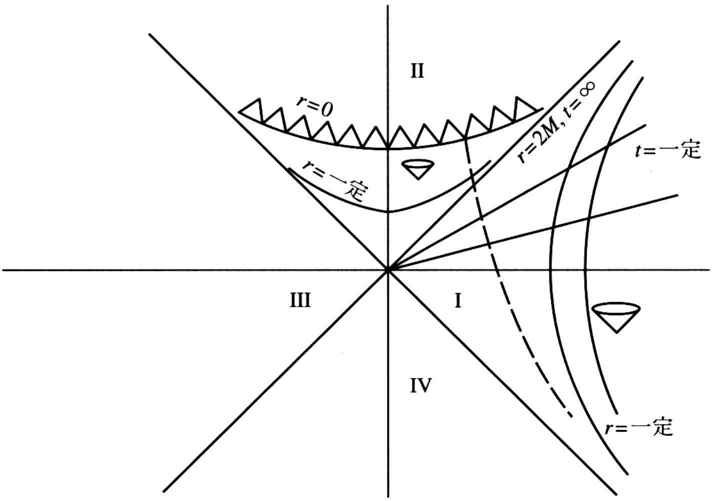


図 11.11　クルスカル–スゼッケル座標は光円錐を至るところで 45° に保つ．$r = 0$（ギザギザの線）での特異点は $r = 2M$，$t = +\infty$ の線の内側（上）のすべての事象の未来を限る．この地平面の外側の事象はその未来の一部に特異点のない領域をもつ．

に双曲線となる．$r > 2M$ に対してこれらの双曲線はだいたい縦向きで，原点 $u = v = 0$ を通る 45 度の直線に漸近的に近づいていく．$r < 2M$ の場合，$r =$ 一定の双曲線は水平方向で同じ漸近的性質をもつ．このことは，$r < 2M$ の場合，（光円錐のなかに閉じ込められた）時間的な世界線は一定の r にとどまってはいられないことを意味する．これは前に得た結果である．$r = 0$ の双曲線は，そこに特異点があるので時空の終りを表す．通常の空間では，$r = 0$ は“点”であるが，この図では双曲線となっていることに注意せよ．しかしそれは幾何学の特異領域なのだから，このことで何も損われることはない．それをはっきりと定義された次元をもった時空の一部と考えるべきではない．

第四に $t =$ 一定の線は，$r =$ 一定の双曲線に直交するので，この図では原点 $u = v = 0$ から出てくる直線となる．（それらは**時空**における直交性の意味で，$r =$ 一定の双曲線と直交する．特殊相対論での不変双曲線を示す 1.7 節の図を思い出すとよい．そこでも原点を通る直線に対して同様な直交性が示されている．）$t \to \infty$ の極限では，これらの直線は原点を通る傾き 45 度の直線に近づ

いていく．すべての $t=$ 一定の直線が原点を通るから，図 11.10 のような (t,r) 座標図では原点は一つの直線全体に引きのばされる．これはまさにその図を議論したときに推測したことである．図 11.11 でこの $t=\infty$ の直線を横切る世界線は，r が時間的になるような領域に入り，したがって再びもどってくることはできない．真の地平面はこうして，$r=2M$，$t=\infty$ の線である．

第五番目に，遠方の観測者にとって t は固有時間なのであり，地平面へと落下する物体は $t=+\infty$ を含めて $t=$ 一定のすべての線を横切るのであるから，遠方の観測者は落下する物体が地平面に到達するまでに無限の時間がかかると結論することになる．われわれはこの結論をすでに導き出していたが，ここではそのことが図として明確に示されることがわかる．次のように述べるとき，そこには何の「まちがい」もない．遠方の観測者は，物体が地平面を横切ったという情報を得るまでに無限の時間待たなくてはならないのである．しかし，物体は自分の時計では有限の時間で地平面に到達する．落下する物体が，その時計が時刻を刻むごとに，電波のパルスを出すとすれば，地平面に到達するまでに有限個のパルスを送り出すことになる．したがって，遠方の観測者は有限個のパルスを受け取ることになる．それらのパルスは，遠方の観測者の時間ではきわめて長い時間として引きのばされるので，観測者は，落下している時計の進み方がゆっくりになり，ついには止ってしまったと考えるであろう．もし落下していく時計が光子であるとすると，観測者は光子が無限の重力赤方偏移を受けたと結論することになる．落下する「物体」が地平面の大きさよりも短い波長の重力波の場合にも，それと同じことが起る．

第六に，この地平面はヌル世界線の集りである．地平面というのはヌル世界線がそこから出ていけるかいけないかの境界だから，これはそう**あるべきもの**だ．したがって地平面は“臨界”ヌル線からできている．第七に原点からの傾き 45 度の直線は図で I，II，III，IV と示したように時空を四つに分割する．領域 I は明らかに“外部” $r>2M$ であり，領域 II は地平面の内側である．しかし領域 III，IV は何だろうか？　この議論は，本書の範囲を超えているが [Misner ら (1973) の Box 33.2G と 34 章，あるいは Hawking と Ellis (1973) 参照]，一つだけ注意しておこう．図 11.11 の破線を考える．これは落下粒子の軌跡と考えてもよい．もしこのブラックホールが星の重力崩壊でできたものなら，星の

外側で幾何学はシュワルツシルトであっても，内側ではそれとはまったく違っているだろう．この破線は崩壊していく星の**表面**の軌跡とも考えることができる．その場合，図で破線の右側の領域は星の**外側**であり，したがって時空の幾何学を正しく表している．しかし破線の左側のすべては星の内側（小さな r）であり，時空の真の幾何学とはたぶん何の関係もないだろう．この左側は，領域III，IV のすべてを含んでおり，したがってそれらは天体物理学者には無視される．（しかし数学者にとっては興味ある対象である．）領域 I，II の一部も無視されるが，それでも星の外側に特異点と地平面があることに注意せよ．第八そして最後に座標 u, v は星の遠くでは都合のよい座標ではない．そこでは g_{uu}，g_{vv} は r に関して指数関数的にゼロになってしまう．そこでは座標 t, r が便利である．実際，t, r は星の遠方で質よくふるまうようにつくられた座標なのである．地平面に興味をもつ場合に，u, v が使われる．

11.3　一般のブラックホール

ブラックホール形成の一般論　　地平面の形成は，物質が重力崩壊を起し，重力場がいわゆる地平面の内部とよばれる小さな領域にすべてのものを閉じ込めることに関連した現象である．われわれはブラックホールの特別な場合（静的，球対称）を考察した．しかし地平面の形成はもっと一般的な現象である．11.4 節で天体物理におけるブラックホールの議論をするとき，大量の質量を非常に狭い領域に閉じ込めるのに自然がどのようなやり方をとっているかを説明する．現実の世界では，ブラックホールが完全に球対称な崩壊によって形成されるものではないことは明らかであろう．ブラックホールは複雑で動的な情況で形成され，形成後も，その動的な変化に影響を与え続ける．たとえば，連星の一員として，またガスの降着の中心天体として，そしてまた重力波の源として，といった具合である．この節で，ブラックホールの定義とブラックホールの一般的な性質を学ぶことにしよう．

シュワルツシルト地平面の主なそして驚くべき性質は，地平面を横切ってしまったものはもはや外部へもどれないということである．一般的な地平面（事象の地平面）の定義は，この性質を述べたものとなる．「事象の地平面とは，時

空中にある，遠方の観測者と交信可能な事象点と交信不可能な事象点の境界のことである.」この定義では，8.4 節で定義したように，遠方の観測者が存在すること，つまり時空が漸近的に平坦であることが前提となっている．そして，そこでは交信にかかる時間はどんなに長くてもよいのである．ある事象は，ある特別な方向だけであっても，とにかく遠方の観測者に届く光子を放出できれば，地平面の外にあると考えるのである．定義のなかで一番重要なのは，地平面は「時空」の境界であることであって，ある時刻に定義される空間の中の境界ではないことである．地平面は，時空の中の事象を，地平面より内側の捕捉された事象と外側の捕捉されない事象という二つの領域に分ける三次元的な曲面なのである.

光速よりも速く伝わる情報はないので，ある事象が遠方の観測者と交信できるか否かは，その事象から光を送り出せるか否か，つまり任意の遠方へ到達できるヌル曲線があるかどうか，ということになる．脱出できるヌル曲線と捕捉されたヌル曲線の境界として，地平面そのものもヌル世界線で構成されている．それらの世界線は境界上に捕捉されたヌル曲線で，無限遠にも到達できないし，内部に落下することもできない世界線である．定義からして，これらの境界線上のヌル曲線は永遠に地平面上に存在する．というのも，もし曲線が地平面を離れて外部に行ったり，内部に行ったりできるとすると，地平面を意味するものではなくなるからである．この定義が，静的で変化のないシュワルツシルト地平面に当てはまるのは明らかであるが，動的な情況を考えたときには，驚くべきこともでてくる.

初期にはブラックホールが存在していない情況から地平面が形成されていく過程では，地平面の動的な性質が現れてくる．球対称星が崩壊してブラックホールが形成される情況を考えてみよう．最終的には静的なシュワルツシルト地平面になるが，それ以前には，地平面が半径ゼロから最終的な半径にまで大きくなる間の期間がある．これは崩壊の情況を（非常に概略的に）示した図 11.12 を考えれば簡単にみることができる．（この図で時間座標はシュワルツシルト時間のようなものであるが，あまり文字通りにとってはならない.）物質が落ち込むにつれ，崩壊する星の中心から出た光子の軌跡（波線）はどんどん影響を受けていく．光子 (a) はほとんど問題なしに外に出ていけるが，光子 (b) はいく

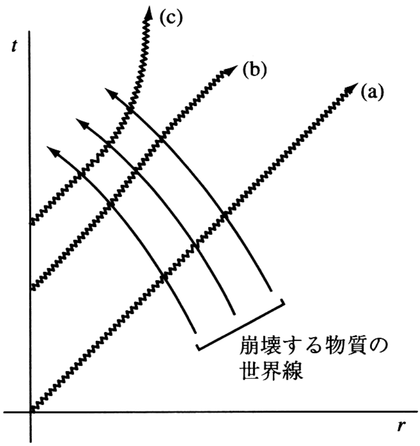


図 11.12　球対称崩壊の概略的な時空図．光線 (a) はほとんど何も影響を受けない．(b) は少し遅れる．(c) はぎりぎりで捕えられる．地平面は，光線 (c) として定義される．したがって，それは崩壊が進むにつれ，半径ゼロからだんだんと大きくなる．

らか遅れる．(c) は“臨界”光子で重力によって永久に捕えられシュワルツシルト地平面にとどまる．(c) より後のどんな光子も永久に閉じ込められ，それより前のどんな光子も逃れていく．したがって，光子 (c) は捕えられる光子と捕えられない光子のちょうど境目になるので定義より地平面の**全体**を表している．こうして光子 (c) の軌跡を観察することによって，半径ゼロから $2M$ までの地平面の成長を追うことができる．この球対称の情況では崩壊の詳細を知れば，容易に地平面の位置を決めることができる．しかし何の対称性もないときには（特に崩壊が莫大な重力波を放出するときには）原理は同じであるが計算ははるかに難しい．

動的な地平面のもっと複雑な例として，ずっと後になって物質が落下してきたとすると（図には示していないが），図 11.12 の「最終的な」ブラックホールのシュワルツシルト地平面に何が起るかを考えてみよう．簡単化のために，落下するガスは完全に球対称であると仮定しよう．ガスが落下する前のブラックホールの質量を M_0 とする．球面 $r = 2M_0$ は静的で，事象の地平面のようにみえる．つまり，内部の光子は中心の特異点に向かって落下していき，その球

面より少し外側の光子はしだいに少しずつ少しずつその面から遠ざかっていくのである．しかしそのとき，新たなガスがこの面を横切ってブラックホールの質量が M_1 に増大したとする．明らかに，新たな最終状態は質量 M_1 のシュワルシルト解であり，半径 $r = 2M_1$ のより大きな球面が事象の地平面のように思える．その面は，内部に落ちていくことも外部に広がっていくこともないヌル光線で形成されている．さて，それらの光線の時間的な変化はどんなものであろうか．$r = 2M_1$ のところにある光線を過去にさかのぼっていくと，何が起るだろうか．新たなガスが到達する前には，それは半径 $r = 2M_0$ の球面の「外側」にあったヌル世界線の一つであり，それは非常にゆっくりとではあるがその面から離れていく光線の一つであった．新たな質量が重力を強め（曲率を大きくし）光線が広がっていくことを止め，ちょうど $r = 2M_1$ の位置にとどめるようになる．さらに，ガスが落下する前に，静的な球面 $r = 2M_0$ を形成していたヌル光線はいまや $r = 2M_1$ の内側にあり，したがって，加わった質量の重力に引かれて，特異点に向かって落下していく．つまり，「時空」中の捕捉されたものと捕捉されないものの境界は，最終的に $r = 2M_1$ の位置にくるヌル光線で構成されており，それは時間をさかのぼってつながっている部分も含めたものである．$r = 2M_0$ 上のヌル光線は，もっと前の時刻において時空の本当の地平線の一部ですらないのである．それらが捕捉された光線かどうかがわかるまでに長い時間がかかるような光線にすぎなかったのである．ガスが落下する前には，静的な地平線 ($r = 2M_0$) にみえていたものは，ヌル光線が一時的に集っていたものだが，事象の地平面ではまったくなかったのである．そのうえ，捕捉された光線と捕捉されていない光線の本当の境界は，最終的に球面 $r = 2M_1$ になるヌル世界線をたどっていくと，ガスが落下する以前において，ゆっくりと外に広がっていたのである．

この例から，地平面とは空間内の位置を表すものではなく，時空の境界を表すものであるということがわかる．ある時刻に，ある系をしらべるだけでは地平面を決定することはできないのである．そうではなく，すべての時間における変化をしらべることで，どのヌル光線が最終的には脱出でき，どのヌル光線が捕捉されるのかがわかり，そのあとで，その両者の境界をたどることができるのである．地平面はある時刻における空間の性質ではなく，時空全体の性質か

ら決るものである．われわれの例でいえば，何年もたってからさらにガスがブラックホールに落下していくとすると，$r = 2M_1$ にあるヌル光線も捕捉されてしまい，事象の地平面を形づくるものではなくなるのである．本当の地平面かどうかを知るためには，時空の未来すべてを知り，捕捉される領域と捕捉されない領域の境界をたどるしかないのである．

事象の地平面のこの定義は数学的に矛盾がなく論理的なものである．しかし，実際の情況に対して適用するのは簡単ではない．もし時空について制限された領域しかわからない場合，地平面を決めることはできなくなる．たとえば，ブラックホールを含むアインシュタイン方程式の解をコンピューターで計算しようとした場合，無限の時間まで計算することはできない．そうすると，ブラックホールの地平面を決めるために必要な情報を得ることができなくなるのである．そこで，物理学者は，ある時刻に定義できる別の曲面を考えることにした．そのためにはシュワルツシルト地平面の他の性質を利用する．それは，ヌル光線の静的な集合であるという特徴である．物理学者は，ある時刻において，外向きのヌル光線が広がっていくことも収縮してもいかない 2 次元曲面である「局所的捕捉面」を定義する．局所的捕捉面は，$r = 2M_0$ が本当の地平面の内側にあったように，つねに動的な場合の本当の地平面の内側にある．しかも多くの場合，それらは本当の地平面に非常に近いところにあるので，本当の地平面をきわめてよく近似していることが多い．

ブラックホールの一般的性質　事象の地平面の詳細な構造を計算するのは容易ではないが，地平面のいくつかの重要で一般的な性質は知ることができ，それによって天文学者は，複雑な天体現象のモデルの中にブラックホールを確信をもって含めることができるのである．ここで，いくつかの重要な定理や予測をあげておこう．

(1) いかなる地平面も，降着のような外部からの作用が定常的に及ぶことがなければ，最終的には定常状態に落ちつくと考えられている．したがって，孤立したブラックホールは定常状態になるはずである（下記の (3) の計算がこの考えを支持している）．「定常地平面」は，非定常な地平面とは異なって，完全に理解されている．主な性質として，定常で真空のブラックホールは，全質量 M と全角運動量 J という二つの量だけで特徴づけられる存在だということが

ある．これらのパラメーターは，地平面の「内側」での積分で定義される量ではなく，ブラックホールから十分に離れたところでの重力ポテンシャルで定義されるものである．8.4 節ではそのようにしてメトリックから全質量 M を定義したし，8.6 節の演習問題 19 では J が同じように定義できることを示した．唯一の定常な真空ブラックホールは式 (11.21) のカー解であり，あとで詳しく検討する．角運動量がゼロであれば，カー解はシュワルツシルト解になる．唯一性定理は Hawking (1972) と Carter (1973) と Robinson (1976) の仕事で示された．Chruściel (1986) と Heusler (1998) も参照．

(2) ブラックホールが真空中にない場合には，その構造はもっと一般的なものになる．電荷 Q を帯びることもあり，また自然界には磁気単極子は見つかっていないが，磁気単極子モーメント F をもつことも原理的には可能である．電荷と磁荷はガウスの法則によってブラックホールを囲む面と無限遠の面での積分によって測定することが可能である．一方で，重力崩壊において，大量の電荷 Q が残されるとは考えにくいので，天体物理学者は M と J だけがゼロではないとする．しかし，素粒子論に出てくる他の種類の場は複雑さを増やすものとなる．自己重力をもつ相互作用するスカラー場やヤン–ミルズ場などである [Heusler (1998) 参照]．これらの複雑な情況は天体物理的には重要だとは考えられていない．重要なのは，ブラックホールを囲んでいる物質が潮汐力を及ぼすために起る地平面の変形である．重い定常なガス円盤がブラックホールを取り囲んでいると，メトリックはカーのものと異なってくる [たとえば，Will (1974, 1975) や Ansorg (2005)]．

(3) 重力崩壊がほぼ球対称的であれば，質量分布の四重極や八重極成分といった非球対称部分は，角運動量に相当するものを除いて，重力波の形で放出されてしまい，カー・ブラックホールがあとに残されるであろう．もしも角運動量がなければ，シュワルツシルト・ブラックホールが残される [Price (1972a, b)]．カー・ブラックホールはあらゆる摂動に対して安定であるように思われるが，その証明は完全になされているわけではない [Whiting (1989), Beyer (2001)]．

(4) 非定常な地平面に関する重要な一般的性質として，ホーキングの面積定理 [Hawking と Ellis (1973)] がある．ブラックホールを含んだいかなる動的過程においても，すべての地平面の面積の総和は時間とともに減少することは

ない，というものである．われわれはすでにこのことを，物質がブラックホールに落下しているときに，地平面をどのように定義するかについての議論で定性的に示した．落下するガスがブラックホールに到達する前の時間に，ブラックホールの面積が実際に増大していた．あとで，カー地平面の面積を計算することで，この定理を量的に扱う．この面積定理によれば，二つのブラックホールは衝突し合体することが可能であるが，1 個のブラックホールが二つの小さなブラックホールに分裂することはできないことになる．[このことの特別な場合の証明は，カー・ブラックホールの面積公式を使った 11.7 節の練習問題 26 にある．完全な証明は Misner ら (1973) の問題 34.4 にあるが，本書で扱う範囲を超えた技法が必要である.] この定理で仮定されていることは，時空における物質の局所的なエネルギー密度 (ρ) が正である，ということだけである．つねに増大する面積とつねに増大する熱力学のエントロピーとの類似性から，ブラックホール熱力学の展開がなされ，同時にブラックホールが非常に自然な形で熱力学に組み込まれることがわかった．ブラックホールの面積とエントロピーとは式 (11.114) のように関係づけられる．この関係の基礎には，量子力学によればブラックホールからは自発的な放射が可能であることを Hawking が示したことにある．この放射は熱放射のスペクトルをしており，それによって温度が導入でき，地平面のエントロピーに結びつくのである．量子的効果で面積定理が破れることは，量子力学では，エネルギーが必ずしも正である必要がないことに起因する．このホーキング輻射については 11.5 節で説明する．

(5) シュワルツシルトとカー地平面の内側には，曲率が無限大になり，したがって潮汐力も無限大となる，曲率の特異点が存在する．Hawking と Penrose による一般的な定理によれば，地平面内にはある種類の特異点が存在する [Hawking と Ellis (1973)]．しかし，そうした特異点が無限の曲率の存在を意味するのかどうかはわかっていない．わかっていることは，落下していく測地線が完全ではなく，固有時やアフィンパラメーターを無限に延長していくことが不可能だということだけである．そうした特異点の存在は一般的には一般相対論の不十分性を示していると考えられている．つまり，地平面の内側では一般相対論の予想では時間に関しての適用限界があるのである．多くの物理学者はこの欠陥は重力の量子論で解消されると考えている．予想では，量子論の不確定性原理が

特異点を小さな「ぼやけ」に変え，潮汐力も無限には大きくならず，波形が未来にも存在し続けるだろうというのである．現時点では量子重力の完全な理論はできていないので，これは希望的な予測でしかない．しかし，特別な量子モデルの計算によれば，そうしたことが実際に起る可能性がある［Bojowald (2005), Ashtekar と Bojowald (2006)］．

(6) 地平面内には一般に特異点が存在するが，それらは遠方の観測者からは隠された存在である．それでは地平面の外部にある特異点，つまりいわゆる「裸の特異点」は存在するのだろうかという疑問が生れる．それは一般相対論にとって，もっと深刻な問題である．というのも，時空中にあるふつうの領域においてさえ，ある時刻を超えてしまうと，一般相対論では予想ができなくなることを意味するからである．地平面内の観測できない領域であっても，特異点があるのは問題であるが，特異点が地平面の外側にあると，一般相対論はさらにその欠陥を大きくしてしまう．この点に関して Penrose (1979) は，「宇宙検閲官仮説」を提唱した．その仮説によると，漸近的平坦時空の特異的でない初期条件から出発すると，裸の特異点は生れないことになる．Penrose はその証明をしているわけではないが，それを相対論の理論家が挑戦すべき問題として提案しているのである．現在でも，その仮説が正しいのか，あるいは，正確にはどのような形のものが正しいのか，については議論がある [Berger (2002), Chruściel (1991), Rendall (2005)]．一般相対論ではある一つの裸の特異点が避けられないのである．標準的宇宙論のビッグバンはわれわれにとって裸の特異点なのである．宇宙が崩壊するとすれば，われわれのすべての測地線の未来には同じようなビッグクランチが待ち受けている．こうした問題は次章で議論される．

上に述べた項目 (1) は本当のところ驚くべきことである．10^{60} 個の原子や分子——ガスとしてそれらの粒子がどのような時間変化をしてきたかを考えてみると，複雑なガス運動をしたり，衝撃波をつくったり，磁場と相互作用したり，原子核反応を起したり，ありとあらゆる複雑さを示している——から形成された重いブラックホールが，質量と角運動量というたった二つの数だけで厳密にかつ完全に記述できるのである．地平面とその外部の時空全体の幾何学がそれらの二つの数だけで決ってしまうのである．ブラックホールの形成過程における，あらゆる複雑な情況は消去され忘れ去られ単に二つの数だけに帰着す

るのである．これほど単純な記述が可能なマクロな物体はほかには存在しない．われわれが星を記述するさい，その質量と光度と色を取りあげるが，それは手始めであり，その内部には無限ともいえるさまざまな状態を含んでいることを前提とした分類の仕方でしかない．星には，構成する個々の原子や分子のさまざまな運動までふれないにしても，磁場や黒点や星風や非一様回転など大規模な構造がある．それらの違いはたいていの情況では重要ではないにしても，その違いは存在しているのである．ブラックホールの場合には，単純にそうした違いが存在しないのである．質量と回転以外にはなく，地平面をミクロなレベルでしらべたとしても，そこには構造や多様性は存在しない（この点に関しての，11.4 節で引用する Chandrasekhar の考え方を参照）．実際，地平面は現実に存在する面ですらなく，真空の空間の中にある捕捉領域と非捕捉領域の境界でしかないのである．ブラックホールの内部からは情報がいっさい出てこないという事実は，何がブラックホールに落下していったかに関しての情報は外部からは知ることができないことを意味する．唯一残る量が，物理学の基本的な法則によって保存される質量と角運動量なのである．

カー・ブラックホール　カー・ブラックホールは，球対称ではなく軸対称（すなわち角運動量の軸である一つの軸についてだけ回転対称）で，二つのパラメーター M，J によって特徴づけられる．J の次元は m^2 だから M と同じ次元をもつ次の量を定義すると便利である．

$$a \equiv J/M \tag{11.70}$$

線要素は次のように書ける．

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &-\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\,\mathrm{d}t^2 - 2a\frac{2Mr\sin^2\theta}{\rho^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\phi \\ &+ \frac{(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta}{\rho^2}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}\,\mathrm{d}r^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\theta^2\end{aligned} \tag{11.71}$$

ここで

$$\begin{aligned}\Delta &\equiv r^2 - 2Mr + a^2 \\ \rho^2 &\equiv r^2 + a^2\cos^2\theta\end{aligned} \tag{11.72}$$

この座標は，ボイヤー–リンキスト（Boyer–Lindquist）座標とよばれ，ϕ は対

称軸まわりの角，t はそれに関してすべての物が定常的になるような座標時間，r と θ は球対称の r と θ に類似のものであるが，幾何学的な定義に結びつけるのはそれほど容易ではない．特に二次元球のメトリックがないから，座標 r は前にしたように“表面積”座標としては定義できない．このメトリックについて次の点が重要である．

(1) $t=$ 一定，$r=$ 一定の表面は二次元球のメトリック式 (10.2) をもたない．

(2) $a=0$ に対するメトリックは，シュワルツシルト・メトリックとなる．

(3) シュワルツシルトの場合と違って，メトリックは非対角要素をもつ．

$$g_{t\phi} = -a\frac{2Mr\sin^2\theta}{\rho^2} \tag{11.73}$$

線要素は対称性より同じ項を二つ含むから，これは式 (11.71) の $\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\phi$ の係数の半分である．

$$g_{t\phi}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\phi + g_{\phi t}\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}t = 2g_{t\phi}\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}t$$

どんな軸対称，定常メトリックも $g_{\alpha\beta,t} = g_{\alpha\beta,\phi} = 0$ という性質をもった特別の座標 t，ϕ をもつ．しかし座標 r，θ は，(i) t と ϕ に直交し ($g_{rt} = g_{r\phi} = g_{\theta t} = g_{\theta\phi} = 0$)，(ii) お互いに直交する ($g_{\theta r} = 0$) というように選ばれる以外は任意である．一般に，t と ϕ がお互いに直交するようには選べない ($g_{t\phi} \neq 0$)．こうして式 (11.71) は最小数のゼロでない $g_{\alpha\beta}$ をもつ [Carter (1969) 参照]．

慣性系の引きずり　　メトリックの $g_{t\phi} \neq 0$ の存在は，粒子の軌跡に質的に新しい効果を及ぼす．$g_{\alpha\beta}$ は ϕ に依存しないから，粒子の運動はこの場合も p_ϕ を保存する．しかし今度は

$$p^\phi = g^{\phi\alpha}p_\alpha = g^{\phi\phi}p_\phi + g^{\phi t}p_t \tag{11.74}$$

または時間成分については次のようになる．

$$p^t = g^{t\alpha}p_\alpha = g^{tt}p_t + g^{t\phi}p_\phi \tag{11.75}$$

角運動量ゼロ，$p_\phi = 0$ の粒子を考えよう．すると（ゼロでない静止質量をもった粒子に対して）定義

$$p^t = m\,\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau, \qquad p^\phi = m\,\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\tau \tag{11.76}$$

を用いて，粒子の軌跡は

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{p^{\phi}}{p^{t}} = \frac{g^{\phi t}}{g^{tt}} \equiv \omega(r, \theta) \tag{11.77}$$

この式は角運動量ゼロの粒子の角速度 ω を定義する式である．以下で反変成分 $g^{\phi t}$，g^{tt} を与えたときに，カー・メトリックに対する ω を見つけよう．この効果は，$g_{t\phi} \neq 0$ をもつ任意のメトリックに対して存在する．そして源が回転している（たとえば，8.6 節の練習問題 19 での回転星を参照）ときにはいつでも，$g_{t\phi} \neq 0$ となる．無限遠から一直線に $(p_{\phi} = 0)$ 落ちてくる粒子は重力の影響によって “引きずられ”，メトリック源の角速度と同じ方向の角速度を獲得する．(以下でカー・メトリックに対して，ω が a と同じ符号をもつことを示す.）この効果はブラックホールからの距離に伴って小さくなる [カー・メトリックに対しては，だいたい $1/r^3$．式 (11.90) 参照]．また 8.6 節の練習問題 19 でみたように，ほとんどの情況ではこの効果は小さいけれど，原理的にはこれによって源の角運動量を測ることができる．この効果は “慣性系の引きずり” とよばれている．

この効果は磁場の作用ときわめて類似している．ニュートン重力は，同じ符号の「電荷」が相互に引きつけあうというように，符号を変えると静電気学と非常に似ている．電磁気作用において，回転している電荷は，われわれが磁気作用とよぶ別の効果を引き起す．そこにも重力に類似性があり，回転する質量による重力効果がある．そのため，この効果のことをグラビトマグネ作用という．グラビトマグネ作用とふつうの磁気作用の類似は，レンズ–シリング効果を考えるとわかりやすい．回転星のまわりを軌道運動しているジャイロスコープは，回転星の角運動量に比例する割合で，少しだけ歳差運動をする．それは自転している電子が磁場中を運動していると，歳差運動するのと同じである．

小さい値であるが，地球の回転によるレンズ–シリング効果が測定されている．2 機の測地衛星の軌道の詳細な解析により，約 20%の精度で，一般相対論の予測値にあっていることがわかっている［Ciufolini ら (2006)］．特別の軌道に人工衛星をあげれば，1 桁程度精度を上げることができるであろう．さらに，グラビティプローブ B (GP-B) とよばれる衛星実験では，搭載したジャイロスコープの歳差を測定し，そのデータからは約 10%以下の精度の結果が期待され

ているが，データは現在 (2010) も解析中である．GP-B は衛星軌道上でなされた実験としては，最高感度で最高精度の実験の一つである．グラビトマグネ作用はブラックホールの近くからの X 線放射を扱うさいに考慮されており［たとえば，Brenneman と Reynolds (2006)］，本章のはじめに出てきた二重パルサー系 PSR J0737-3039 でもまもなく観測されるでろう．

エルゴ領域　赤道面 ($\theta = \pi/2$) のある与えられた r で放出された光子を考える．とくに $\pm\phi$ 方向，すなわち $r =$ 一定の円に接する方向に放出されたものを考える．それらははじめその経路上で $\mathrm{d}t$ と $\mathrm{d}\phi$ だけがゼロでなく，$\mathrm{d}s^2 = 0$ から

$$
\begin{aligned}
0 &= g_{tt}\mathrm{d}t^2 + 2g_{t\phi}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\phi + g_{\phi\phi}\mathrm{d}\phi^2 \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} &= -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}
\end{aligned}
\tag{11.78}
$$

もし $g_{tt} = 0$ なら次のような驚くべきことが起る．この式は二つの解をもつ．

$$
\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = 0 \quad と \quad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{2g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \tag{11.79}
$$

以下でカー・メトリックに対して第二の解は，パラメーター a と同じ符号の $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$ を与え，光子がブラックホールの回転と同じ方向に引きずられることを示す．もう一つの解は，回転と "逆向きに" 放出された光子はまったく動かないことを意味する．軌道の引きずりが強くなり，この光子は回転と反対方向には動けない．どんな粒子も光子より遅くなければならないから，明らかにたとえブラックホールと逆向きのどんなに大きな角運動量をもっていたとしても，ブラックホールと同じ向きに回転せざるをえなくなる!

$g_{tt} = 0$ の面が地平面の外にあることを示そう．この面はエルゴ球 (ergosphere) とよばれる．またその中ではどんな粒子も一定の r，θ，ϕ にとどまっていることはできないので，しばしば "定常限界" ともよばれる．式 (11.71) から次式が導かれる．

$$
r_0 \equiv r_{\mathrm{ergosphere}} = M + \sqrt{(M^2 - a^2\cos^2\theta)} \tag{11.80}
$$

この半径以内では $g_{tt} > 0$ となり，すべての光子と粒子はブラックホールとと

もに回転しなければならない.

この効果は他の情況でも起こりうる. トロイダル状の空間領域で $g_{tt} > 0$ となるような回転星のモデルが知られている [Butterworth と Ipser (1976)]. そこではここで述べたような強い慣性系の引きずり効果が起る. そのような領域はエルゴ領域, その境界はエルゴトロイドとよばれ, 地平面をまったくもたないメトリックでも存在しうる. しかし, そうした星は極端にコンパクト（相対論的）なものであり, しかもきわめて高速に回転している. 現実の中性子星がエルゴ領域をもっていることはなさそうである.

カー・ブラックホールの地平面　シュワルツシルト解では地平面は, $g_{tt} = 0$, $g_{rr} = \infty$ となるところであった. カー解の場合, エルゴ球は $g_{tt} = 0$, 地平面は $g_{rr} = \infty$, すなわち $\Delta = 0$ のところに現れて,

$$r_+ \equiv r_{\text{horizon}} = M + \sqrt{M^2 - a^2} \tag{11.81}$$

となる. エルゴ球は極を除いて地平面の外にあることは明らかである. 極ではエルゴ球は地平面に接する. r_+ が地平面であることの完全な証明は, どんなヌル世界線も r_+ の内側から逃れられないことを確かめなければならず, それは本書の枠を超えている. ここでは単にそれを事実として受け入れよう.（このことの部分的な正当化は次の節で与える.）地平面の表面積は重要なので（ホーキングの表面積定理), それを計算してみよう.

式 (11.81) とメトリックが定常的であることから, 地平面は r と t が一定の表面である. 一定の r と t をもつどんな面も式 (11.71) で $\mathrm{d}t = \mathrm{d}r = 0$ とした次のメトリックを内在的メトリックとしてもつ.

$$\mathrm{d}l^2 = \frac{(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta}{\rho^2}\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 + \rho^2\mathrm{d}\theta^2 \tag{11.82}$$

この表面の固有面積は, このメトリックの行列式の平方根を θ と ϕ のすべての範囲にわたって積分した式によって与えられる.

$$A(r) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sqrt{(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta}\,\sin\theta \tag{11.83}$$

この積分は Δ が小さいとき

$$A(r) = 4\pi\left[r^2 + a^2 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2+a^2}\Delta\right] + O(\Delta^2) \tag{11.84}$$

となる．地平面は $\Delta = 0$ によって定義されるから結局

$$A(\text{地平面}) = 4\pi(r_+^2 + a^2) \tag{11.85}$$

カー・メトリックの赤道面での光子の運動　赤道面における光子の運動の詳しい考察から "回転" メトリックが非回転メトリックとどのように違うかが明らかになる．まずメトリック (11.71) の逆を計算しなければならない．式 (11.71) を定常，軸対称の一般形に書こう．

$$\mathrm{d}s^2 = g_{tt}\,\mathrm{d}t^2 + 2g_{t\phi}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\phi + g_{\phi\phi}\,\mathrm{d}\phi^2 + g_{rr}\,\mathrm{d}r^2 + g_{\theta\theta}\,\mathrm{d}\theta^2$$

非対角要素だけが t，ϕ に関係しているので

$$g^{rr} = \frac{1}{g_{rr}} = \Delta\rho^{-2}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{g_{\theta\theta}} = \rho^{-2} \tag{11.86}$$

他の要素を計算するには次の行列の逆をとる必要がある．

$$\begin{pmatrix} g_{tt} & g_{t\phi} \\ g_{t\phi} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix}$$

この行列の行列式を D とすると，逆行列は次のように求まる．

$$\frac{1}{D}\begin{pmatrix} g_{\phi\phi} & -g_{t\phi} \\ -g_{t\phi} & g_{tt} \end{pmatrix}, \quad D = g_{tt}g_{\phi\phi} - (g_{t\phi})^2 \tag{11.87}$$

これから次の重要なことが帰結される．慣性系の引きずりの角速度は式 (11.77) で与えられるから，この場合

$$\omega = \frac{g^{\phi t}}{g^{tt}} = \frac{-g_{t\phi}/D}{g_{\phi\phi}/D} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \tag{11.88}$$

となる．この式から式 (11.78) と式 (11.79) のもつ意味が明らかになる．式 (11.71) のメトリックに対して

$$\begin{aligned} D &= -\Delta \sin^2\theta, & g^{tt} &= -\frac{(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta}{\rho^2\Delta} \\ g^{t\phi} &= -a\frac{2Mr}{\rho^2\Delta}, & g^{\phi\phi} &= \frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\rho^2\Delta\sin^2\theta} \end{aligned} \tag{11.89}$$

したがって

$$\omega = \frac{2Mra}{(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta \sin^2\theta} \tag{11.90}$$

この分母は式 (11.72) より，至るところで正だから，前に述べたように ω は a と同じ符号をもち，また r の大きなところで r^{-3} のように小さくなる．

その軌道が赤道面にある光子に対して $\mathrm{d}\theta = 0$ であるが，シュワルツシルトの場合と違って，これだけが特別の軌道である．赤道面にない光子は質的に違った軌道をもつ．それにもかかわらず，メトリックが $\theta = \pi/2$ の面に関して面対称だから，はじめ赤道面で $p^\theta = 0$ の光子は，つねに $p^\theta = 0$ となる．定常性と軸対称性から，$E = -p_t$ と $L = p_\phi$ は運動の定数である．したがって $\vec{p}\cdot\vec{p} = 0$ が運動を決定する．以前と同様 p^r を $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\lambda$ と書くと少しばかりの計算の後，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 &= g^{rr}[(-g^{tt})E^2 + 2g^{t\phi}EL - g^{\phi\phi}L^2] \\ &= g^{rr}(-g^{tt})\left[E^2 - 2\omega EL + \frac{g^{\phi\phi}}{g^{tt}}L^2\right]\end{aligned} \tag{11.91}$$

$\theta = \pi/2$ のときの式 (11.72)，(11.86)，(11.90) を用いると

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 = \frac{(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta}{r^4}\Bigg[&E^2 - \frac{4Mra}{(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta}EL \\ &- \frac{r^2 - 2Mr}{(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta}L^2\Bigg]\end{aligned} \tag{11.92}$$

これは式 (11.12) と比較すべき式で，$a = 0$ のとき，それに帰着する．係数が複雑になっている以外に，式 (11.92) は EL を含む項をもつ点で式 (11.12) と質的に違っている．この項のための有効ポテンシャル V^2 を定義して，$(\mathrm{d}r/\mathrm{d}\lambda)^2 = E^2 - V^2$ と書くわけにはいかなくなる．しかし式 (11.91) を次のように書くことはできる．

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 = \frac{(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta}{r^4}(E - V_+)(E - V_-) \tag{11.93}$$

ここで $V_\pm$ は式 (11.91) と式 (11.92) から

$$V_\pm(r) = [\omega \pm (\omega^2 - g^{\phi\phi}/g^{tt})^{1/2}]L \tag{11.94}$$

$$= \frac{2Mra \pm r^2 \Delta^{1/2}}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta} L \tag{11.95}$$

これは式 (11.14) の**平方根**を一般化した式であり，$a = 0$ のときそれに帰着する．式 (11.14) の平方根は地平面以内では虚数となった．同様に式 (11.95) も $\Delta < 0$ のとき虚数になる．どちらの場合もそのような領域では $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\lambda = 0$ の解が存在しない．すなわち光子のエネルギーがどんなものであっても転回点が存在しないことを意味する．いったん光子が $\Delta = 0$ の線を超えると，この線の外側にもどってくることができなくなる．明らかに $\Delta = 0$ は赤道面内で**地平面**を決定する．ここでは示さないが，$\Delta = 0$ は赤道面にない軌跡に対しても地平面を決める．

$V_{\pm}(r)$ を書くことによって光子の軌跡の性質を議論することができる．まず $aL > 0$（角運動量がブラックホールと同じ向き）の場合を選び，$r \geq r_{\pm}$（地平面の外側）を考える．大きな r に対して（図 11.13 の）曲線は，$1/r$ のように落ちていき，漸近的にゼロになる．この領域ではブラックホールの回転の有無はほとんど何の違いも与えない．小さな r で，回転がない場合には存在しない性質がみえてくる．V_- はゼロを通って（それがエルゴ球の位置 $r_0 = 2M$ であることは容易にわかる），地平面で V_+ と出会う．どちらの曲線も地平面で

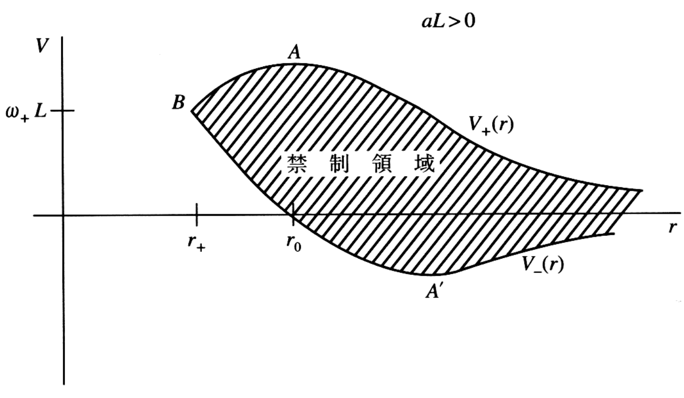


図 11.13 カー・メトリックでの赤道面内にある正の角運動量をもった光子軌道に対するポテンシャル図．$a \to 0$ につれ，上と下の二つの曲線は地平面の外で図 11.2 の二つの平方根に近づいていく．

$aL/2Mr_+ \equiv \omega_+ L$ という値をもつ．ここで ω_+ は地平面での ω の値である．式 (11.93) から明らかに光子は $E > V_+$，あるいは $E < V_-$ の領域内でのみ運動できる．正の E をもった光子はおなじみである．それらは無限遠からきて，V_+ の頂上にぶつかるかどうかによって最小の r にとどきそこから引き返すか，あるいはブラックホールの中に落ち込んでいく．この場合には何も目新しいことはない．しかし $E \leq V_-$ をもつ光子はどうなるだろう?　それらのうちあるものは $E > 0$ をもつ．そのような光子は存在できるのだろうか?

負エネルギーの光子を議論するために，少し本題からそれ，測地線に沿って時間を過去にさかのぼることについて述べなければならない．われわれは粒子の経路を測地線という数学的概念に附随させた．測地線は曲線であり，曲線に沿って二つの方向のどちらにでもたどることができる．時間的曲線なら未来へと過去へである．それらの運動を表す接線は単に符号が逆となる．一つの運動が四元運動量 $\vec{p}$ をもつなら，他方は $-\vec{p}$ をもち，観測者 $\vec{U}$ が測ったエネルギーはそれぞれ $-\vec{U}\cdot\vec{p}$ と $\vec{U}\cdot\vec{p}$ となる．したがって一方は正，他方は負のエネルギーをもつ．あらゆる既知の粒子は正またはゼロの静止質量をもち，このことは未来方向に進むどんなローレンツ観測者に対してもそれらが正のエネルギーをもつことを意味するから，平坦な時空ではすべての粒子は未来方向に進むとしている．逆にもし $\vec{p}$ があるローレンツ観測者に対して正のエネルギーをもてば，未来方向に進むあらゆる観測者に対しても正のエネルギーをもつ．しかしながらカー・メトリックでは，このことは単に正の E を要求するということにならない．というのは E は無限遠で静止した観測者に対するエネルギーだからである．地平面近くの粒子は無限遠からほど遠く，したがって "未来" の方向が明らかではない．われわれがなすべきことは，地平面の近くで時計をもち，彼の側を通る粒子に対して $-\vec{p}\cdot\vec{U}$ が正であることを要求する観測者を考えることである．そのために（どんな観測者でもいいのだが），角速度 ω でブラックホールのまわりを一定の r で回っているゼロ角運動量の観測者を用いるのが便利である．このゼロ角運動量観測者 (zero angular-momentum observer)（ZAMO）は測地線上にのっていないので，この軌道を維持するためロケットエンジンがいる．(この点で彼はわれわれと何ら違わない．われわれも地球の重力場の中で一定の r を保つため足を使わなければならない.）彼が四元速度 $U^0 = A$，$U^\phi = \omega A$,

$U^r = U^\theta = 0$ をもつことは容易にわかる．ここで A は条件 $\vec{U}\cdot\vec{U} = -1$ から，$A = g_{\phi\phi}/(-D)$．これは $r > r_+$ に対して特異ではない．したがってこの観測者は次のように粒子のエネルギーを測定する．

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{ZAMO}} &= -\vec{p}\cdot\vec{U} = -(p_0 U^0 + p_\phi U^\phi) \\ &= A(E - \omega L) \end{aligned} \tag{11.96}$$

これが正定値であると要請しなければならないエネルギーである．A は正定値だから，結局この要請は次のようになる．

$$E > \omega L \tag{11.97}$$

式 (11.95) から，$E > V_+$ をもつどんな光子も式 (11.97) を満たすことは明らかであり，したがって存在が可能である．しかし $E < V_-$ の光子は式 (11.90) を満たさず時間を過去にさかのぼる．こうして図 11.13 では E が V_+ より大きな光子だけを考えたのであった．なぜならそのような光子のふるまいは，シュワルツシルトの場合と何ら質的に変りないからである．

ペンローズ過程　しかしながら負の角運動量粒子に対しては新しい様相が現れる．もし $aL < 0$ なら，式 (11.95) から明らかなように $V_\pm$ 曲線の形はひっくり返り，図 11.14 のようになる．もちろんこの場合でも式 (11.97) の条件は未来に進む光子は $V_+(r)$ よりも上でなければならないことを意味する．しかし今度はそういった光子のあるものは $E < 0$ をもとりうる．このことは，$r < r_0$，すなわちエルゴ領域の内側でだけ起りうる．ここでわれわれはエルゴ領域という名前の由来が理解できる．それはギリシャ語のエネルギーを意味する "エルゴ" からきている．エルゴ領域とはエネルギーが特異な性質をもつような領域のことである．

全エネルギーが負になる軌道の存在により，Roger Penrose (1969) は，次に述べる面白い思考実験を提案した．不安定な粒子をカー・ブラックホールへ落下させるとしよう．その粒子がエルゴ領域の中に入ったとき，2 個の光子に分裂するとする．そのうちの 1 個の光子は無限遠を基準にしたとき，負のエネルギーをもったヌル測地線を運動する．その光子はエルゴ領域に捕捉されており，必然的にブラックホールへ落下していく．もう一方の光子は，エネルギー保存

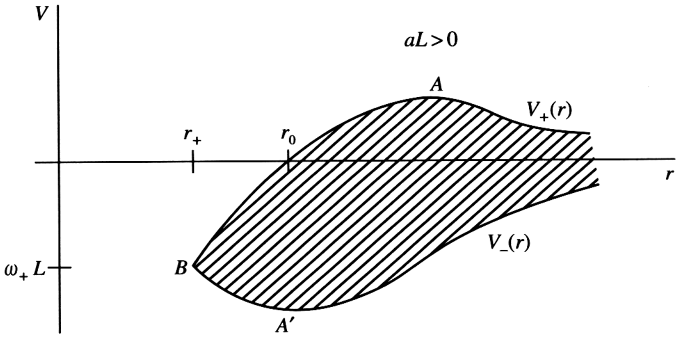


図 11.14　負の角運動量に対する図 11.13 と同様の図

則によって，正のエネルギーをもっている．正のエネルギーをもった光子が，エルゴ領域から抜け出す運動をするとしたとき，全体としては，ブラックホールのエネルギーを最初の状態よりも減らしてしまうことになる．落下する粒子がポンプの働きをしてブラックホールからエネルギーを取り出すことになるのである．図 11.13 と図 11.14 を検討することによってこのことは負エネルギー粒子が負の L をもつときにのみ起ることがわかる．したがってこの過程でブラックホールの角運動量は減少する．そのエネルギーはブラックホールの回転エネルギーからきている．

Blandford と Znajek (1977) は，ブラックホールが磁場をもつ降着円盤（この章の後で説明する）で囲まれていると，ペンローズ過程と同じ効果が現実的に起ることを示した．磁場がエルゴ領域を貫いていると，それによって電子と陽電子のペアーが生み出され，そのうちのいくつかはエルゴ領域の負のエネルギー状態の捕捉軌道を運動する．脱出していく粒子は，ブラックホールの近く，特にクェーサーから放出されることが知られている荷電粒子からなる大きなエネルギーをもったジェットを形成するのかもしれない．このように，クェーサーのジェットはブラックホールの回転のエネルギーで加速されているのかもしれない．本書を書いている現在の時点 (2008) では，ここに述べたものは，クェーサーのジェットの数あるモデルの一つと考えられている．

ペンローズ過程はカー・ブラックホールだけに特別なものではなく，エルゴ

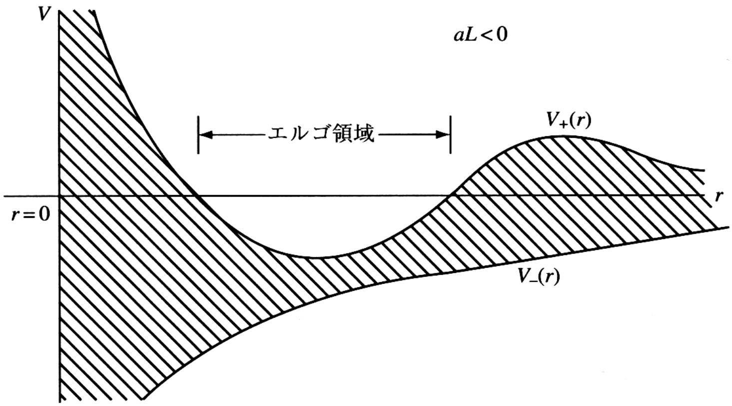


図 11.15　エルゴ領域をもつ程度に速く回転している星の時空での赤道面内の軌道に対するポテンシャル

領域が存在すればいつも起る．もし回転星が地平面をもたずエルゴ領域をもてば，(エルゴ球ではなくエルゴトロイドで囲まれるようなとき) その有効ポテンシャルは，$aL<0$ の場合，図 11.15 のようになる [Comins と Schutz (1978)]．($aL>0$ に対しては曲線はもちろんひっくり返る．)

V_+ の曲線はトロイダル状のエルゴ領域内でゼロ以下に下がる．エルゴ領域の外では正で，$r\to 0$ につれ無限大にまで上がる．V_- の曲線は決して符号を変えず，$r\to 0$ につれ負の無限大となる．ペンローズ過程は負エネルギー光子が捕えられるエルゴ領域内で起る．

星の場合，エルゴ領域の存在は不安定性を引き起す (Friedman 1978)．それはだいたい次のようなことである．星によって散乱された小さな「種になるような」重力波が，エルゴ領域内の負のエネルギーをもったヌル測地線を動いているとしてみよう．その重力波はそこに捕捉されていて，エルゴトロイドの中にあり，星のまわりで永久に円運動をし続けなくてはならない．しかし，波というのは完全に局在するものではないので，波の一部はエルゴ領域の外側に変動をもたらす．しかもそれは正のエネルギーをもって無限遠に伝わっていく．エネルギーの保存則からすると，エネルギーの「もれ」があるために，エルゴ領域の波は強められる．波が強められるというのは，正のエネルギーが放出さ

れるので，それに見合うだけの負のエネルギーをつくりだすということである．この一連の変動は終ることなく，くり返し起り続ける．エルゴ領域の波が強くなればなるほど，無限遠に逃げる波も増大し，波の振幅も増え続ける．それは指数関数的な現象の特徴であり，強くなればなるほど，より短時間で増大するのである．もちろん，この波は角運動量も同時にもち去るので，時間が経過すると星の回転を遅くし，エルゴ領域が完全に消失してしまうことになる．

原理的には，これはカー・ブラックホールでも起ることである．しかし，そこには重要な違いがある．エルゴ領域の波はそこに永久に存在するわけではなく，地平面を抜けてブラックホールの中へ伝わることができるのである．そうなると，エルゴ領域の外に波を生み出すことができなくなる．物理学者はカー・メトリックの安定性を詳しく調べ，エルゴ領域にあるすべての波は，無限遠に逃げることで増幅するよりも，地平面を通過することにより振幅がより大幅に減少してしまうことがわかってきた．カー・ブラックホールは安定なのである．その証明はいまだに完全ではないが，（下でみるように）天文学の観測から，自然界にはカー・ブラックホールが存在することがますます確かになってきており，われわれがこれまでにこの問題に関して利用したものよりも巧妙な数学によりいつの日にか解決することになるであろう．

11.4　天文学における現実のブラックホール

すでに説明したように，定常（時間変化しない）な唯一のブラックホールはカー・メトリックである．この驚くべき結論から，現実の世界でのブラックホールの研究が予想以上に単純なものになっている．現実の世界のたいていのシステムは非常に複雑なので，それを研究するさいには理想化することが必要である．たとえば，星は個々に違うが，天文学者はそれを分類するために，星の内部と結びついた見かけにパターンがあることを発見し，星の重要な特徴をとらえることができるほど複雑なモデルをつくり出してきた．しかし，星が 10^{57} 個の粒子からできているため，そこには莫大な自由度があり，モデルとしてはまだまだ単純なものにすぎないのである．ブラックホールは定常なものの場合，質量と回転という二つのだけの自由度しかない．天文学者の大多数が宇宙の中にブ

ラックホールがふつうに存在することを受け入れるようになる以前の1975年にシカゴ大学で行われたRyerson講演会で，天体物理学者のS. Chandrasekharはブラックホールの唯一性定理に触れ，次のように述べた．

> 45年以上にわたる科学者としての私の人生のなかで，一番衝撃的な経験は，ニュージーランドの数学者Roy Kerrによって発見された一般相対論のアインシュタイン方程式の厳密解が，宇宙に存在する莫大な数の重いブラックホールを厳密に表しているということを知ったことでした．数学における美の追求に動機づけられた発見が，自然界にそのままの形で実在するという信じられない事実，美を前にしたおののくような感動により，美というものは人間の心の一番深く奥まった部分で響きあうものだということを確信させられました．

ブラックホールの単純性により，近傍のガスや星への影響といった間接的な証拠にもとづいて，ある系の中にブラックホールが含まれることを知ることができるのである．重力波検出器がブラックホールからの重力波を直接観測するだけの感度に達するまでは，間接的な観測が，ブラックホールを発見する唯一の方法なのである．

ブラックホールは小さいので，ブラックホールを同定するさいに十分な確信を得るためには，地平面の近くの物質を分解能の非常に高い観測でみるか，地平線の近くの圧縮されて高温になった物質から発せられる高エネルギーの光子を使った観測をするかしか方法がないのである．1970年代から，衛星に搭載したX線観測装置を使って，天文学者はわれわれの銀河の中にある連星系の中に，多数のブラックホール候補を発見することができた．それらのブラックホールの質量は，$10\,M_\odot$ 程度であり，前章で議論したような重い星の重力崩壊で形成されたものであろう．1990年代からは，高分解能天文学の発展により，天文学者は銀河の中心部に $10^6 \sim 10^{10}\,M_\odot$ 程度の質量の超大質量ブラックホールを発見することができるようになった．中心のブラックホールが同定できるほど近い銀河のほとんどすべてがブラックホールを1個含んでいることは，天文学者にとって驚きであった．実際，最も確実だと思われるブラックホールはわれわれの銀河中心にある $4.3 \times 10^6\,M_\odot$ のブラックホールである（GenzelとKaras 2007）．

恒星質量ブラックホール　　重い星の重力崩壊で形成された孤立したブラックホールは発見することが難しい．そのブラックホールが星間空間を運動しているときに，わずかな量のガスを降着させるかもしれないが，それだけでは，ブラックホールにのみ込まれる前に X 線を十分に放出することはできないであろう．いままでにそうしたブラックホールは発見されていない．これまでに発見された恒星質量ブラックホールのすべてが，連星系に属するもので，相手の星が大きいためにガスをブラックホールに注ぎ込み始めるのである．連星系のガスは角運動量をもっており，ガスがブラックホールのまわりに円盤を形成する．しかし，こうした円盤内には，乱流や磁場に起因する摩擦が存在する．摩擦によって物質が円盤の中を渦巻状に落下していき，角運動量とエネルギーを放出する．このエネルギーの一部がガスの内部エネルギーになり，その温度が 10^6 K を超え，放出されるスペクトルのピークが X 線の波長領域になるのである．

たくさんのそうした X 線連星が見つかっている．そうしたもののすべてがブラックホールを含んでいるわけではない．中性子星も十分にコンパクトなので，ガスが降着すると X 線を出す温度にまで到達するのである．こうした系の中のブラックホールと中性子星を区別する方法として，天文学者は二つの方法を用いる．質量と脈動である．降着する天体が X 線で定常的な周期の脈動をしていれば，それはパルサーであってブラックホールではない．ブラックホールは磁場を保持し続けることができず，ブラックホールの回転に合せて磁場を回転させる．しかしながら，だいたいの系では脈動はみられない．その場合，天文学者は相手の星の速度と軌道半径（スペクトル線のドップラー偏移を観測することにより）と，（同じようにスペクトルから）相手の星の質量を推定することによって，降着天体の質量を導こうとする．その場合，軌道面と視線のなす角度を知ることが特に難しいため，そうした推定値の不定性は大きい．しかし，もし降着天体の質量の推定値が $5M_\odot$ を大きく超えるようであれば，ブラックホールであろうと考えられる．それは，中性子星の上限質量が $3M_\odot$ を大きく超えるものではなく，もっと小さいと考えられるからである．

質量はブラックホールを見分けるよい判定条件である．十数個のブラックホール候補の中で，1 個か 2 個だけが $7M_\odot$ より軽い．他の X 線連星の中の星の質量はすべて $2M_\odot$ より小さい．したがって，連星系で形成される天体に関する

限り，ブラックホールと中性子星の質量には明らかな開きがある．最も確かなブラックホール候補の一つが，一番最初に発見されたCyg X-1という星で，その質量は$10M_{\odot}$程度である．これまでに発見された恒星質量ブラックホールで最も重いのは，連星系の中にあるM33 X-7とよばれるもので，$70M_{\odot}$の質量をもっている．その名前が示すように，この系は銀河M33の中にある，その銀河はわれわれの銀河から1 Mpc離れたところにあり，アンドロメダ銀河（M31）までの約2倍の距離である．M33 X-7について特に驚くべきことは，その連星系に食がみられることであり，それは質量をより正確に推定できるだけの軌道傾斜角があることを意味している．

ある種の恒星の進化の果てにブラックホールが形成されることは確実だと思われるのだが，その進化の経路はまだ確定していない．たいていの天文学者は超新星爆発でブラックホールが生れると考えており，超新星爆発のコンピューター・シミュレーションでは，重力崩壊する恒星のコアからブラックホールを形成するよりも，恒星の外層を吹き飛ばして，あとに中性子星を残す方が難しいという情況からも，そうした考えが強まっている．しかし，たいていのγ線バーストが，高速回転する星からブラックホールが形成される過程と関連しているという証拠も増えている．

どのようにしてこれらの重い天体がブラックホールであることを知ることができるのであろうか．その答は，他の考えでは説明がつかない，というものである．それらは中性子星ではない．因果律を満たす（音速が光速を超えないことであるが）いかなる状態方程式でも，支えられるのは$3M_{\odot}$以下の質量である．何らかの奇妙な物質（ボゾン物質とよばれることもあるが）を使うと，重力崩壊しないような重いコンパクト天体をつくり出せるかもしれない．しかしそうした物質が存在する証拠はない．重力波によって，リングダウンの放射（第9章）のような，ブラックホールの明確な印を観測するまでは，そうした奇妙な状態を完全に排除することはできないのである．

超大質量ブラックホール　超大質量ブラックホールで一番確かなものがわれわれに一番近いところにある．われわれの銀河中心にある$4.3 \times 10^6 M_{\odot}$の質量のブラックホールである．このブラックホールは，われわれの銀河の中心近くにある星の位置を高精度でくり返し測定することによって発見されたも

のである．その観測は赤外線を使ってなされた．可視光線では中心部は星間塵で隠されてしまうため，赤外線により観測するのである．10 年以上の期間にわたって，長距離を移動する星が観測されたが，その移動は直線的なものではなく，はっきりとした楕円軌道を描いていた．そのすべての軌道は共通の中心のまわりの運動であるが，その中心は暗く何も観測できなかった．星のスペクトルから，視線方向の速度がわかり，その 3 次元の速度と銀河中心までの正確な距離とによって，各軌道に対する中心天体の質量を推定することができた．すべての軌道から得られたのは，その天体はわれわれも銀河の中心にあって，質量が $4.3 \times 10^6 M_\odot$ の暗い天体ということで一致していた．

驚くべきことに，軌道運動している星の一つは，銀河中心から約 120 AU 以内の距離まで接近していて，そのときの運動速度は光速度の 1%以上の 5000 km·s^{-1} もある．ブラックホール以外では，どんなものもそれほど狭い領域にそれだけの莫大な質量を，ブラックホールに崩壊していくことなく保持することは考えられない．

同じ程度の質量のブラックホールが，前に述べたように，われわれに一番近い M31 という銀河を含め，他の銀河の中に存在していると考えられている．したがって，ブラックホールは銀河形成の過程と関連しているようであるが，その関連性がどのようなものかは明らかにはなっていない．ブラックホールが最初から存在していたのか，あるいは銀河が形成される過程の一部としてブラックホールも形成されたのか，といったことであるが．また，$10^5 \sim 10^6 M_\odot$ の大質量のブラックホールが形成されるのか，あるいは（$10^4 \sim 10^5 M_\odot$ といった）小さな質量のブラックホールがしだいに成長するのかといったことも明らかになっていない．そして，成長するのだとしても，それはガスや星の降着によるものなのか，ブラックホール同士の合体によるものなのかもわかっていない．この最後の問題は LISA 衛星（第 9 章）によって答が得られるかもしれない．LISA は宇宙の中の広い質量範囲での合体過程における重力波を測定できるからである．

しかし，われわれの銀河中心にあるようなブラックホールは，超大質量ブラックホールの中では赤ん坊のようなものである．前に述べたように，天文学者はクェーサー現象は，典型的には $10^9 M_\odot$ 程度のずっと重いブラックホールへガ

スが降着することで起きると考えているからである．天文学者がブラックホールの近傍領域を解明するのはかなり先のことであろうが，広い波長帯での数十年にわたる観測の後でも生きのびるクェーサーのモデルはブラックホールを含んだものとなるであろう．このモデルは，その分野で研究している天体物理学者の大多数が一致して支持するものとなっている．

クェーサーは現在よりも宇宙初期に多数存在していたので，これらの超大質量ブラックホールはきわめて早い時期に形成されなければならなかったようにみえるが，われわれの銀河の中のもっと小さめのブラックホールのほうがもっと長寿命なのかもしれない．このことから，クェーサーの中のブラックホールはわれわれの銀河の中のブラックホールとは異なり，大きくなることで形成されたものではないのかもしれない．これは超大質量ブラックホールに関する未解決問題の一つである．

驚くべきことに，銀河中心のブラックホール質量と，ブラックホールを取り巻く，銀河のバルジとよばれる，銀河中心部の星の速度分散（銀河のランダムな速度）の間には高い相関があるようにみえる．ブラックホールの質量が大きければ大きいほど，速度も大きいのである．これは，$10^6 \sim 10^{10} M_\odot$ に至るまで単純な関係で表されている．そのことはブラックホール形成を理解するさいの手がかりとなるのかもしれない．

天文学者は銀河がしばしば合体することを知っている．そのことからすると，そうした銀河の中のブラックホールの少なくともいくつかを合体させていて，LISA で観測できる波長帯で強い重力波を生み出しているに違いない．実際，次章でみるように，銀河形成の現在のモデルでは，すべての銀河は，星の小さな集団との合体のくり返しで形成されたと考えられている．そうすると，銀河の形成と成長の過程で，中心のブラックホールもやってくるブラックホールと合体することでどんどんと大きくなったと考えることが可能なのである．

以前に注意したように，LISA によってそれが本当かどうかがわかるであろうが，ブラックホールの合体の証拠はすでに多くなってきている．いくつかの銀河には，二つの明るい中心部があることがわかっており，銀河の中心から光速度の 1%近くの速度で超大質量ブラックホールが放出されたことの驚くべき証拠がごく最近に発表されている［Komossa ら (2008)］．そのような速度は，

合体の結果生れるブラックホールの「キック」によるもの以外には考えられない（以下を参照）．

中間質量ブラックホール　　$10M_\odot$ や $10^6 M_\odot$ やそれ以上の質量のブラックホールがあるのなら，$100 \sim 10^4 M_\odot$ 程度の質量のブラックホールはあるのだろうか．天文学者はこの範囲の質量のブラックホールを中間質量ブラックホールとよぶ．しかしそうしたブラックホールが存在することの証拠ははっきりしていない．明るい X 線源のいくつかは大きなブラックホールであるかもしれないし，おそらくは球状星団にこの質量範囲のブラックホールがあるであろう．天文学者は，純粋に水素とヘリウムだけで構成されていたガス雲の崩壊で生れた初代の星形成の時代につくられたと考えられるそうした中間質量ブラックホールを重点的に探してきた．太陽のような星は，第一世代の恒星がつくり出した重い元素で汚染された星間雲から後になって生れるのだが，第一世代の恒星の質量は太陽などよりはずっと重い．数値計算によれば，第一世代の恒星（種族 III とよばれるが）のいくつかは急激に崩壊してブラックホールになるようである．しかし，そうしたブラックホールを見つけるのは簡単ではない．本書が出版される時点 (2008) で，ヨーロッパ宇宙機関の未公表のデータによると，球状星団オメガ・センタウリに $4 \times 10^4 M_\odot$ のブラックホールが存在しているらしい．同じような天体の観測で，もっと多くのそのような質量のブラックホールが見つけ出されるかもしれない．

動的ブラックホール　　定常なブラックホールは単純なのだが，ブラックホールがきわめて動的な情況にある場合も多く，そうしたものは解析的に扱うことはずっと難しい．ブラックホールが形成されるさい，（四重極のような）初期の非球対称成分は重力波の形で放出され，最終的には質量と角運動量だけが後に残されるようになる．それは一般的には短時間で終る．ブラックホールの線形摂動解析によると，ブラックホールは特徴的なスペクトルの振動をするが，ほんの数回の振動の後で，典型的には指数関数的に減衰（リングダウン）する [Kokkotas と Schmidt (1999)]．カー・メトリックは非常に速くもとの状態に落ち着く．

ブラックホールが他のブラックホールや星と衝突する場合は非常に動的なものとなる．第 9 章で述べたように，ブラックホールを含んだ連星系は最終的に

は合体するし，銀河中心のブラックホールは，銀河の合体のさいに他の重いブラックホールと合体する．こうした情況は，コンピューターを使ってアインシュタイン方程式を解き，動的過程をシミュレーションするというように，数値的にしらべるしかない．

一般相対論での数値的な扱いは数十年の歴史があるが，その初期の進展はゆっくりとしたものだった．一般相対論では座標系の取り方が自由であり，それはアインシュタイン方程式の複雑性とあいまって，コンピューターに計算させる方程式系の定式化が一意的でないことを意味する．たいていの定式化は不安定な数値解法になってしまい，さまざまな解法を試してみてようやく安定な解法が見つかるようになる．さらに，ブラックホールが含まれる場合には，メトリックが発散する特異点が現れる．特異点は数値計算の領域から切り取らなくてはならない．コンピューターは有限の値しか扱えないからである．こうした問題やその解に関しては，Bona と Palenzuela-Luque (2005) や Alcubierre (2008) を参照．

2000 年代の中頃になってようやく，科学者はこうした問題に対処できるようになり，回転しているカー・ブラックホールの連星系の進化を追い，合体して回転している一つのカー・ブラックホールになる過程に関して信頼できる結果を出せるようになった．それ以後は計算結果が短時間のうちに続いて出されている．ブラックホールの合体において最も関心を引く特徴は，いわゆる「キック」とよばれる現象である．初期状態に特別な対称性がない場合，放出される重力波も非対称的になり，重力波はある方向に運動量を運びだす．その結果，合体後に形成されるブラックホールは重力波と反対方向に反跳されることになるのである．無次元量で測ると，この反跳の速度は系の質量のスケールによらず，初期状態の無次元量であるブラックホールの質量比と，初期のブラックホールのスピン・パラメーター (a/M) と，そして初期のスピンの向きとによって決るのである．ふつう，この反跳速度は秒速数百 km のオーダーであるが，ブラックホールを星の集団や渦状銀河の中心から放出するのに十分な速さである．さらに驚くべきことは，ある合体の場合には，反跳速度が光速の 10%を超えることが確認されている [Campanelli ら (2007)]．そのうちに，こうしたシミュレーションで得られた重力波の予想は，重力波の探索や発見された重力波信号の解

析において重力波天文学者によって利用されることになるであろう．

11.5　ブラックホールによる量子力学的輻射放出：ホーキング過程

1974 年 Hawking はブラックホールはブラックではなく，エネルギーを連続的に放射していることを示し，物理学界に衝撃を与えた！　これは，われわれがこれまで述べてきたことが間違っていることを意味するのではない．このことはブラックホール近くの電磁場に量子力学を適用することによって導かれるのだ．いままでわれわれは時空の測地線軌道に沿った粒子として光子を考えてきたが，不確定原理に従えばこれらの “粒子” は任意の精度で局所化することはできない．このことを考慮すると地平面近くでの “現実の” 光子のふるまいは，理想的なヌル粒子として記述してきたものとは著しく違ってくる．

Hawking の計算 [Hawking (1975)] は場の量子論を用いているが，その主な結論は初等的な考察から容易に導くことができる．したがって以下にこの効果の厳密な議論ではなく，“もっともらしい議論” を与える．不確定性原理の一つの表現は，$\Delta E\,\Delta t \geq \hbar/2$ である．ここで ΔE は時間 Δt の間にある量子力学的状態にある粒子のエネルギーの最小の不確定性である．場の量子論によれば，空間は，ある事象で生成され別の事象で消滅する光子の対からなる電磁場の “真空の揺らぎ” で充満している．そのような光子対はエネルギー保存則を破るが，ΔE をその破れの量としたとき光子対が $\Delta t = \hbar/(2\Delta E)$ 以下しか続かないなら，どんな物理法則も破らない．したがって小さなスケールではエネルギー保存則はつねに破られているが，大きなスケールでは厳密に成り立っている．さて以前にも強調したようにブラックホールの地平面近くの時空はまったくふつうであり，特に局所的には平坦である．したがって真空の揺らぎはそこでも起っている．一つのエネルギーが E，他方が $-E$ の二つの光子をつくる揺らぎを考えてみよう．平坦な空間では負エネルギー光子は自由に伝播できず，$\hbar/(2E)$ の時間内に正エネルギー光子と再結合しなければならない．しかし，もしこの光子対が地平面のすぐ外側でつくられると，負エネルギー光子は時間 $\hbar/(2E)$ がたつ前に地平面の中に入る可能性がある．いったん地平面の中に入るとその光子は次に示すように自由に伝播することができる．簡単のためにシュワルツシ

ルト・メトリックを考えよう．カー・メトリックでの軌道の議論では負エネルギーは時間を過去にさかのぼる粒子に対応するので除外されたことを思い出そう．事象の地平面の中では時間の未来に向かう観測者は，r の減少する方向に向かう．簡単のため $p_0 = 0 = U^0 = 0$ の軌跡上にある観測者を考える．すると U^r は $\vec{U}$ の唯一の成分であり，規格化条件 $\vec{U} \cdot \vec{U} = -1$ から

$$U^r = -\left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{1/2}, \qquad r < 2M \tag{11.98}$$

これは観測者が内向きだから負である．$-\vec{p} \cdot \vec{U} > 0$ である限りどんな光子軌道も許される．地平面の内側で動径方向に動いているゼロ角運動量光子を考える．式 (11.12) で $L = 0$ とすると，明らかにそれは $E = \pm p^r$ をもつ．したがって考えている観測者に対するそのエネルギーは

$$-\vec{p} \cdot \vec{U} = -p^r U^r g_{rr} = -\left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{-1/2} p^r \tag{11.99}$$

これは光子もまた内向き ($p^r < 0$) であるときに限り正となる．しかし E に関しては何の制限も与えない．光子は地平面の中でヌル測地線上を運動するが，$p^r < 0$ である限り E は正も負ももちうる．(地平面の中では t は空間的座標であり，この結論は驚くにあたらない．E はそこでは運動量の空間成分なのである．)

地平面近くでの揺らぎは負エネルギー光子を実現可能な軌道にのせることができるので，正エネルギー光子は無限遠に逃げられる．そのエネルギーについてどんなことがいえるかみてみよう．まず自由落下慣性系での揺らぎを考えよう．この系では時空が局所的に平坦だから揺らぎは通常のもののようにみえるはずである．座標 $2M + \varepsilon$ で瞬間的に静止している系は，式 (11.11) から $\tilde{L} = 0$，$\tilde{E} = [1 - 2M/(2M + \varepsilon)]^{1/2} \approx (\varepsilon/2M)^{1/2}$ をもつ粒子の軌道に従って内向きに落ち始める．それは式 (11.59) を積分して得られる固有時間 $\Delta\tau$ の後に地平面に到達する．

$$\Delta\tau = -\int_{2M+\varepsilon}^{2M} \frac{\mathrm{d}r}{\left(\dfrac{2M}{r} - \dfrac{2M}{2M + \varepsilon}\right)^{1/2}} \tag{11.100}$$

ε の 1 次まででこれは次のようになる．

$$\Delta\tau = 2(2M\varepsilon)^{1/2} \tag{11.101}$$

この系での光子のエネルギー $\mathscr{E}$ は，これを揺らぎの時間 $\hbar/\mathscr{E}$ と等しくおくことによって得られる．

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\hbar(2M\varepsilon)^{-1/2} \tag{11.102}$$

これが局所慣性系で計算された外向きに出て無限遠にとどく光子のエネルギーである．これが無限遠にとどいたときにもつエネルギーを見つけるには，

$$\mathscr{E} = -\vec{p}\cdot\vec{U}$$

で $-U_0 = \tilde{E} \approx (\varepsilon/2M)^{1/2}$ であることを思い出す．すると

$$\mathscr{E} = -g^{00}p_0U_0 = U_0g^{00}E \tag{11.103}$$

ここで E は光子の軌道上の保存エネルギーで，無限遠にとどいたときに測定されるエネルギーである．$2M+\varepsilon$ での g^{00} を評価することによって結局，次式が得られる．

$$E = \mathscr{E}(\varepsilon/2M)^{1/2} = \hbar/4M = h/8\pi M \tag{11.104}$$

驚くべきことに，これは光子がどこから出てきたかによらない．つねにこの特徴的なエネルギーが出てくる．

Hawking による厳密な計算によれば，出てくる光子は温度

$$T = h/8\pi kM \tag{11.105}$$

をもつ黒体に特徴的なスペクトルをもつことが示される．ここで k はボルツマン定数である．黒体放射スペクトルの頂点では，光子のエネルギーは

$$E = 4.965kT = 1.580\hbar/(8M) \tag{11.106}$$

となり（ウィーンの変位則），われわれの評価式 (11.104) と非常に近いものになる．われわれの議論では光子が黒体スペクトルをもつべきことは示せないが，スペクトルがランダムな揺らぎからきており，そしてブラックホールが古典的には完全な吸収体であることから，この結果は十分納得できる．

ホーキング過程における負のエネルギー状態の光子は，前述のペンローズ過程で議論した負のエネルギーをもった光子と同じではないことを理解しておくことが大切である．ペンローズ過程はエルゴ領域の中だけで起るものであって，ブラックホールの地平線の外側にある負のエネルギー状態の軌道を利用するものである．Hawking の結果はもっと原理的なものである．それは回転していないブラックホールでも起るし，地平面より内側の負のエネルギー状態の光子と地平面の外側の正のエネルギー状態の光子をつなぐものなのである．その効果はカー・メトリックでも起るが，それはエルゴ領域ではなく，地平面をはさんで起る現象である．ペンローズ過程が，エルゴ領域のある星で不安定的に暴走するのと違って，ホーキング過程は，不安定的な暴走を起すものではない．それは，ホーキングの負のエネルギー状態にある光子がすでに地平面の内側にあるため，地平面の外側に正のエネルギー状態の光子をつくり出すことができないからである．したがって，ホーキング輻射は，地平面の近くにつねに存在する量子揺らぎから生れる定常的な熱放射である．

ブラックホールの温度が M^{-1} に比例することに注意しよう．ブラックホールからの輻射率は，AT^4 に比例する．ここで A は物体の表面積，この場合は地平面の表面積で，M^2 に比例する［式 (11.85) 参照］．したがってブラックホールの光度は，M^{-2} に比例する．このエネルギーは，ブラックホールの質量からこなければならないから（ブラックホールに落ち込むすべての負エネルギー光子は M を減少させる），

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} &\sim M^{-2}\\ M^2\,\mathrm{d}M &\sim \mathrm{d}t\end{aligned}\right\} \tag{11.107}$$

あるいはブラックホールの寿命は

$$\tau \sim M^3 \tag{11.108}$$

したがって，ブラックホールが大きければ大きいほど寿命は長く，その温度は低い．質量 10^{12} kg のブラックホールでは，10^{10} 年の寿命をもち，これはだいたい宇宙の年齢である．したがって，

$$\left(\frac{\tau}{10^{10}\,\mathrm{yr}}\right) = \left(\frac{M}{10^{12}\,\mathrm{kg}}\right)^3 \tag{11.109}$$

太陽の質量は約 10^{30} kg だから, 星の重力崩壊によってつくられたブラックホールの温度は約 10^{-7} K で，この輻射によって本質的な影響は受けない．しかし宇宙のごく初期には, 10^{12} kg のブラックホールができる可能性がある．それらが“蒸発”するときの観測可能な効果をみるため, 式 (11.109) で $\tau = 1\,\mathrm{s} = (3\times10^7)^{-1}$ 年とおいて，蒸発の最後の瞬間に放出されるエネルギーを計算してみよう．

$$M \approx 10^6\,\mathrm{kg} \sim 10^{23}\,\mathrm{J} \tag{11.110}$$

したがってこの短い瞬間に太陽光度の 0.1%程度の光度となる．しかしそのスペクトルは非常に違っている．その温度は，10^{11} K で主に γ 線を放出する．この章で前に説明した γ 線バーストを宇宙初期のブラックホールの蒸発で説明したくなるかもしれないが，観測される γ 線バーストは 10 億倍以上明るい．宇宙初期に形成されたブラックホールの蒸発は，われわれの銀河の中で起ったときにだけ観測されることになるであろう．今のところそうした現象は見つかっていない．

Hawking が結果を導くさいに用いた方法は，典型的な光子のエネルギー E が $E \ll M$ のときにのみ正しいことを指摘しておかねばならない．というのはその方法ではブラックホールの時空を変化しないものとして量子力学の方程式を解き，光子の伝播によって時空は影響を受けないと仮定しているからである．この近似は $M \approx h/M$ あるいは質量が

$$M_p = h^{1/2} = 1.6 \times 10^{-35}\,\mathrm{m} = 2.2 \times 10^{-8}\,\mathrm{kg} \tag{11.111}$$

のブラックホールに対しては破れる．これはプランクの定数（と c と G）だけから導かれる質量なので，プランク質量とよばれる．そのようなブラックホールを含む量子効果を扱うには首尾一貫した重力場の量子論を必要とする．それは相対論で現在最も活発に研究されている分野の一つである．今のところその研究は完全に成功しているとはいいがたいが，ホーキングの計算は最も重要な進展の一つであるように思われる．

ホーキング過程から離れる前に，これがもたらした重力と熱力学との驚くべき統一についてふれよう．ホーキングの面積定理を考える．これは次の形に書ける．

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \geqslant 0 \tag{11.112}$$

シュワルツシルト・ブラックホールに対しては

$$A = 16\pi M^2$$

$$\mathrm{d}A = 32\pi M\,\mathrm{d}M$$

あるいは

$$\mathrm{d}M = \frac{1}{32\pi M}\mathrm{d}A = \frac{\hbar}{8\pi kM}\mathrm{d}\left(\frac{kA}{4\hbar}\right) \tag{11.113}$$

$\mathrm{d}M$ はブラックホールの総質量の変化であり，$\hbar/(8\pi kM)$ はその温度だから式 (11.113) を次の形に書くことができる．

$$\mathrm{d}E = T_H\ \mathrm{d}S$$

ここで

$$S = kA/4\hbar \tag{11.114}$$

式 (11.112) より，この量 S は決して減少しないので，式 (11.113) と式 (11.112) はブラックホールに適用された熱力学の第一と第二法則を表すと考えられる．すなわちブラックホールはあらゆる観点で温度 $T_H = \hbar/(4\pi kM)$，エントロピー $kA/(4\hbar)$ をもった熱力学的黒体のようにふるまう．この類似は面積定理が発見された直後にわかったが［Bekenstein (1973, 1974) と Misner ら (1973) の Box33.4 参照］，その当時はブラックホールは温度をもたないとされていたので，この類似は不完全なものと思われていた．ホーキング過程によって，不完全な部分が完全に補われた．

しかし，ホーキング輻射は別の問題も引き起した．その一つは情報に関するものである．ブラックホールからの輻射の放出は，地平面の形成のさいに，古典的な描像では消し去られた情報を，輻射が運ぶことができる可能性を生み出してしまう．輻射が完全に熱的であれば，そこには情報は含まれない．しかし，外に出ていく光子や重力子は熱的な黒体輻射スペクトルをしているが，同時に情報を含んだ弱い相関をもつ可能性がある．その情報は，ブラックホールの内部からのものではなく，地平面のすぐ外側の仮想的な光子や重力子からのもの

であって，それはブラックホールを形成する過程で地平面を横切って崩壊する物質の状態に影響されたものであり，それらは上述のような過程を経て現実の光子や重力子になるのである．この考え方が正しいのかどうか，原理的にどのような情報が外に出ていく輻射によって回復されるのか，といったことは物理学者の間でも結論の出ていないことがらである．

ホーキング輻射はまた，量子重力の完全な理論をつくりあげるにあたっての試金石ともなる．物理学者は，ホーキング輻射や，ブラックホールのエントロピーといったものが導かれることを示すことで，新しい量子論をテストすることになる．それは，新しい理論が一般的にも正しいことを示す十分条件ではなく，必要条件である．

11.6 文　　献

Karl Schwarzschild がシュワルツシルト解を発見したときの話は特別なものである．それについては，MacTutor 数学史文庫にある J.J. O'Conner と E.E. Robertson のオンライン Schwarzschild 伝を参照のこと．その URL は 2008 年現在，以下のところにある．

www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Schwarzschild.html

近日点移動と光の曲りは一般相対論の二つの古典的な検証である．別の理論は違う結果を予言する．これについては Will (1993, 2006) をみよ．光の曲りの観測と，それがもたらした Einstein の名声については McCrea (1979) に手短で面白い説明がある．重力レンズについて詳しく知りたい場合は，Wambsganss (1998)，Schneider ら (1992)，Schneider (2006) や Perlick (2004) 参照．

カー・メトリックはシュワルツシルト・メトリックよりも対称性が少なく，したがって粒子の軌道は保存量がより少なく，その解析はより難しいと思うかもしれない．驚くべきことに，これは正しくない．赤道面にのらない軌道に対してさえ，エネルギー，角運動量そして解釈が困難であるが θ 運動に附随した量という三つの保存量がある．この驚くべき性質はカー・メトリックでの電磁波や重力波を支配している波動方程式にもあてはまる．これらの方程式は適当な座標系で完全に変数分離できるのである．このことの最初の証明は Teukolsky

(1972) で与えられた．詳しい議論は Chandrasekhar (1983) をみよ．

ブラックホールの熱力学は, Carter (1979) に詳しく取り扱われている．曲った時空での場の量子論は, Wald (1994) で議論されている．この問題は量子重力と関係している．7.5 節であげた文献参照．数値的相対論の研究は急速な進展をしているが, そのうちのある領域はほぼ完成し解説もされている．関心のある読者は Living Reviews in Relativity（http://relativity.livingreviews.org）の数値相対論の項か, もう少し一般的なレベルならば, Einstein Online（http://www.einstein-online.info/）を参照するとよい．

11.7 練 習 問 題

1 シュワルツシルト・メトリックで, ある半径 $r \gg M$ と E, L をもつ軌道にある粒子または光子を考える．時空が実際に**平坦**だとしたら, 粒子は座標中心 $r = 0$ から距離 $b \equiv L/(E^2 - m^2)^{1/2}$ を通る直線となることを示せ．この比 b は**衝突パラメーター**とよばれる．また式 (11.12) から導かれる光子軌道も, b だけに依存することを示せ．

2 式 (11.17) と式 (11.18) を示せ．

3 $\tilde{L}^2 = 25M^2$, $\tilde{L}^2 = 12M^2$, $\tilde{L}^2 = 9M^2$ の三つの場合に $\tilde{V}^2$ を r/M に対して図示し, 図 11.1 と図 11.3 が定性的に正しいことを確かめよ．

4 星の外側の半径（a）$2.5M$,（b）$4M$,（c）$10M$ でどんな軌道が可能か?

5 活動的な銀河中心核やクェーサーは, 質量 $10^6 \sim 10^9 M_\odot$ のブラックホールを含んでいる．

（a）$-g_{00}$ が "ニュートン" の値 $1 - 2M/R$ と 1%だけ違う半径 $R_{0.01}$ を求めよ．（これを相対論的効果が重要になる領域の境界と考えてよい．）

（b）"ふつう" の星は半径 10^{10} m をもつ．地平面 $R = 2M$ から $R_{0.01}$ の間の空間領域に, そのような星をだいたいいくつ入れられるか?

6 以下の源から遠方の観測者に届く光の波長を計算せよ．

（a）$\Phi = -10^{-6}$（典型的な星）のところで静止している源から波長 6563 Å（H_α 線）で放出される光．

（b）$\Phi = -6 \times 10^{-5}$（エリダヌス座 B の白色矮星 40B に対する値）のとき（a）と同じ光．

（c）質量 $M = 1M_\odot = 1.47 \times 10^5$ cm のブラックホールの外, 半径 $r = 2.2M$ で

静止している源からの（a）と同じ光.

（d）（c）と同じ，ただし $r = 2.02M$ の場合.

7　時計がシュワルツシルト・メトリックで，$r = 10M$ の円軌道にある.

（a）一軌道の間にどれだけその時計の時間が経過するか?（軌道にわたって固有時間 $\mathrm{d}\tau = |\mathrm{d}s^2|^{1/2}$ を積分せよ.

（b）その時計は1周期ごとに遠方の観測者に信号を送る．遠方の観測者が測る引き続く二つの信号の時間間隔を求めよ.

（c）第二の時計を最初の時計の軌道のそばの $r = 10M$ に静止させておく.（ロケットがその時計をそこにとどめておく.）軌道を回っている時計がそばを引き続いて通る間に，静止している時計が測る経過時間を求めよ.

（d）$M = 14M_{\odot}$ のとき，$r = 6M$ での軌道に対して（b）の問を秒で計算せよ．これはCygX-1のX線スペクトルで期待される最短の揺らぎである．その理由は何か?

（e）（d）の軌道を回っている“時計”がアルテミスとする．ブラックホールの遠方でそれに対して静止している彼女の双子の姉妹ダイアナが，40年過ごす間にアルテミスはいくつ年をとるか?

8　（a）式 (11.20) と式 (11.24) を導け.

（b）式 (11.26) と式 (11.28) を導け.

9　（この問題はコンピューターを必要とする.）

（a）$\tilde{E}^2 = 0.91$ と $(\tilde{L}/M)^2 = 13.0$ のときの粒子の軌道に対して（すなわち，r/M を ϕ の関数として）式 (11.26) あるいは式 (11.28) を数値積分せよ．一つの軌道から次の軌道までの近日点移動を式 (11.37) と比較せよ.

（b）$\tilde{E}^2 = 0.95$ と $(\tilde{L}/M)^2 = 13.0$ のとき数値積分せよ．初期の動径速度が負ならば，この粒子が $r = 10M$ から地平面に届くまでどれだけの固有時間を要するか?

10　（a）与えられた $\tilde{L}$ の値に対して $m \neq 0$ の粒子がシュワルツシルト地平面に到達するための最小の $\tilde{E}$ の値を求めよ.

（b）この結果を**衝突パラメーター** b で表せ（練習問題1参照).

（c）逆にある与えられた b の値に対して，$m \neq 0$ の粒子がシュワルツシルト地平面に到達するための最大の $\tilde{L}$ の値を求めよ．得られた結果を図 11.3 と関係づけよ.

11　式 (11.28) の右辺は u の多項式である．u^3 の項がどのように導かれたかをたどり，もし式 (11.9) に対応するニュートン理論での式を使ったとしたら，その項は存在しないことを示せ．この項を軌道運動エネルギーの赤方偏移効果として解釈せよ．また図 11.1 の曲線に最大値があるのは，この項のためであることを示せ.

12　（a）式 (11.32) が式 (11.31) の解であることを示せ.

（b）式 (11.32) から式 (11.33) を導き，デカルト座標に変換することによって，それが楕円を表すことを示せ．

13　（a）y が小さいという近似で式 (11.34) を導け．それは何に対して小さくなければならないのか?

（b）式 (11.34) から式 (11.35) と式 (11.36) を導け．

（c）与えられた $\tilde{E}$ と $\tilde{L}$ に対して，$y=0$ が正しい円軌道ではないという式 (11.36) の後の注意を，式 (11.20) と式 (11.21) を用いて y の正しい値を求め，それを式 (11.36) の y_0 と比べることによって確かめよ．

（d）式 (11.13) から "ニュートン領域" すなわち $r \gg M$ のところで内部転回点をもつ粒子は，$\tilde{L} \gg M$ をもつことを示せ．これを用いて式 (11.37) から式 (11.38) に至る過程を確かめよ．

14　太陽からの距離と軌道周期が与えられた次の惑星について，1 軌道あたりと 1 年あたりの近日点移動を計算せよ．金星 (1.1×10^{11} m, 1.9×10^{7} s)，地球 (1.5×10^{11} m, 3.2×10^{7} s)，火星 (2.3×10^{11} m, 5.9×10^{7} s)．

15　（a）式 (11.49) から式 (11.51) を導き，それが原点から距離 b を通る直線を表すことを示せ．

（b）式 (11.49) から式 (11.53) を導け．

（c）式 (11.53) を積分して式 (11.54) を求めよ．

16　以下のようにしてヌル測地線の曲りをその経路上至るところで計算せよ［Ward (1970) 参照］．

（a）式 (11.54) は次のように解ける．

$$bu = \sin(\phi - \phi_0) + \frac{M}{b}[1 - \cos(\phi - \phi_0)]^2 + O\left(\frac{M^2}{b^2}\right) \tag{11.115}$$

（b）シュワルツシルト座標で，次のベクトル

$$\vec{v} \to -(0, 1, 0, \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}r) \tag{11.116}$$

は位置 r で静止している観測者がみる光子の経路に接している．この観測者が測った図 11.16 の角 α は次のようになることを示せ．

$$\cos\alpha = (\vec{v} \cdot \vec{e}_r)/(\vec{v} \cdot \vec{v})^{1/2}(\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r)^{1/2} \tag{11.117}$$

ここで $\vec{e}_r$ は成分 $(0,1,0,0)$ をもつ．$\phi - \pi + \alpha$ が星の位置の**見かけの**角度となり，式 (11.115) から $M=0$ なら（曲りがない場合），$\phi - \pi + \alpha = \phi_0$ であることを示せ．

（c）$M \neq 0$ のとき，曲りの大きさを M/b の 1 次まで計算せよ．

$$\delta\phi \equiv (\phi - \pi + \alpha) - \phi_0 \tag{11.118}$$

式 (11.117) のドット積を計算するさいにシュワルツシルト・メトリックを使うことを忘れないようにせよ．結果は次のようになる．

$$\delta\phi = \frac{2M}{b}[1 - \cos(\phi - \phi_0)] \tag{11.119}$$

これを観測者の位置 r で書き直すと

$$\delta\phi = \frac{2M}{r}\frac{1 - \cos(\phi - \phi_0)}{\sin(\phi - \phi_0)} \tag{11.120}$$

(d) $M = 1M_\odot = 1.47\,\mathrm{km}$，$r = 1\,\mathrm{AU} = 1.5 \times 10^6\,\mathrm{km}$ とする．2×10^{-3} 秒角の精度で角度が測れるとすると，天球上でどれだけ太陽から離れたところでこの光の曲りが検出できるか？

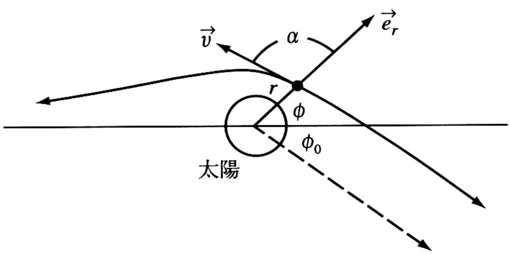


図 11.16　太陽による光の曲り

17　式 (11.115) を別の問題に応用することができる．シュワルツシルト・メトリックでの円軌道にある衛星が規則的にパルスを放出するとする．遠方の観測者がそのパルスを受け取る時間を計算しよう．これはそのうちの一つがパルサーであるほぼ等しい質量の二つの中性子星からなる連星パルサー系での問題の単純化である (9.4 節参照)．これについては Damour と Deruelle (1986) をみよ．

(a) 式 (11.115) で与えられる軌跡に沿って，座標時間は次のように経過することを示せ．

$$\mathrm{d}t/\mathrm{d}\phi = b\left[(bu)^2\left(1 - \frac{2M}{b}bu\right)\right]^{-1} \tag{11.121}$$

(b) これを積分して位置 u_E，ϕ_E で放出され，位置 u_R，ϕ_R で受け取られる光子の座標飛行時間を求めよ．$u_R \ll u_E$ とする．

(c) 式 (11.115) は，(u_R, ϕ_R) と (u_E, ϕ_E) のどちらでも満たされることから，次の

式を M と u_R/u_E の 1 次まで表せ．

$$\phi_R - \phi_0 = \frac{u_R}{u_E}\sin(\phi_E - \phi_R)\Big\{1 + \frac{u_R}{u_E}\cos(\phi_E - \phi_R) + Mu_E[1 - \cos(\phi_E - \phi_R)]^2/\sin^2(\phi_E - \phi_R)\Big\} \tag{11.122}$$

$$b = (1/u_R)\{\phi_R - \phi_0 + Mu_E[1 - \cos(\phi_E - \phi_R)]^2/\sin(\phi_E - \phi_R)\} \tag{11.123}$$

(d) (b) で得られた結果にこれらの式を用いて，$\delta\phi_E$ の 1 次までで (u_E, ϕ_E) と $(u_E, \phi_E + \delta\phi_E)$ で放出されたパルスの飛行時間の差 δt を計算せよ．[パルスを受け取る観測者は (u_R, ϕ_R) に固定されている．]

(e) 円軌道 $u_E =$ 一定，$\phi_E = \Omega t_E$ にあるパルスの放出源に対して，引き続く二つのパルスの到着時間間隔への相対論的補正を観測者の "時間" Ωt_R の関数として図示せよ．もともとの仮定 $M/b \ll 1$ の観点から，その図が使える範囲を考えよ．

18　球面上の距離の表現式 (10.2) を用いて，図 11.8 の $\theta = 0$ 上のすべての点が物理的には同じ点であることを示せ．

19　式 (11.59) と式 (11.60) を示せ．

20　(a) シュワルツシルト・メトリックを用いて，ゼロでないすべてのクリストッフェル記号を計算する．

$$\Gamma^t{}_{rt} = -\Gamma^r{}_{rr} = \frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \qquad \Gamma^r{}_{tt} = \frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

$$\Gamma^r{}_{\theta\theta} = \Gamma^r{}_{\phi\phi}/\sin^2\theta = -r\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

$$\Gamma^\theta{}_{\theta r} = \Gamma^\phi{}_{\phi r} = \Gamma^\theta{}_{\phi\phi}/\sin^2\theta = \frac{1}{r} \tag{11.124}$$

$$\Gamma^\phi{}_{\theta\phi} = \cot\theta$$

その他の成分はゼロか，対称性から得られることを示せ．（メトリックが，変換 $t \to -t$，$\phi \to -\phi$ の下で変らないことを用いて，ある成分がゼロになることを示す．）

(b) (a) あるいは 6 章の練習問題 35 の結果を用いて，リーマン・テンソルのゼロでない成分は，以下のものと，それからリーマン・テンソルの対称性により得られるものだけであることを示せ．

$$R^t{}_{rtr} = -2\frac{M}{r^3}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

$$R^t{}_{\theta t\theta} = R^t{}_{\phi t\phi}/\sin^2\theta = M/r^5$$

$$R^\theta{}_{\phi\theta\phi} = 2M\sin^2\theta/r^5 \tag{11.125}$$

$$R^r{}_{\theta r\theta} = R^r{}_{\phi r\phi}/\sin^2\theta = -M/r^5$$

(c) これらの成分を，シュワルツシルト座標に準拠した**直交**基底に対する成分に変換せよ．r の大きなところでそのすべての成分が r^{-3} のようにふるまうことを示せ．

(d) 基底のとり方によらない量 $R^{\alpha\beta\mu\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu}$ を計算し，これが $r \to 0$ で特異になることを示せ．

21　$m \neq 0$ の粒子が質量 M のシュワルツシルト・ブラックホールの地平面に向かって動径方向に落下していく．その測地線は，$\tilde{E} = 0.95$ をもつとして以下の問に答えよ．

(a) $r = 3M$ から $r = 2M$ に達するまでに要する固有時間を求めよ．

(b) $r = 2M$ から $r = 0$ に達するまでに要する固有時間を求めよ．

(c) シュワルツシルト座標基底で，$r = 2.001M$ での四元速度の成分を求めよ．

(d) その粒子が $r = 2.001M$ を通り過ぎるとき，遠方の定常的な観測者に光子を動径方向に送った．その光子が観測者に達したときの赤方偏移を求めよ．粒子の速度によるドップラー偏移も忘れないように．

22　物体に働く潮汐力の目安は測地線偏差の式 (6.87) で与えられる．1 メートルあたり $400\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ の加速度勾配が人間の体にかかったとき，体がこなごなになるとする．そのとき練習問題 21 の軌道上の人間が地平面にとどくまで十分長く生きられるための最小のシュワルツシルト・ブラックホールの質量を計算せよ．

23　式 (11.67) を証明せよ．

24　図 11.11 のクルスカル–スゼッケル座標系の中心，$u = v = 0$ で時空が平坦であることを示せ．

25　平均密度 ρ で半径 $R \gg M$ の球状の星を破壊するのに必要な潮汐力を評価せよ．この結果を練習問題 22 に用いて質量 M_H のブラックホールの潮汐半径 R_T を，ブラックホール近くの密度 ρ の星が破壊される距離として定義せよ．$\rho = 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$（典型的な太陽の密度）のとき $R_\mathrm{T} = 100M_\mathrm{H}$ となるのはどんな質量 M_H か?

26　カー・ブラックホールの表面積は，式 (11.81) で定義した r_+ を用いて式 (11.85) で与えられる．質量 m_1，m_2，角運動量それぞれ m_1a_1，m_2a_2 の任意の二つのブラックホールの総面積は，質量 $m_1 + m_2$，角運動量 $m_1a_1 + m_2a_2$ の一つのブラックホールの面積よりも小さいことを示せ．

27　“定常限界” の式 (11.80) は r，θ，ϕ が一定の曲線が時間的であるような時空の領域の限界であることを示せ．

28　(a) 式 (11.87) を示せ．

(b) 式 (11.89) を示せ．

29　カー・メトリックにおいて，赤道“面”($\theta=\pi/2$) 内の点を通り，そこでの接線がその面に接する ($p^\theta=0$) ような測地線はつねにその面内にとどまることを示せ（あるいは対称性の観点から議論せよ.）

30　式 (11.91) と式 (11.92) を導け.

31　ZAMO の四元速度の成分は，$U^0=A$，$U^\phi=\omega A$，$U^r=U^\theta=0$ であることを示せ．ここで $A=g_{\phi\phi}(-D)$，D は式 (11.87) で定義される.

32　ペンローズ過程がブラックホールの角運動量を減らすことを示せ.

33　式 (11.100) から式 (11.101) を示せ.

34　(a) 表面積定理を用いて，質量 M の二つのシュワルツシルト・ブラックホールが衝突して一つのシュワルツシルト・ブラックホールができるときに解放される**最大**のエネルギーを計算せよ.

(b) 同じことを質量 m_1，m_2 のブラックホールの場合について行い，その結果を m_2 を固定して $m_1\to 0$ のときに，m_1 に対する割合として表せ.

35　太陽は約 25 日の周期で回転している.

(a) その回転を球の一様な剛体回転と理想化する．するとその慣性モーメントは $\frac{2}{5}M_\odot R_\odot^2$ となる．ここで $M_\odot=2\times10^{30}\,\mathrm{kg}$，$R_\odot=7\times10^8\,\mathrm{m}$，SI 単位系で，$J_\odot$ を計算せよ.

(b) これを距離化した単位に変換せよ.

(c) もし太陽の全体が重力崩壊して突然ブラックホールになったとすると，質量 $M_\odot$ 角運動量 $J_\odot$ のカー・ブラックホールになるだろう．そのカー・パラメーター，$a_\odot=J_\odot/M_\odot$ は，cm でいくらか?　比 $a_\odot/M_\odot$ はいくらか?　$a>M$ の場合遠心力が崩壊をくいとめるか，あるいは回転不安定性を引き起すので，そのようなカー・ブラックホールは決して形成されないと期待される．したがって太陽のようなありふれた星でさえ，ブラックホールになるためには角運動量を取り除く必要があることをこの問題の結果は示している.

(d) 電子は，$a<M$ のカー・ブラックホールをつくれないほどの角運動量をもっているか?（その電荷は無視せよ.）

36　(a) 質量 M を固定したカー・ブラックホールに対して，最大の表面積は，$a=0$（シュワルツシルト）のときに得られることを示せ.

(b) 逆に表面積を固定した場合，最少の質量は $a=0$ に対して得られることを示せ.

37　(a) ある観測者が，エルゴ領域の外のカー・メトリックの赤道面 ($\theta=\pi/2$) で r，ϕ 一定のところにいる．彼は鏡を使って光子が赤道面内の r 一定の円軌道に沿って動くようにする．するとその光子の世界線は $\mathrm{d}r=\mathrm{d}\theta=0$ のヌル線であるが，もちろん

測地線ではない．ϕ が増加する方向に光子を放射してから，それがブラックホールを1周してもどってくるまでに経過する座標時間 t はいくらか？ ϕ が減少する方向に放射された光子について同じことを計算して，結果が違うことを示せ．光子は放射されたときの振動数から赤方偏移を受けてもどってくるか？

(b) ブラックホールのまわりを，式 (11.77) で与えられる角速度をもち，$r =$ 一定の軌道で回っている別の観測者を考える．(a) と同じ鏡を使って，彼は光子を両方向に放出して，それがもどってくるまでに経過する彼の座標時間を測定する．この場合，二つの結果は等しいことを示せ．(これが本文で定義された ZAMO である．)

38 カー・メトリックで，$m \neq 0$ の粒子の赤道面内の運動を考える．式 (11.5) と式 (11.6) で定義された $\tilde{E}$ と $\tilde{L}$ を用いて式 (11.91) から (11.95) に対応する式を求めよ．$a = 0.5M$，$\tilde{L}/M = 20$，12，6 の場合に $\tilde{V}_{\pm}$ を図示せよ．軌跡の性質をしらべよ．任意の a に対して円軌道の場合 $\tilde{E}$，$\tilde{L}$，r の間の関係を二つの回転の向きについて決定せよ．安定な円軌道の最小半径を求めよ．エルゴ領域での円軌道では何が起るか？

39 (a) 式 (11.105) と黒体輻射の法則, 光度 $= \sigma A T^4$ から式 (11.109) を導け．ここで A は表面積，σ はステファン–ボルツマンの輻射定数，$\sigma = 0.567 \times 10^{-7}\ \mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-4}}$ である．

(b) 多くの電子–陽電子対を生成するためには，ブラックホールはどれだけ小さくなければならないか？

12
宇　宙　論

12.1　宇宙論とはどういうものか?

全体としての宇宙　宇宙論は宇宙を全体として扱う研究である：その歴史，進化，組成，運動．宇宙論研究の主な目的は宇宙の大域的構造を理解することであるが，それと同時にビッグバンから膨張してきた宇宙に現れる銀河，星，惑星，人間などすべての小スケールの構造の詳細の発展に対する舞台と出発点を与える．従って宇宙論と天文学，物理学そして生物学の間の関連は，科学研究の実り多い分野である．さらに天文学者がビッグバンの詳細な証拠をしらべられるようになったように，宇宙論は超高エネルギーでの物理法則がどのようなものか，物質の構成要素（電子，陽子，中性子）がどのようにできたのかなど物理学の根本問題を扱えるようになりつつある．究極的には自然界のあらゆる系や構造の起源，さらに自然界を支配している物理法則の起源ですら宇宙論のある面に帰着されるのかもしれない．

大きなスケールで宇宙を理解できるというわれわれの能力は，基本的に一般相対論によっている．これがなぜかをみるのは難しくない．ニュートン理論は，大ざっぱにいって系の質量 M がその大きさ R に比べて小さい限り，つまり $M/R \ll 1$ のとき重力の十分よい記述である．もし M/R が 1 に近いような系ではニュートン理論を一般相対論に置き換えなければならない．これは系の半径 R が M より速く小さくなるときに起る．それは，コンパクト星，あるいは

崩壊した対象の領域である：中性子星やブラックホールは，それらが含む質量に対して非常に小さな半径をもっている．しかし系の質量がその半径よりも速く大きくなるときにも相対論的な領域となる．宇宙論がその場合である：もし空間がいたるところほぼ同じ密度の物質で満ちているなら，半径 R を大きくしていくと質量は R^3 で大きくなり，M/R も非常に大きくなり，一般相対論が重要になる．

一般相対論が利き始めるスケールはどのくらいだろう？　太陽の中心からの距離 R を増やしていこう．太陽はどこでも相対論的ではない，いったん R が太陽半径 $R_\odot$ よりも大きくなると，質量 M は次の星にとどくまではほとんど増加しない．太陽がその一員であるような星の系は銀河で，約 15 kpc （1 pc と表す 1 パーセクは約 3×10^{16} m）の半径内に約 10^{11} の星を含んでいる．この系は，太陽と同程度の $M/R\sim10^{-6}$ である．したがって銀河の力学には相対論は必要でない．（この議論は銀河を全体として扱うときに適用される：銀河中心を含む小さな領域はブラックホール，あるいは他の相対論的天体によって支配されている．）銀河は，メガパーセク Mpc 程度の広がりの体積中にしばしば数千個を含む銀河団として観測される．そのような銀河団では，$M/R\sim10^{-4}$ であるが，それを記述するにはまだ一般相対論は必要でない．

典型的な銀河団のサイズよりもさらに大きなスケールにいくと，宇宙論の領域に入ってくる．

宇宙論的な描像では，銀河あるいは銀河団でさえ非常に小さな構造で，より大きな宇宙における原子のようなものである．現在のわれわれの望遠鏡は，10 Gpc よりも遠方の銀河を観測することができる．このような大きなスケールでは，銀河の個数密度はほぼ一定，また至るところ銀河のタイプの分布もほぼ同じで，宇宙は一様であると観測される．後でみるように，質量—エネルギーの平均密度はだいたい $\rho=10^{-26}\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ である．この密度をとると，質量は $M=4\pi\rho R^3/3$ は観測可能な宇宙の領域以内である $R\sim6$ Gpc に対して R に等しくなる．したがって望遠鏡がわれわれに明らかにする宇宙を理解するためには，一般相対論が必要である．

事実，一般相対論は物理学者に宇宙論を研究する最初の首尾一貫した枠組を与えた．われわれは後で観測された一様性を示す境界も端もなく，至るところ

一様な宇宙を記述するメトリックが存在することをみるだろう．ニュートンの基礎方程式 $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ の解は，境界条件を課す外側の端がなければ不定であるので，ニュートン重力ではそのようなモデルをつくることができない．したがってアインシュタインをもってして，はじめて宇宙論は物理学と天文学の一分野となる．

逆の質問をすることができる：もしわれわれが全体としての構造が非常に相対論的な宇宙に住んでいるとしたら，宇宙の全体を知ることなしにどうやって局所的な領域を研究できるのだろう？　これまでの章でやってきたようになぜ実際には非常に相対論的な宇宙に存在しているにもかかわらずあたかもそれらが漸近的に平坦な時空に埋め込まれたかのように中性子星やブラックホールの研究に一般相対論を適用できるのだろう？　一般相対論の助けを借りずどのように天文学者は個々の星を，地質学者は個々の惑星を，そして生物学者は個々の細胞を研究できるのだろう？　もちろん答は一般相対論では時空は局所的に平坦だからである：実験を局所的な領域で行う限り大域的な幾何を知る必要はない．この局所と大域の分離は，大きな一様密度の系の中の局所的な重力場さえ遠方の境界条件，すなわち宇宙の遠くの“果て”の形に依存するニュートン重力では不可能である（12.6 節の練習問題 3）．したがって一般相対論はわれわれに宇宙を研究させてくれるだけでなく，宇宙論以外の科学を一般相対論を知ることなしに研究できる理由を説明している．

宇宙論の舞台　最近の地上そして宇宙からの天文観測の発展で宇宙論は精密科学となった．観測が明らかにした宇宙の基本的な描像は，たとえば 10 Mpc よりもはるかに大きな距離で平均化すると驚くほど単純である．それは至るところ同じ割合で膨張している一様な宇宙である．また宇宙は等方的である：どの方向も平均すると同じにみえる．宇宙は温度が 2.725 K の黒体熱スペクトルをもった放射で満たされている．膨張しているということは，宇宙は有限の年齢をもっている，あるいは少なくとも非常な高密度から有限の時間膨張してきたことを意味する．熱放射は宇宙が最初非常に高温度だったこと，そして膨張して冷えてきたことを示唆する．膨張は宇宙論の難問の最古のものであるオルバースのパラドックスを解決する．夜空は暗いのは無限に広がった一様な宇宙のすべての星からの光を受け取らないからではなく，宇宙の年齢の間にわれわ

れにとどくことができる近くの星からの光しか受け取らないからである．

しかし膨張はほかに，宇宙はどのように現在の姿に進化してきたのかとか，宇宙のはじめはどんなものだったのかという深遠な問題を引き起す．最初の星はどのように形成されたか，なぜそれらが銀河として群れたのか，なぜ銀河は銀河群をつくるのかということを知りたい：どのように密度のでこぼこが 10 Mpc よりも小さなスケールで宇宙のきわめて変化に富む構造を形成したのか．またどのように元素が形成されたのか，通常の原子核が存在しないほど高密度，高温度での宇宙はどんなものだったのか，非常に高温の初期宇宙は加速器が到達できるエネルギーよりも高いエネルギーでの物理法則についてどんなことを教えてくれるのかということも知りたい．観測されている宇宙の一様性と等方性は物理的に説明されるのかも知りたい．

これらの疑問に答えることは，われわれの基礎物理に対する理解の最前線で非常に深遠な問題のいくつかを探究することになる．一様性の問題はごく初期の宇宙が**インフレーション**と物理学者がよぶ急激な指数関数的膨張をすることで解決することができる．これはもし実験室で到達できる以上の高エネルギーの物理法則が適切な形であれば可能であり，またそうなっていると観測される銀河や銀河団をつくる密度揺らぎを説明できるというボーナスまである．後にみるように宇宙の物質のほとんどは，光を決して放出しないので物理学者が**暗黒物質**とよぶ未知の形態であるようだ．さらに不思議なことに宇宙には膨張を加速する働きをする負の圧力をもつ相対論的なエネルギー密度が充満している：物理学者はそれを**暗黒エネルギー**とよんでいる．暗黒エネルギーとインフレーションの不思議さは超高エネルギーでの物理法則のよりよい理解でのみ解決することができる．したがって理論物理学者はよりよい理論の鍵を得るために天文学的な答えを探している．

現代宇宙論はすでにそのうちのいくつかに答を出している．そしてその答は急速なペースでより正確にそして決定的になっている．この章は現時点（2008年）でのわれわれの理解の一側面である．この教科書で扱っているどの分野以上に宇宙論は新たな洞察，驚き，革命さえ約束する研究分野である．

12.2　宇宙論的運動学：膨張宇宙の観測

宇宙のより深い疑問を理解する前に，膨張宇宙の概念の記述と研究ができる必要がある．この節では一様膨張する宇宙を記述するメトリックを求め，天文学的観測がどのように膨張の歴史を測定するかを示し，そして膨張宇宙の物理的過程を議論する枠組を発展させる．次の 12.3 節ではわれわれのモデルにアインシュタイン方程式を適用し，宇宙がどのように膨張するかを考える．

宇宙の一様性と等方性　一般相対論を適用するには，観測される大規模スケールでの驚くべき一様性を使うのが最も簡単なやり方である．10 Mpc よりもはるかに大きなスケールでは，一様な平均密度のみならず，銀河のタイプ・銀河団の密度・銀河中の化学組成や構成する星の種類といった性質も一様だと見なせる．もちろん非常に遠方を観測すると，われわれが観測する光がとどくまでに要する時間だけ遠い過去をみていることになる．十分遠い過去をみれば若い宇宙をみることになり進化がわかる．しかしわれわれがみる進化は，すべての方向，初期宇宙のお互いに非常に離れた領域をみたとしても同じようにみえる．したがって大きなスケールでは宇宙は一様であると結論する．さらに 10 Mpc よりもはるかに大きなスケールで宇宙はどの点からも等方的で，特別な方向はないようにみえる[1)]．

観測される宇宙の三番目の特徴は，その膨張の一様性である．平均的にはあらゆる銀河がわれわれからの距離に比例した速度で遠ざかっているようにみえる．この後退速度はその発見者 Edwin Hubble の名をとってハッブル流とよぶ．この膨張の様子は，“風船” モデル（図 12.1 参照）で簡単にみることができる．風船の上に等間隔で点を描き，膨らませる．膨らむにつれて風船面上での任意の 2 点間の間隔はその距離に比例した割合で長くなる．したがって，どの点からみても他の点は距離に比例した速度で遠ざかっていくことになる．この比例関係は点の分布の時間的な一様性を保存している．すなわち宇宙におけるわれ

1) たとえば至るところで一方向を指し，その強さが一定の大規模スケールの磁場をもつなら宇宙は一様であるが，非等方的でありうる．他方，非一様宇宙は各点で等方とはなりえない．全部ではないにしても，宇宙のたいていの場所からは空のある方向が密集してみえるからである．

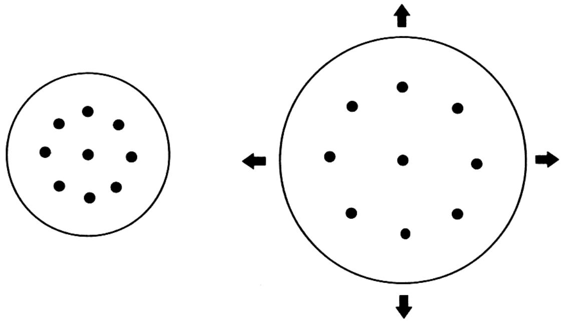


図 12.1　球が大きくなると，相互の距離もその大きさに比例した割合で増大する

われの位置は，すべてがわれわれから遠ざかっているようにみえたとしても，特別ではないことを意味する．われわれはもはや他の点がそうでないように宇宙膨張の‘中心’ではない．ハッブル流は，宇宙がわれわれのいる特別な場所のまわりを回転していない（あるいは遠ざかってはいない）という考えであるコペルニクスの原理と首尾一貫している．

ハッブル膨張はもう一つの非等方性の可能性を与える．もしすべての点でたとえば x 方向が y 方向よりも速い後退速度を観測するなら，宇宙は一様であるが非等方でありうる．われわれのモデルでは，風船が楕円形であれば，そういうことが起る．この場合，その形を保つには長軸方向が他の軸方向より速く膨張することが必要である．われわれの宇宙では何ら測定可能な速度の非等方性はもっていない．この驚くべき単純性のため，後退速度と距離の関係は単一の比例定数 H で記述できる．

◆
$$v = Hd \tag{12.1}$$

天文学者は, H をハッブル・パラメーターとよぶ．その現在の値は, ハッブル定数 H_0 とよばれる．H_0 の値は以下で議論する方法によって, 天文学者の奇妙ではあるが有用な単位で $H_0 = (71 \pm 4)\,\mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$ と測定されている．この値をふつうの単位では, $1\,\mathrm{Mpc}$ を $3.1 \times 10^{22}\,\mathrm{m}$ を使って, $H_0 = (2.3 \pm 0.1) \times 10^{-18}\,\mathrm{s^{-1}}$ となる．幾何学的単位では, 光速度 c で割ることで, $H_0 = (7.7 \pm 0.4) \times 10^{-27}\,\mathrm{m^{-1}}$ となる．ハッブル定数からハッブル時間 $t_H = H_0^{-1} = (4.3 \pm 0.2) \times 10^{17}\,\mathrm{s}$ が

でてくる．これは約 140 億年であり，宇宙膨張の時間スケールである．宇宙年齢は，過去の膨張速度が変化するため，これと正確に同じではないが，宇宙が進化してきた時間のだいたいのオーダーを与える．

上の議論は同時の相対性を無視していると思うかもしれない．宇宙が時間的に変化して (膨張して) いるならば, 時間一定の超曲面上で一様等方となるような時間が何らかの形で定義できるかもしれないが, 時間座標をそれ以外のものに選べば, そうでなくなるだろう．そのうえ, 式 (12.1) は $d > 1.3\times10^{26}\ \mathrm{m} = 4200\ \mathrm{Mpc}$ に対して，後退速度が光速度を超えるので正確ではない．こうした反論はいずれも正しい．上の議論は局所的なもので (後退速度が $\ll 1$ のときのみ正しい)，われわれという特別な観測者の立場を採用している．しかし幸いなことに，一様宇宙の平均的な性質をしらべるには十分大きな 1000 Mpc の距離にわたっては，宇宙論的な膨張はゆっくりで実際上は非相対論的な速度である．さらに近傍の銀河のランダム運動の平均的な速度は $100\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$ より小さく，その値は非相対論的で，宇宙論的距離にわたる膨張速度よりもはるかに小さい．

したがって膨張宇宙の正しい相対論的記述は，われわれの近傍では**特別の時間の選び方**があって，その時間一定の超曲面では一様等方で，その超曲面の任意の場所で静止している任意の観測者の局所慣性系で式 (12.1) が正しいということになる．

特別な宇宙論的な基準系が存在するということは，一見驚くべきことである：特別な基準系の存在は，特殊相対論と矛盾するのではないか?　何も矛盾はない：物理法則それ自体は観測者が変っても不変である．しかし宇宙はたった一つで，その現れ方は便利な基準系を定義する．たとえば太陽系を研究するとき，座標系の原点を 1900 年 1 月 1 日の木星の位置にとることは馬鹿げている．同様に大域的な一様性によって与えられた単純さを考慮しない座標系で宇宙論を発展させることは馬鹿げている．したがって今後，この特別な時間の定義をもった宇宙論的基準系で話を進める．

宇宙のモデル：宇宙原理　もし宇宙の大域的なモデルをつくろうとしたら，遠すぎてわれわれの望遠鏡では観測できないほど遠い領域についての何らかの仮定をしなければならない．実際には，宇宙の中には到達できない領域として二種類あることに注意すべきである．

第一の領域はあまりにも遠方にあるため，情報をいくら早い時期に送りだしたとしても，われわれのところには到達（ヌル測地線を伝わって）しえないものである．この領域はわれわれの過去の光円錐の外側すべてである．宇宙がわれわれの宇宙のように有限の寿命をもっていれば，そうした領域はふつうに存在する（図 12.2 参照）．この“不可知”領域はある意味では重要ではない：そこで何が起ろうと，われわれの過去の光円錐の内部には影響せず，したがってその領域をどのように取り入れても，宇宙の過去の歴史には何ら影響を及ぼさない．ところが，われわれの過去の光円錐は一種の地平線であって，“粒子的地平線”とよばれる．あらゆる瞬間に“不可知”領域が次々に内部に入ってきて，既知の領域になっていく．したがって，不可知領域がわれわれの未来に実際の影響を及ぼすのである．

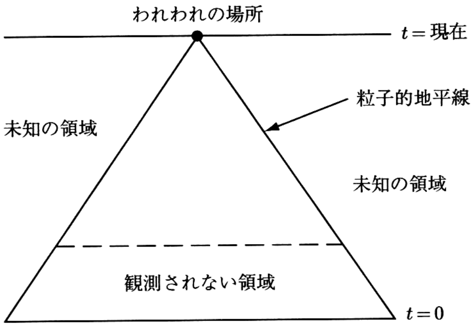


図 12.2　宇宙の過去の歴史を $t=0$ まで模式的に示した時空図．“未知”の領域は，現在の時点では時間が十分たっていないため，そこの情報をわれわれのところに伝えることのできない領域である．“観測されない”領域は途中の物質にじゃまされて不明な領域を表す．

この意味で宇宙論は過去にのみ目を向けた研究であり，過去だけを理解することは確かに役に立つのである．

しかしながら，明日届く情報によって，昨日の“不可知”領域が実際にはたいへん非一様であったということがわかると，それまでの歴史が明らかに特別であったことになり，それについての物理学上ならびに哲学上の困難な問題が引き起されることになるだろう．不可知領域が観測できる領域と非常に似てい

る，特に一様かつ等方であるとわれわれが仮定するのは，このような困難を避けるためである．この考えを採用するのには十分な理由がある．図 12.2 のわれわれの過去光円錐内で 2 人の仮想的な観測者を考えよう．それらは十分宇宙の過去にいてお互いの過去光円錐は交わらないとする．すると彼らはお互いの“粒子的地平線”の外側である．しかしわれわれは彼らの各々の近傍の物理的条件は非常に似ていることを観測することができる．もし彼らが自分たちの粒子的地平線の外側が内側と似ているという原理を適用したとすれば，彼らが正しかったことを確認できる．この原理が他の観測者にも適用できて，われわれには適用できないと期待することは不合理のように思える．

このコペルニクスの原理の現代版を宇宙原理といったり，われわれが宇宙のごくありふれた場所であることから，凡庸性仮定という．これは数学的に非常に強力な（すなわち強い制限を与える）仮定である．われわれはこの仮定を採用するが，未来についての予言はこの凡庸性仮定に強く依存していることを心にとめておこう．

もう一つの到達できない領域は，われわれの過去光円錐内部であるが，観測装置の制限によって情報を得ることができない領域である．この領域には，遠すぎてあまりに暗い銀河とか，重力波のような放射の場合で観測できるほど精巧な技術をもっていないとか，宇宙が電離プラズマではなくなり，電磁波に対して透明になる再結合（以下を参照）前に放射された電磁波のように視界から隠された事象といったものが含まれる．再結合以前はどんな光もそれを超えて（初期から）われわれに届かないので，しばしば光学的地平線とよばれる．しかし重力波はこれ以前でも自由に伝わることができるので，究極的にはこの‘地平線’を越えて観測することができるだろう．こうして光学的地平線は，粒子的地平線のような原理的限界ではない．

宇宙論的メトリック　　宇宙モデルを表すメトリックテンソルは観測される一様性と等方性を組み入れなければならない．したがって宇宙について以下の理想化を採用しよう．(i) 時空は完全に一様で等方である時間一定の超曲面でスライスすることができ，(ii) 銀河の平均的な静止系は同時性のこの定義と一致する．次に共動座標系を採用することで問題をできるだけ簡単にしよう．これは各銀河がランダムな運動をもたないとする理想化で，個々の銀河が固定さ

れた空間座標 $\{x^i, i = 1, 2, 3\}$ を与える．そして時間座標 t を各銀河の固有時間に選ぶ．宇宙の膨張—銀河間の固有距離の変化—は，時間に依存したメトリックの成分で表す．こうしてもしある瞬間 t_0 で時間一定の超曲面が線素

$$\mathrm{d}\ell^2(t_0) = h_{ij}(t_0)\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{12.2}$$

（この h は線形理論とは何の関係もない）をもてば，超曲面の膨張は以下のように表される．

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\ell^2(t_1) &= f(t_1, t_0)h_{ij}(t_0)\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \\ &= h_{ij}(t_1)\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\end{aligned} \tag{12.3}$$

この形はすべての h_{ij} が同じ率で増加することを保証している．そうでなければ膨張は非等方になる（12.6 節の練習問題 4 参照）．一般に方程式 (12.2) は次のように書ける．

$$\mathrm{d}\ell^2(t) = R(t)h_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{12.4}$$

ここで R は t_0 で 1 に等しい全体的なスケール因子であり，h_{ij} は t_0 での超曲面のメトリックに等しい定数メトリックである．h_{ij} がどんな形をとることができるかはすぐにわかる．

まず時間一定の超曲面のメトリックを 4 次元時空のメトリックへ拡張する．一般にそれは次のようになる．

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + g_{0i}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x^i + R^2(t)h_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{12.5}$$

ここで t は $\mathrm{d}x^i = 0$ に沿っての固有時間なので $g_{00} = -1$ である．しかし $t =$ 一定によって与えられた同時の定義が銀河に固定された局所ローレンツ系によって与えられたものと一致するとすれば（上の（ii）の理想化），共動座標系では $\vec{e}_0$ は $\vec{e}_i$ と直交しなければならない．このことは $g_{0i} = \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_i = 0$ であることを意味する．

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + R^2(t)h_{ij}\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j \tag{12.6}$$

h_{ij} はどんな形をとるだろう？　空間は等方的なので，座標原点のまわりで球対称でなければならない．もちろん座標原点は好きなところに置くことができ

る．球対称星を議論したとき，球対称メトリックはつねに次の形の線要素をとることを示した．

$$dl^2 = e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{12.7}$$

メトリックのこの形は一つの点のまわりだけで等方的であることを意味する．われわれはメトリックが一様であるというより強い条件を要請する．そのための必要条件は，3 次元メトリックのリッチ・スカラー曲率 R がすべての点で同じ値をとることである．以下で驚くべきことにこれが十分条件でもあることを示す．しかし今は単にこれを (12.7) のメトリックに課する次の条件と見なそう．6.9 章の練習問題 35 でリッチ・テンソル $R^i{}_j$ を計算した．または球対称星の線要素（10.7）に対する G_{ij} から $\Phi = 0$ とおくことによって線要素（12.7）に対する G_{ij} が得られることに注意すれば，10 章の球対称時空の議論における式 (10.15)～(10.17) を使うことができる．

$$\begin{aligned} G_{rr} &= -\frac{1}{r^2} e^{2\Lambda}(1 - e^{-2\Lambda}) \\ G_{\theta\theta} &= -r\, e^{-2\Lambda} \Lambda' \\ G_{\phi\phi} &= \sin^2\theta G_{\theta\theta} \end{aligned} \tag{12.8}$$

このテンソルのトレースはスカラーであり，したがって一定値でなければならない．したがってリッチ・スカラーを計算するかわりに 3 次元アインシュタイン・テンソルのトレースが一定値であることを要求しよう．（実際，このトレースはリッチ・スカラーの $-1/2$ である．）そのトレースは

$$\begin{aligned} G &= G_{ij} g^{ij} \\ &= -\frac{1}{r^2} e^{2\Lambda}(1 - e^{-2\Lambda})\, e^{-2\Lambda} - 2r\, e^{-2\Lambda} \Lambda' r^{-2} \\ &= -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} e^{-2\Lambda}(1 - 2r\Lambda') \\ &= -\frac{1}{r^2}[1 - (r\, e^{-2\Lambda})'] \end{aligned} \tag{12.9}$$

一様性の要請は G をある定数 κ とおくことを意味する．

$$\kappa = -\frac{1}{r^2}[r(1 - e^{-2\Lambda})]' \tag{12.10}$$

この式は容易に積分できる.

$$g_{rr} = \mathrm{e}^{2\Lambda} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\kappa r^2 - A/r} \tag{12.11}$$

ここで A は積分定数である．球対称星の場合と同様に $r = 0$ で局所平坦性を要請する（10.5 節と比較せよ）：$g_{rr}(r = 0) = 1$．これは $A = 0$ を意味する．より便利な曲率定数 $k = -\kappa/3$ を定義すると次のように書ける.

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \frac{1}{1 - kr^2} \\ \mathrm{d}l^2 &= \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - kr^2} + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2 \end{aligned} \tag{12.12}$$

この空間がすべての点のまわりで等方的であることはまだ証明していない．われわれが示したことは，式 (12.12) がこの曲率スカラーが一様であるという必要条件を満たす唯一の空間であるということである．こうしてもし等方で一様な空間が存在したら，その空間はある定数 k をもつメトリック (12.12) をもたなければならない.

実際，逆も正しい：式 (12.12) のメトリックは k のどんな値に対しても一様で等方である．このことを次の節で k の正，負，ゼロのそれぞれの場合に示そう．k の符号によらない一般的な証明はたとえば Weinberg (1972) あるいは Schutz (1980b) に与えられている．したがってこの結果を当面認めると，宇宙論的な時空は次のメトリックをもつと結論することができる.

◆
$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + R^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - kr^2} + r^2\mathrm{d}\Omega^2\right] \tag{12.13}$$

これはロバートソン–ウォーカー・メトリックとよばれる．一般性を失うことなく，座標 r のスケールを変えて k が $+1, 0, -1$ の三つのどれかをとるようにできることに注意せよ.

たとえば，$k = -3$ としよう．$\tilde{r} = \sqrt{3}r, \tilde{R} = R/\sqrt{3}$ と定義し直せば，線要素は

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \tilde{R}^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}\tilde{r}^2}{1 - \tilde{r}^2} + \tilde{r}^2\,\mathrm{d}\Omega^2\right] \tag{12.14}$$

となる．しかし k の符号を変えることはどうやってもできない．したがって，われわれが考える必要があるのは，3 種類の空間的な超曲面のみである：$k = (-1, 0, 1)$

3 種類の宇宙　まず，$k = 0$ を考える．任意の時刻 t_0 で，$\mathrm{d}t = 0$ の線要素は

$$\mathrm{d}l^2 = R^2(t_0)\left[\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2\right] = \mathrm{d}(r')^2 + (r')^2\mathrm{d}\Omega^2 \tag{12.15}$$

である．ここで $r' = R(t_0)r$ である．これは明らかに，ユークリッド空間のメトリックである．これが"平坦な"ロバートソン–ウォーカー宇宙である．この宇宙が一様で等方であることは明らかである．

次に $k = +1$ を考える．新しい座標 $\chi(r)$ を

$$\mathrm{d}\chi^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - r^2} \tag{12.16}$$

で定義しよう．この式から

$$r = \sin\chi \tag{12.17}$$

となり，$t = t_0$ の線要素は

$$\mathrm{d}l^2 = R^2(t_0)[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)] \tag{12.18}$$

である．6.9 節の練習問題 33 で，このメトリックは半径 $R(t_0)$ の三次元球面のメトリックであることを示した．このモデルを，**閉じた**とか**球対称的な**ロバートソン–ウォーカー・メトリックといい，宇宙膨張の風船モデルが特にふさわしい（図 12.1 参照）ものである．4 番目の空間次元（三次元球面の中心向きの動径方向）は物理的な意味を**もたない**．その次元での測定は知られている物理法則からは許されない．

最後は $k = -1$ の場合である．同様な座標変換で（12.6 節の練習問題 7）線要素は

$$\mathrm{d}l^2 = R^2(t_0)(\mathrm{d}\chi^2 + \sinh^2\chi\,\mathrm{d}\Omega^2) \tag{12.19}$$

となる．これを**双曲的**とか**開いた**ロバートソン–ウォーカー・モデルという．一つの特別な性質に注意しよう．固有な動径座標 χ が中心から増大していくにつれて，球の円周は $\sinh\chi$ のように増大する．すべての $\chi > 0$ について $\sinh\chi > \chi$ であるので，平坦な時空に比べてこれらの円周は固有半径とともに**より速く**大きくなる．このためこの超曲面は，四次元やもっと高次元のユークリッド空間の閉じた三次元超曲面としては実現**されない**．つまり，三次元球面のように簡

単に絵を描いて示せないのである．空間が“開いている”というのは，$k=+1$ と違って，球の円周が χ とともに単調に増大するためである．空間の自然な境界がないのである．

実際，12.6 節の練習問題 8 で示すように，この幾何学はミンコフスキー空間の超曲面，特に原点から一定の時間的間隔をもった超曲面の幾何学である．この超曲面は任意のローレンツ系で原点から同じ間隔を保つので（間隔はローレンツ不変である），この超曲面は一様で等方である．

距離の指標としての赤方偏移　太陽のまわりの宇宙の小さな領域を研究するとき，天文学者は星や他の天体までの固有距離を測定し，それをわれわれがすでにみたようにパーセク (pc)，あるいは kpc や Mpc で表す．しかしもし天体が宇宙論的な距離にあるなら，天体からわれわれに光がとどくまでに長い時間がかかるので距離という言葉で意味することは少々あいまいになる．その天体が光を放出した時点でのわれわれとの距離は，現在，すなわち現在の時刻における空間超曲面におけるわれわれとその天体までの距離よりはるかに短いだろう．実際，天体はもうすでに存在してないかもしれない：われわれが知っているすべては，われわれの過去光円錐上における現在受け取る光が放出された事象で存在していたということだけである．しかしそのときと現在までの間で爆発，崩壊，あるいはまったく変ってしまってしているかもしれない．したがってわれわれと現在の天体までの距離という概念は，われわれの近傍の天体に対してのようには重要でない．

その代わりに天文学者はふつう距離の違った指標を用いる：それが，天体，たとえば銀河によって放射された光のスペクトルの赤方偏移 z である．ハッブルの法則 (12.1) に従う膨張宇宙において，銀河が遠ければ遠いほど，速い速度でわれわれから遠ざかっている．したがって，赤方偏移は，より大きな赤方偏移がより大きな距離を表すという意味で距離に対するよい指標になっている．もちろん，式 (12.1) に引き続く議論で注意したように銀河の赤方偏移にはそのランダムな局所的な速度による部分も含んでいるが，宇宙論的な距離ではそれは小さな寄与しかもたらさない．しかし近傍の宇宙では赤方偏移のかわりに通常の方法，主に Mpc で距離を測る．

われわれの宇宙モデルで赤方偏移を計算するために，銀河は宇宙論的時刻 t

における ある超曲面上の固定された位置にあるとして，そこで光を放出し時刻 t_0 でわれわれにとどくと仮定しよう．7.4 節の保存量の議論を思い出そう：もしメトリックがある座標に依存しなければ，それに付随する共役運動量は測地線に沿って一定となる．宇宙論的な場合，超曲面の一様性はわれわれの銀河によって放射された光の運動量の共変空間成分は，その経路に沿って一定であることを保証する．われわれの銀河を宇宙論的座標の原点におくと（一様性からどこに原点をおいてもよい），光は動径方向（$\theta =$ 一定，$\phi =$ 一定）に伝播する．どの宇宙モデルでもこの軌跡に制限された線要素は次の形となる．

◆
$$0 = -\mathrm{d}t^2 + R^2(t)\,\mathrm{d}\chi^2 \tag{12.20}$$

（平坦な超曲面に対しては，式 (12.15) の座標 r を χ に変えればよい．）光子に対するこの場合の保存量は，p_χ である．さて宇宙論的時間座標は固有時間であるから，宇宙の至るところで光子の軌跡に沿って静止している局所観測者が測るエネルギーは，$-p^0$ である．12.6 章の練習問題 6 で，p_χ の保存は p^0 が $R(t)$ に反比例することをみる．（固有距離の単位で）局所的に測定された波長は $R(t)$ に比例し，したがって時刻 t で放射され時刻 t_0 でわれわれが受け取る光子の赤方偏移 z は以下のように与えられる．

◆
$$1 + z = R(t_0)/R(t) \tag{12.21}$$

これは赤方偏移の宇宙論的部分にすぎないことを注意しておくことは重要である：もし光源あるいは観測者宇宙論的静止系に対して運動しているとすれば，余分に $1 + z_{\mathrm{motion}}$ が式 (12.21) の右辺に掛けられる．

次にハッブル・パラメーター $H(t)$ が時刻 t での宇宙の瞬間的な膨張率であることを示そう．

◆
$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \tag{12.22}$$

固定された座標値 χ に固定されたわれわれの銀河は宇宙膨張によってわれわれから遠ざかっている．現時刻 t_0 で（時間一定の超曲面における）われわれからの固有距離 d は χ を用いて表されたとき，どの宇宙論においても同じである．

$$d_0 = R(t_0)\chi \tag{12.23}$$

この式を微分することで原点にいる観測者と固定された χ にある銀河との間の固有距離の現在の変化率が得られる.

$$v = (\dot{R}/R)_0 d_0 = H_0 d_0 \tag{12.24}$$

ここで H_0 はハッブル・パラメーターの現在の値である. 実際, 式 (12.1) と比べることで, これがハッブル・パラメーター $\dot{R}/R$ の現在の値であることがわかる. 12.6 章の練習問題 10 でこの速度が $v = z$ であることを示す. これが, 銀河があまり遠くないとき赤方偏移 z を与えるために要求されることである. こうして宇宙のわれわれの近傍においては宇宙論的赤方偏移はドップラー効果にほかならない. さらに赤方偏移はわれわれの近傍において固有距離に比例し, ハッブル定数が比例係数である. 次に近傍宇宙を超えたときいろいろな距離の指標が赤方偏移にどのように依存するかを調べよう.

宇宙のスケール因子 $R(t)$ は式 (12.22) によってハッブル・パラメーターと関係している. これを R に対して積分すると

$$R(t) = R_0 \exp\left[\int_{t_0}^{t} H(t')\,\mathrm{d}t'\right] \tag{12.25}$$

このテイラー展開は

$$R(t) = R_0[1 + H_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}(H_0^2 + \dot{H}_0)(t - t_0)^2 + \cdots] \tag{12.26}$$

ここで下付の添字は, 時刻 t_0 における量という意味である. ハッブル・パラメーターの時間微分は膨張の加速あるいは減速についての情報を含んでいる. 宇宙論研究者はしばしば $\dot{H}_0$ を無次元の減速パラメーターで置き換える.

$$q_0 = -R_0\ddot{R}_0/\dot{R}_0^2 = -(1 + \dot{H}_0/H_0^2) \tag{12.27}$$

この定義の負の符号と “減速パラメーター” という名前は, このパラメーターが最初に導入されたときの仮定である重力は宇宙膨張をつねに減速し, したがって q_0 が正であるという仮定を反映している. しかし天文学者は宇宙膨張は現在, 加速していると信じている. したがって “減速パラメーター” という考えは流行らなくなっている. にもかかわらず, $\dot{H}_0$ を含むどの公式も q_0 で表すことができ, またその逆も真である.

ハッブルの法則 (12.1) は式 (12.26) が適用できる範囲でどのように書けるだろう．後退速度 v はスペクトル線の赤方偏移からもたらされる．したがって赤方偏移を直接扱う方が便利である．式 (12.25) と式 (12.21) を組み合せると

$$◆ \qquad 1+z(t)=\exp\left[-\int_{t_0}^{t} H(t')\,\mathrm{d}t'\right] \tag{12.28}$$

この式のテイラー展開は

$$z(t)=H_0(t_0-t)+\tfrac{1}{2}(H_0^2-\dot{H}_0)(t_0-t)^2+\cdots \tag{12.29}$$

この式は，銀河が光を放出した時刻 t についての独立な情報をもっていないので，まだ有用な形ではない．たぶん式 (12.29) は，固有時間を赤方偏移 z で展開するという形にした方がより有用である．

$$t_0-t(z)=H_0^{-1}\left[z-\tfrac{1}{2}(1-\dot{H}_0/H_0^2)z^2+\cdots\right] \tag{12.30}$$

次の単純な展開

$$H(t)=H+\dot{H}_0(t-t_0)+\cdots$$

に展開 (12.30) を用いることで，H を赤方偏移で展開した式が得られる．

$$H(z)=H_0\left(1-\frac{\dot{H}_0}{H_0^2}z+\cdots\right) \tag{12.31}$$

式 (12.28) が次の近似なしの非常に簡単な関係に変ることに注意する．

$$◆ \qquad H(t)=-\frac{\dot{z}}{1+z} \tag{12.32}$$

宇宙論は相対論の枠組みの中でのみ首尾一貫した理論であるが，宇宙膨張がニュートン的な表現でどのように表されるかをみることは有用である．銀河で一様に満たされた球状の領域を考えて，ある時刻に球の中心からの距離に比例した外向き動径方向の速度をもったとする．もしわれわれが果ての近くにいなければ，もちろん果ては現在みえるにはわれわれから非常に遠いが，膨張は各点のまわりで一様，等方を示すことができる．銀河は単にお互いに遠ざかっていて，ハッブル定数は初期速度のスケールである：それは原点からの単位距離

離れたところでの動径速度である．このニュートンモデルの問題点は宇宙の局所的な状態を記述できないことではなく，瞬間的に伝播する重力でもって宇宙のどの部分の力学もこの銀河集団の雲の構造に依存していることである．重力の相対論でのみ宇宙の力学的進化に意味をつけることができる．これが以下でしらべることである．

光が赤方偏移を受けるとエネルギーが減少する．このエネルギーはどこに行ったのだろう？　相対論における答は，単に失われたというものである：メトリックは時間に依存するので，測地線に沿って保存するエネルギーは存在しない．興味深いことにニュートン的な宇宙像では，赤方偏移は銀河同士の相対速度によって引き起される．光子が膨張する雲の中で外向きに伝わると，光子は中心からの距離に比例して走っている銀河をどんどん追い越すことになる．したがって中心から遠い銀河ほど光子のエネルギーが小さいと測定するだろう．

宇宙地理学：宇宙における距離の測定　　宇宙地理学とは宇宙の膨張とその歴史を記述するものである．宇宙地理学においては宇宙の運動を説明するためのアインシュタイン方程式はまだ適用しない．そのかわりに単にその膨張の歴史を測定する．宇宙地理学の言葉は，距離測定の言葉でありハッブル・パラメーターの進化である．

式 (12.1) とのアナロジーで式 (12.29) の時刻 t を赤方偏移で置き換えたい．しかし宇宙論的な広がりで，距離とは何であろう？　それは測定可能ではない座標間隔ではない．では固有距離はどうだろう？　光の放出の事象と受信の事象の間の固有距離は，光がヌルの測地線を通るのでゼロである．現在での光を放出した銀河とわれわれの固有距離は，やはり測定可能ではない．たとえばほかの銀河と衝突してその銀河はもうすでに存在していないかもしれない．この困難を避けるため，まず式 (12.1) で距離がどのように入り込んできたかをみてみよう．

近傍銀河までの距離は，ほとんどの場合つねに光度の測定から導かれる．距離 d を知っている天体があって，それが静止していて空間がユークリッド的と見なせるほど近くにあるとしよう．するとその流束 F は絶対光度 L と次のような関係にある．

$$L = 4\pi d^2 F \tag{12.33}$$

逆にもし L を知っていれば，流束 F を測ることによって距離 d を求めること

ができる．すると式 (12.1) における d は，観測可能量 $(L/F)^{1/2}$ で置き換えることができる．

天文学者は宇宙の大きさを測るために注意深く補正された宇宙論的な距離梯子をつくるために光度測定を用いている．この梯子の各段階で，絶対光度 L が (たとえばその天体の理論的性質から，あるいは近傍にあるその天体までの信頼できる距離から）知られている標準光源とよばれるある種の天体を同定する．より遠方の距離をみるために，天文学者は以前の標準光源よりも明るく遠くからでもみえ，また以前の標準光源を使って正しく絶対光度が評価できる新たな標準光源を見つけてきた．標準光源は（光度とは無関係な）三角測量で距離を直接測ることができる近傍の星から始まって，きわめて遠方の高赤方偏移銀河まで続いている．

そのような測定にもとづいて宇宙論研究者は，式 (12.33) を使ってどんな遠方の天体に対しても光度距離 d_L を定義する．

$$◆\quad d_{\mathrm{L}}=\left(\frac{L}{4\pi F}\right)^{1/2} \tag{12.34}$$

光度距離は，天文学者によって直接観測できる量である：もし固有の光度 L を知っていたら，あるいは推測できるなら，その輝度 F の測定は光度距離を決める．光度距離はもしその天体がわれわれに対して静止していたとしたら，ユークリッド的宇宙でもつであろう空固有距離である．しかし膨張宇宙においては，それは一般にはその天体までの固有距離ではない．

次に光度距離とわれわれが導入した宇宙論的なスケールの関係を見つけよう．時刻 t_{e} で光度 L で放射している天体を考えよう．そこからの光を後の時刻 t_0 でどんな流束で受け取るだろう？　簡単のため天体は時刻 t_{e} で振動数 ν_{e} の光子だけを放射したとしよう．(この振動数は最終的には表に現れないので，以下の結果は完全に一般的である.) 短い時間間隔 δt_{e} の間に天体は

$$N=L\delta t_{\mathrm{e}}/h\nu_{\mathrm{e}} \tag{12.35}$$

個の光子を四方八方に放射する．われわれが受け取る流束を計算するには，それらの光子がわれわれが観測する時刻で占める球面の面積を計算しなければならない．

天体を（式 (12.13) の）座標系の原点に置き，われわれがこの座標系で座標位置 r にいるとしよう．すると光子がわれわれの位置にとどいたとき，光子が占めるこの球の固有表面積は式 (12.13) で線要素の角度部分 $R_0^2 r^2 \mathrm{d}\Omega^2$ を積分することで与えられる．積分は簡単にできて次の表面積を与える．

$$A = 4\pi R_0^2 r^2. \tag{12.36}$$

さて光子は $(1+z) = R_0/R(t_\mathrm{e})$ だけ赤方偏移して振動数 ν_0 となる．

$$h\nu_0 = h\nu_\mathrm{e}/(1+z) \tag{12.37}$$

さらにそれらは赤方偏移だけ引きのばれた時間間隔 δt_0 に広がって到着する．

$$\delta t_0 = \delta t_\mathrm{e}(1+z) \tag{12.38}$$

観測される時刻 t_0 でのエネルギー流束は，$Nh\nu_0/A\delta t_0$ となるから，

◆
$$F = L/A(1+z)^2 \tag{12.39}$$

式 (12.34) から光度距離は次のようになる．

◆
$$d_\mathrm{L} = R_0 r(1+z) \tag{12.40}$$

これを用いるには光源の共動座標位置 r を光源が光子を放射した赤方偏移 z の関数として知らなければならない．これは光子の運動方程式を解くことで得られる．この場合，われわれは，$ds^2 = 0$（光子の世界線）と $\mathrm{d}\Omega^2 = 0$（光子は光源から座標原点にいる観測者に向かって動径線上を運動する）とした式 (12.13) を使えばよい．それから次の微分方程式が得られる．

$$\frac{dr}{(1-kr^2)^{1/2}} = -\frac{dt}{R(t)} = \frac{dz}{R_0 H(z)} \tag{12.41}$$

ここで最後のステップは式 (12.21) を微分することで得られる．この方程式は曲率定数 k を含んでいるが，小さな r と z では曲率は二次の効果でのみ解に入ってくる．もしこの効果を無視してユークリッド的な関係かの 1 次のずれだけを考えると，次式を得るのは難しくない．

$$d_{\mathrm{L}} = R_0 r(1+z) = \left(\frac{z}{H_0}\right)\left[1+\left(1+\frac{1}{2}\frac{\dot{H}_0}{H_0^2}\right)z\right]+\cdots \tag{12.42}$$

もしいくつかの天体の赤方偏移と光度距離を測ることができれば，原理的には $\dot{H}_0$ を決定することができる．この種の測定から宇宙の加速膨張が発見されることになる（以下参照）．

もう一つの有用な距離指標は角径距離である．これはユークリッド空間におけるもう一つの距離の測定法である：距離 d にある天体の角度サイズ θ は，天体の視線方向に垂直な固有半径 D を知っていれば，$\theta = D/d$ と推測できる．この関係から宇宙のどこにある天体に対しても，その天体までの角径距離 d_A が次のように定義される．

◆
$$d_A = D/\theta \tag{12.43}$$

d_A の赤方偏移 z の依存性は 12.6 章の練習問題 6 で導かれる．結果は

$$d_A = R_{\mathrm{e}} r = (1+z)^{-2} d_{\mathrm{L}} \tag{12.44}$$

となる．ここで R_{e} は光子が放射されたときのスケール因子である．式 (12.42) と同じような表式は

$$d_A = R_0 r/(1+z) = \left(\frac{z}{H_0}\right)\left[1+\left(-1+\frac{1}{2}\frac{\dot{H}_0}{H_0^2}\right)z\right]+\cdots \tag{12.45}$$

光源の共動直径 D を評価できる状況がある．特に宇宙マイクロ波背景放射（下記参照）の温度揺らぎは初期宇宙の物理で決る長さのスケールをもっている．

多くの興味深い測定に対して小さな z に対する展開を与えたが．現在の天文学者は非常に大きな赤方偏移天体を観測できることに注意することは重要である．ある種の銀河やクェーサーは $z = 6$ よりも大きな赤方偏移をもっている．以下で議論する宇宙マイクロ波背景放射は $z \sim 1000$ から放射されていて，ビッグバンを理解する最良の対象である．そのときでさえ宇宙はすでに約 380 000 年たっている．将来的には重力波検出装置は宇宙が 1 秒に満たなかったビッグバン自身からのランダムな重力波を検出するだろう．

式 (12.42) の導出は以前に出会った点を例示している：非相対論的公式 $v = Hd$ を相対論的な言葉に翻訳するさいに，方程式の中のすべての項の意味を考え直

し，直接観測できる量に置き換えざるをえなかった．一般相対論の教えるところをあえて一つあげるとすれば，それは物理学は究極的には**測定**にもとづいていなければならないということである．距離，時間，速度，エネルギーや質量のような概念は測定から導かれるが，必ずしも直接観測される量ではない．それらの全体的な性質についての仮定は，それらが測定とどう関係しているかを注意深く理解したうえでなされなければならない．

宇宙は加速している！　ハッブルの宇宙膨張の発見以来最も驚くべき宇宙論的発見は，宇宙膨張が減速ではなく加速しているという発見である．この発見は，基本的には光度距離を赤方偏移に対してプロットすることで行われた．ここで光度は等級で与えられる．これは等級–赤方偏移関係（m–z 関係）とよばれ，12.6 章の練習問題 13 でその関係の小さな赤方偏移に対する展開を導く．High-z Supernova Search Team（Riess ら, 1998）と Supernova Cosmology Project（Perlmutter ら, 1999）の二つの天文学者のチームは，それぞれ標準光源として赤方偏移が 1 程度までの Ia 型とよばれる超新星を用いた．データにはかなりのばらつきがあるものの両方のチームは，データから宇宙が減速ではなく加速膨張しているということを発見した．High-z チームのデータを図 12.3 に示した．この図の詳細な説明は，Filippenko (2008) を参照せよ．

この図の上半分はサンプル中の超新星の測定された流束（等級）を誤差棒つきで示している．図中の三つの曲線は各種の宇宙モデルにおける m–z 関係の予言で，データ点はより上向きの曲線に合っている．このことは高赤方偏移で超新星が期待よりも暗くみえているということを意味している．これは宇宙が加速膨張しているときに起る．なぜならその場合，超新星は減速膨張の場合よりも遠くにあるからだ．データを一番よく再現するのは，アインシュタイン方程式の枠組で加速膨張を実現する最も簡単な方法である正の宇宙定数をもつ宇宙の場合である．図の下半分は同じデータであるが，宇宙定数がない平坦な宇宙の場合からのずれとしてプロットしたものである．これはデータが加速膨張を表す曲線に合っていることをより明らかに表している．

これらの研究は加速膨張の強い証拠ではあるが，同じ結論に導くいくつかの研究方向がある．重力はつねに引力であるという基本的な仮定に抵触するので，天文学者は最初この結論に抵抗した．もし宇宙のエネルギー密度が引力的な重

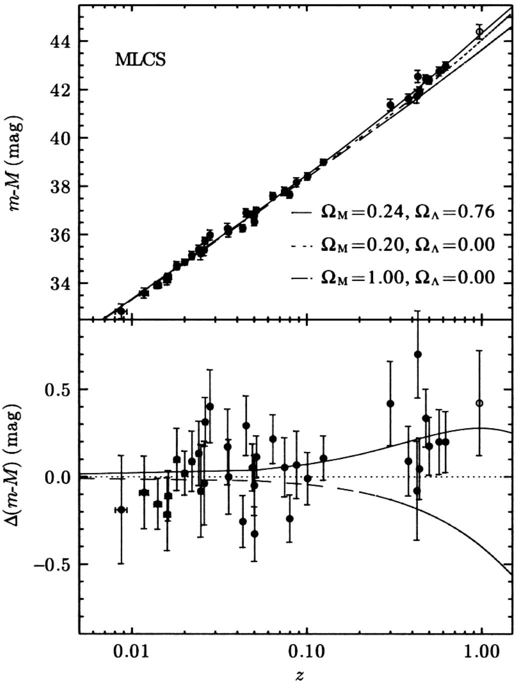


図 12.3　Ia 型超新星の赤方偏移に対する明るさの関係は加速膨張宇宙モデルで最もよく合う．曲線の下の部分は H_0 を決め，上部は加速を表している．

力を及ぼすなら，膨張は減速するだけである．しかし宇宙は加速膨張している．何がこの反発力の原因になりうるだろう？　この章の残りで，この疑問に何度ももどるだろう．

12.3　宇宙論的力学：膨張宇宙の理解

前の節で一様・等方宇宙をどのように記述し，膨張をどのように測るかをみてきた．宇宙の進化を研究し，われわれが今日みる構造の形成を理解し，そして現在観測される加速膨張に意味をつけるには，アインシュタイン方程式を問題に適用し，ほかの物理学と結びつけなければならない．この節では物質として

比較的単純な完全流体と膨張の様子によって示唆される宇宙定数をもったアインシュタイン方程式を考える．以下の節で宇宙論的な物理をいろいろと考える．

ロバートソン–ウォーカー宇宙の力学：ビッグバンと暗黒エネルギー　一様・等方宇宙が式 (12.13) で与えられる三つのロバートソン–ウォーカー・メトリックの一つで記述されなければならないことをみてきた．曲率パラメーター $k=(-1,0,+1)$ のおのおのの選択に対して，宇宙の進化はスケール因子 $R(t)$ という時間の関数に依存する．アインシュタイン方程式は，そのふるまいを決定する．

以前の章で宇宙を一様な完全流体で満ちていると理想化した．流体は宇宙論的に好ましい座標系で静止していなければならない．そうでなければその速度はある方向を別の方向と区別し，宇宙は等方的でなくなってしまうだろう．したがってストレス–エネルギー・テンソルは宇宙論的な静止系で式 (4.36) の形をとる．一様性から流体のすべての性質は，$\rho=\rho(t), p=p(t)$ などのように時間にのみ依存する．

まずアインシュタイン方程式のビアンキ恒等式から導かれる物質の運動方程式 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ を考える．等方性からこの方程式の空間成分は恒等的にゼロになる．ゼロにならないのは時間成分 $\mu=0$ のみである．これが次の式を与えることを示すのは難しくない（12.6 節の練習問題 14 参照）．

◆
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho R^3)=-p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R^3) \tag{12.46}$$

ここで $R(t)$ は宇宙論的なスケール因子である．この式の解釈は容易である：R^3 は流体要素の体積に比例する．したがって左辺は全エネルギーの変化率であり，右辺はそれが膨張したときなされる仕事 $(-p\mathrm{d}V)$ である．宇宙論的に興味があるのは，物質優勢の宇宙と放射優勢の宇宙である．現在のような物質優勢な時期には，宇宙論的な流体の主要なエネルギー密度は冷たい非相対論的物質粒子に由来し，そのランダムな速度は遅く，したがって $p=0$ のダスト流体のようにふるまう．したがって

◆
$$\text{物質優勢：}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho R^3)=0 \tag{12.47}$$

（のちにみるように，初期宇宙における）放射優勢の時期には主なエネルギー密

度は放射や相対論的な粒子に由来し，その状態方程式は $p = \rho/3$（4.10 節の練習問題 22 参照）．したがって

$$\text{放射優勢：}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho R^3) = -\frac{1}{3}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R^3) \tag{12.48}$$

あるいは

◆
$$\text{放射優勢：}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho R^4) = 0 \tag{12.49}$$

となる．

アインシュタイン方程式をこれらの場合に書き下すのは難しくない．等方性はすべての空間添字 j に対して $G_{tj} = 0$ であり，$G_{ij} \propto g_{ij}$ となる．これは二つの成分 G_{tt} と（たとえば）G_{rr} のみが独立であることを意味している．しかしビアンキ恒等式はそれらの間に関係を与える．これはすでに前の節で物質の方程式を導くのに用いた．（同じことは球対称星のときにもあった．）したがってアインシュタイン方程式の一つの成分だけを計算すればよい（12.6 節の練習問題 16 参照）．

$$G_{tt} = 3(\dot{R}/R)^2 + 3k/R^2 \tag{12.50}$$

したがって式 (12.47) あるいは式 (12.49) のほかに，もう一つの方程式，宇宙定数 Λ をもったアインシュタイン方程式だけが必要である．

$$G_{tt} + \Lambda g_{tt} = 8\pi T_{tt} \tag{12.51}$$

物理学者は，ほかのすべての基本的な相互作用と同様に重力が量子化される理論での第一原理から究極的には宇宙定数の値が計算できると期待している．この観点からは，宇宙定数は次の記法で与えられるストレス–エネルギー・テンソルに対するもう一つの寄与と表される．

◆
$$T_\Lambda^{\alpha\beta} = -(\Lambda/8\pi)g^{\alpha\beta} \tag{12.52}$$

この観点では，宇宙定数“流体”のエネルギー密度と圧力は次のようになる．

◆
$$\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi, \qquad p_\Lambda = -\rho_\Lambda \tag{12.53}$$

宇宙論研究者は，ρ_Λ を暗黒エネルギーとよぶ：どんな既知の物質にも付随して

いないエネルギーである．それに付随する圧力 p_Λ は，エネルギー密度とは反対符号をもっている．物理学者は一般に暗黒エネルギーは正と期待するので，宇宙論のほとんどの議論は $\Lambda \geq 0$ の枠内で行われる．以下で暗黒圧力が負の値をもつことの帰結にもどる．宇宙が膨張するにつれ暗黒エネルギーと暗黒圧力は**一定**にとどまることに注意せよ．上の定義を用いるとアインシュタイン方程式の tt 成分は次のように書ける．

◆
$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 = -\frac{1}{2}k + \frac{4}{3}\pi R^2(\rho_m + \rho_\Lambda) \tag{12.54}$$

ここで物質のエネルギー密度を暗黒エネルギー密度と区別するために ρ_m と書いた．この方程式は，観測されている宇宙の加速膨張の理解を容易にする．$k = 0$，あるいは k の項は無視できるとしよう．$R^2\rho_m$ は R が大きくなるにつれ減少するのに対して，$R^2\rho_\Lambda$ は増加する．現在は後でみるように $\rho_\Lambda > \rho_m$ であるから，$\dot{R}$ は R が増加するにつれ大きくなる．もし加速が後に消えてしまう何らかの物理的場によるものでなく，本当に宇宙定数によるものなら，この傾向は永遠に続く．

正の暗黒エネルギー密度は，どのように宇宙を加速膨張させることができるのだろう？　正のエネルギーは引力的な重力を及ぼし，したがって宇宙膨張を減速させないのだろうか？　これに答えるには，加速度 $\ddot{R}$ が陽に現れるアインシュタイン方程式の空間成分をみるのが役に立つ．これをクリストッフェル記号から導くのではなく，すでに書き下した式 (12.46) と式 (12.54) の時間微分から導かれるという事実を用いることができる．12.6 節の練習問題 17 で，これら二つの方程式を組み合せると，次の形のスケール因子の簡単な“運動方程式”が得られる．

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p) \tag{12.55}$$

ここで，ρ と p はそれぞれ通常の物質と暗黒エネルギーを含んだ全エネルギー密度と圧力である．

加速度はエネルギー密度だけでなく，$\rho + 3p$ によってつくられる．われわれは以前この形にあったことがあり（8.6 節の練習問題 20），それを能動的な重力質量とよぶ．一般相対論では，圧力が無視できないとき，ニュートン的な場の源は ρ ではなく，$\rho + 3p$ である．宇宙論的内容では，同じ組み合せが加速膨張

を引き起す．宇宙定数に付随した負の圧力が十分大きければ，この和は負となり宇宙膨張を加速する．宇宙定数入りのアインシュタイン方程式にはある意味で反重力が組み込まれているのである．

負の圧力は決してありえないことではない．負のストレスは張力とよばれ，たとえば引きのばされたゴムでは，ストレステンソルのゴムに沿った成分は負である．面白いことに，風船を用いて膨張する宇宙を表す類推でも，負の圧力である引きのばされたゴムの張力が現れる．暗黒エネルギーについて驚くべきことは，その大きさであり，それが等方的なことである．この "流体" の張力についてのより詳しい議論は，12.6 節の練習問題 18 を参照せよ．

(11 章でシュワルツシルド時空の軌道をしらべたように) 点粒子の運動はエネルギーを用いてしらべることができるが，式 (12.54) を用いると宇宙膨張も同じような方法でしらべることができる．この式の左辺は "運動エネルギー"，右辺は全エネルギーの役割を果す定数 $(-k/2)$ と $R^2(\rho_m+\rho_\Lambda)$ に比例するポテンシャルを含む．このポテンシャルは，R^2 と ρ_m を通して R に依存する．R の力学はこのエネルギー方程式によって制限される．

この制限を用いて遠い未来に宇宙に何が起るかをしらべよう．ここでもちろん何も特別なことは粒子的地平線から入ってこないという宇宙原理を仮定する．もし $\rho_\Lambda>0$ で宇宙の物質もまた正のエネルギー密度をもつなら，式 (12.54) から次のことがすぐ帰結される：双曲的宇宙 $(k=-1)$ は決して膨張を止めない．平坦な宇宙 $(k=0)$ はもし $\rho_\Lambda>0$ なら膨張を止めず，$\rho_\Lambda=0$ なら物質密度は R^{-3} で減っていくから R が無限大に近づくにつれ漸近的に膨張率 0 へと減速する．閉じた宇宙 $(k=+1)$ の場合，$\rho_\Lambda=0$ ならやはり $R^2\rho_m$ が少なくとも R^{-1} で減少するので，いつか最大の R にまで膨張し，その後は収縮に転じる．収縮に転じた宇宙は最終的にはビッグクランチとよばれる特異点で終る．しかし $\rho_\Lambda>0$ の場合，閉じた膨張宇宙の最後は ρ_m と ρ_Λ のバランスによっている．

宇宙の過去の歴史についても同じような質問をすることができる：有限の過去にスケール因子 R がゼロになるビッグバンはあったのだろうか?　まず簡単のため $\rho_\Lambda=0$ の場合を考えよう．すると式 (12.54) は，R が小さくなるにつれ物質項は曲率項 $-k/2$ に比べてどんどん大きくなることを示す．これは，$R^2\rho_m$ が物質優勢の場合，R^{-1} に比例し，初期宇宙の放射優勢の場合，R^{-2} に比例す

るからである．したがって現在の宇宙が膨張しているので，過去のどの時点でも $\dot{R}=0$ となることはない．有限の過去に $R=0$ になったかというビッグバンの存在は物質のふるまいだけに依存していて曲率項は重要ではない．したがって 3 種類の宇宙のごく初期は定性的に同じ過去の歴史をもっている．

宇宙の十分初期，放射優勢期の場合を考えよう．簡単のため $\Lambda=0$ とする．ある定数 B に対して，$\rho=BR^{-4}$ と書いて式 (12.54) で k を無視すると

$$\dot{R}^2=\frac{8}{3}\pi BR^{-2}$$

あるいは

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{8}{3}\pi B\right)^{1/2}R^{-1} \tag{12.56}$$

これは次の解をもつ．

$$R^2=\left(\frac{32}{3}\pi B\right)^{1/2}(t-T) \tag{12.57}$$

ここで T は積分定数である．したがって $R=0$ がたしかに有限の過去に達成される．$t=0$ で $R=0$ ととると，$T=0$ となる．

こうして宇宙定数なしの放射優勢宇宙は，$R(t)\propto t^{1/2}$ という膨張率をもつことがわかった．同様の計算を行うと，宇宙定数なしの物質優勢宇宙の場合，$R(t)\propto t^{2/3}$ となる（12.6 節の練習問題 19）．

もし宇宙定数がゼロでなかったら，どうなるだろう．もし暗黒エネルギーが正なら，ρ_Λ を含む項は R の任意の値で $\dot{R}$ を増加させるので $R=0$ の時刻がより現在に近づくだけで結論には定性的な違いはない．もし物質密度がつねに正で宇宙定数が非負なら，アインシュタイン方程式はビッグバンを不可避にする．宇宙は過去の有限な時間に $R=0$ で始まったのである．これを宇宙論的特異点という：曲率テンソルは発散し，潮汐力が無限に大きくなり，アインシュタイン方程式はそれより以前へと解を延長することを許さない．アインシュタイン方程式の枠内では，ビッグバンより以前に何があったかを問うことはできない：時間はそこで始まったのである．

宇宙がビッグバンで始まったという結論はどれほど確かなのだろう？　まず等方性と一様性はビッグバンの存在に本質的なのだろうか？　答は No である．ペンローズとホーキングの特異点定理［Hawking and Ellis (1973)］は，宇宙がどれほど非対称であろうともたしかに過去に特異点をもっていたことを示して

いる．しかしこの定理は特異点の**存在**を主張するだけで，現在の宇宙の少なくとも一つの粒子はそこから出てきたということ以外，それがどんな性質をもっているかはわからない．それにもかかわらずあらゆるものが特異点からでてきたという強固な証拠がある．しかしわれわれは，宇宙のごく初期の信じがたいほどの高密度 ($\rho \to \infty$) における物理法則を知らないということも考慮する必要がある．特異点定理に必要なことは，(1) $T^{\mu\nu}$ の性質についての何か，(2)（宇宙定数なしの）アインシュタイン方程式がどんな R に対しても正しいのか，を知ることである．

物質のエネルギー密度が正であるという仮定は，量子効果を考えると疑問である．前章のホーキング放射の議論でみたように，量子揺らぎは短時間では負のエネルギーをつくることができる．したがってビッグバンからプランク時間 $t_{\rm Pl} = GM_{\rm Pl}/c^2 \sim 10^{-43}$ 秒の間では原理的には上の結論は信用できない！（プランク質量の定義は式 (11.111) で与えられている）それは量子重力の適用範囲で，重力相互作用の量子論ができた暁には，ビッグバンより以前の宇宙の歴史がわかるかもしれない．

それがわかると哲学的には満足かもしれないが，現在の宇宙には実質上あまり関係がない．時刻 $t = 0$ から進化する宇宙モデルをつくることはできないかもしれないが，たとえば $t = 100\,t_{\rm Pl}$ から始まる宇宙モデルはアインシュタイン方程式の枠内で確実に議論することはできる．われわれの宇宙を理解するうえでの主な不確かさは，以下でみるようにビッグバン直後ではなく初期宇宙の物理の中に存在する．

ここまでわれわれは正の宇宙定数に話を限ってきた．これは現実の宇宙の進化にとって最も重要であると思われるが，負の宇宙定数をもった宇宙も興味がある．この場合は練習問題 21 で扱う．

アインシュタインは宇宙定数を，アインシュタイン方程式が静的な解 $\dot{R} = 0$ をもつために導入した．彼は当時ハッブル流について知らなかったので，宇宙が静的であるという当時の天文学者の仮定に従った．ニュートン重力の範囲内でさえ，これは問題を引き起す．

アインシュタインが一般相対論でこの問題を取り上げるまで，誰もこのような解を探そうとはしなかったようだ．これは単に式 (12.54) で $\dot{R} = 0$ とおけば

よいだけではない；その解が平衡であることを保証しなければならない．すなわち宇宙は以前に議論した“ポテンシャル”の極小，あるいは極大になければならない．12.6 節の練習問題 20 で静的な解は次の関係を要求することを示す．

$$\rho_\Lambda = \frac{1}{2}\rho_0$$

アインシュタインの静的な解では暗黒エネルギー密度は正確に物質のエネルギー密度の半分でなければならない．以下でわれわれの宇宙では観測された暗黒エネルギー密度が物質のエネルギー密度の約 2 倍であることをみるだろう．したがってわれわれの宇宙はアインシュタインの静的宇宙に近いが，しかしそうなってはいない．

臨界密度と宇宙のパラメーター　式 (12.54) を $4\pi R^2/3$ で割ると，宇宙論の議論にとって教育的な形になる：

◆
$$\frac{3H^2}{8\pi} = -\frac{3k}{8\pi R^2} + \rho_m + \rho_\Lambda \qquad (12.58)$$

ここで $\dot{R}/R$ に対してハッブル・パラメーター H を代入した．右辺の最後の 2 項はエネルギー密度なので，ほかの項もそのように解釈すると役に立つ．こうしてハッブル膨張には，$\rho_H = 3H^2/8\pi$ というエネルギー密度が付随し，空間の曲率パラメーターには，$\rho_k = -3k/8\pi R^2$ というエネルギー密度が付随する．こうして式 (12.58) は次のように書ける．

$$\rho_H = \rho_k + \rho_m + \rho_\Lambda$$

ここでもし現在の宇宙において“物理的な”エネルギー密度 $\rho_m + \rho_\Lambda$ がハッブル・エネルギー密度 ρ_H よりも小さいとすると，（前にみたように）曲率エネルギー密度は正でなければならず，曲率パラメーター k は負となり，宇宙は双曲的な超曲面をもつ．逆にもし物理的なエネルギー密度がハッブル・エネルギー密度よりも大きければ，宇宙は閉じたモデルになる．したがって，ハッブル・エネルギー密度は臨界値であり，これを臨界エネルギー密度 ρ_c とよぶ：

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi}H_0^2 \qquad (12.59)$$

任意のエネルギー密度と臨界エネルギー密度の比を適当な下付添字をつけて，Ω

とよぶ．すると現在で評価された上のエネルギー密度の式から

◆ $$1 = \Omega_k + \Omega_m + \Omega_\Lambda \tag{12.60}$$

それらは図 12.3 の曲線をラベルづけした量である．超新星，宇宙マイクロ波背景放射のデータと銀河団の進化（下参照）の研究から，現在のわれわれの宇宙では，Ω は以下のような値をとっていることが示唆されている．

◆ $$\Omega_\Lambda = 0.7,\ \Omega_m = 0.3,\ \Omega_k = 0 \tag{12.61}$$

このことはわたしたちが正の宇宙定数によって支配されている平坦な宇宙に住んでいることを意味している．

それらの数はどんな大きさなのだろう？　天文学者は慣例的にハッブル・パラメーター H_0 を，$100\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}{\cdot}Mpc^{-1}}$ で規格化して，規格化されたハッブル定数 h を導入する（この h は重力波の振幅とは何の関係もない）：

$$h = H_0/100\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}{\cdot}Mpc^{-1}} \tag{12.62}$$

現在の観測ではこの値は，$h = 0.71$ であるとされている．この値を使うと，臨界エネルギー密度は次のような値になる．

$$\rho_c = 1.88 \times 10^{-26} h^2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} = 9.5 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$$

すでに注意したように，物質のエネルギー密度はこの約 30%であり，その値は天文学者が星や銀河を数えて勘定するよりもはるかに多い．実際，初期宇宙の元素合成（下参照）の研究は，バリオン物質（陽子，中性子，電子からできた通常の物質）は $\Omega_b = 0.04$ であることを示している．したがって宇宙における物質のほとんどは，非バリオン的で光を放射せず，その重力的な効果を通して間接的にのみ研究することができる．これを，暗黒物質とよぶ．したがって，Ω_m は二つの成分に分けることができる：

◆ $$\Omega_m = \Omega_b + \Omega_d, \quad \Omega_b = 0.04, \quad \Omega_d = 0.26 \tag{12.63}$$

12.4 節で暗黒物質の性質と分布について触れる．式 (12.61) と式 (12.63) の値は，通常，（観測と合致した concordance）宇宙として参照される．

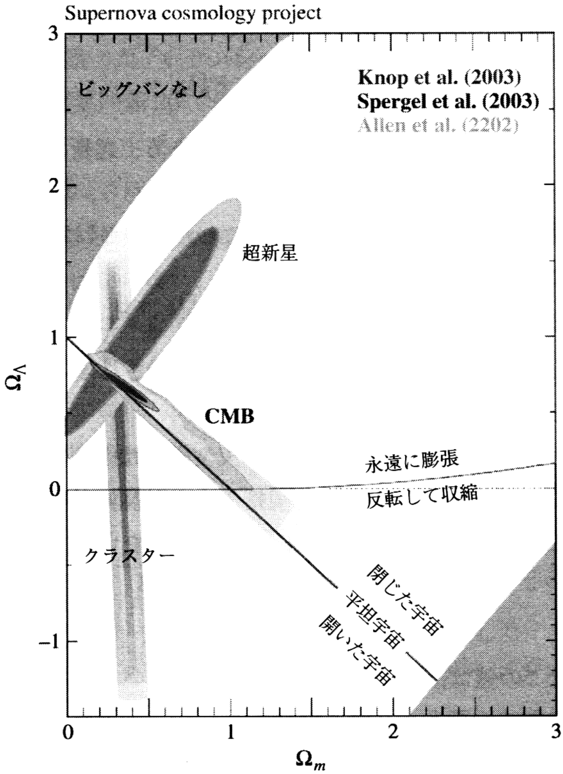


図 12.4　Ω_m–Ω_Λ 図において，いろいろな宇宙論モデルと，それらの過去と未来を示した．超新星［Knop ら (2003)］，宇宙マイクロ波背景放射［Spergel ら (2003)］と銀河分布［Allen ら (2002)］の研究からの制限はお互いに矛盾しておらず，パラメーター空間の $\Omega_\Lambda = 0.7$, $\Omega_m = 0.3$ を中心とする狭い領域にすべて重なっている．これらは誤差の範囲内で，$\Omega_k = 0$ を意味している．図は Supernova Cosmology Project による．

いくつかの可能な宇宙進化とデータの変化は，図 12.4 でみてとれる．暗黒エネルギーが存在し，しかもそれが支配的であるという強い証拠が集ってきている．このことはまた重要で新たな疑問をもたらした．最も深遠なものは，このエネルギーが一体どこからきたのかということである．以下でいくつかの推測を述べるが，現在のところこの問題を解決する理論はない．そのような状況で

は，よりよい観測データが助けになる．たとえば天文学者は暗黒エネルギーが実際に時間的に一定であるのか（もしそれが宇宙定数ならばそうである），あるいは時間変化するのかを決めようとしている．もし時間変化するなら，宇宙定数としてふるまうある種の物理的な場によるものであることを示すのかもしれない．この本を書いている時点で新しい地上および宇宙空間からの観測プログラムが計画されているので，10 年後には暗黒エネルギーの非常に精密な測定の新たな時代になるだろう．

一般相対論の観点では暗黒エネルギーをしらべる最も興味深い方法の一つは，LISA 重力波検出器である．9.5 節で述べたように，LISA は高赤方偏移でのブラックホール連星の衝突を観測することができ，その距離を測ることができる．信号に含まれる情報からその系が放射する重力波のエネルギーが推測されるので，信号から測定されるのは連星までの光度距離である．この測定はたぶん数パーセントの誤差という非常によい精度でなされる．宇宙地理学を行うためには，この光度距離を赤方偏移と結びつけなければならないが，これは簡単ではない：ブラックホールの合体は直接には何の電磁波も出さないので，その合体が起っている銀河を同定するのが容易でないからである．しかし合体が起った銀河は通常の銀河ではないだろう．合体現象は X 線輝度の変化や，激しいジェットの存在や，銀河の形態がゆがめられるような兆候を引き起す可能性がある．多くの場合，LISA の位置決定精度の範囲内（条件がよければ 10 分角以内）で合体が起っている銀河を同定することが十分可能だろう．

重力波測定は，補正をする必要がないので暗黒エネルギーの他の研究と相補的で非常に重要である．というのは宇宙論的距離梯子の仮定とは無関係だからである．したがって他の方法の組織的な誤差の重要なチェックとなる．

12.4　物理的宇宙論：われわれが観測する宇宙の進化

前の節で述べた観測は，われわれの観測がとどく限りの初期から宇宙の進化を記述するのに暗黒エネルギーをもつ一般相対論的な宇宙モデルが有効であることを示している．過去の 2, 30 年の間に天体物理学者は，現在の宇宙の構造がどのように一様で高温の膨張プラズマから進化してきたかの深く豊富な理解を

発展させてきた．その物語は非常に興味深いが，ここではそれを概観するだけにとどめる．しかし陽子と中性子が同一の粒子になる時期から太陽のような星や地球のような惑星ができるまで首尾一貫したシナリオが存在することはいっておく価値がある．特に観測が困難な領域ではまだ詳細はよく理解されてはいないが，物理的な枠組は疑う余地がない．

宇宙の膨張は，その中の物質温度の低下をもたらす：光子は赤方偏移し，ガス粒子のランダムな速度は遅くなり，銀河や星のような構造が現れてくる．したがって，宇宙の歴史は温度とともに変化する過程である（そのことを熱史という）：進化の各段階を示すのに宇宙論的な時間 t やスケール因子 R を用いる代わりに，温度，あるいは $E = kT$ で関係している等価なエネルギーを使うほうが便利である．そのほうが物理とより深く結びついている．

宇宙の歴史についてのわれわれの理解は，現在の加速器によって 1 TeV 程度のエネルギーまで確かめられている物理法則にもとづいている．したがって宇宙の進化についてのわれわれの物理的描像は，膨張プラズマがこのエネルギーをもっていた時期から以降信頼できるものである．

脱結合：宇宙マイクロ波背景放射　話を現時点から過去に向かって進めると，物質のエネルギー密度はスケール因子 R が減少するにつれ増加するが，暗黒エネルギー密度は一定にとどまる．したがって，(暗黒エネルギーが何らかの奇妙な物理の産物でない限り）宇宙初期では暗黒エネルギーを無視できる．通常の物質（暗黒物質とバリオン物質）は R^{-3} のよう増加するが，宇宙マイクロ波背景放射の光子のエネルギー密度は R^{-4} のように増加する．

現在の宇宙マイクロ波背景放射のエネルギー密度は，$\Omega_\gamma \sim 10^{-5}$，物質密度は $\Omega_m \sim 0.3$，それらはスケール因子が現在より 3×10^4 小さかったころ，同じ値になる．赤方偏移とスケール因子は同じように変化するので，これが膨張宇宙が放射優勢から物質優勢へと変化する赤方偏移である．そのときの温度は約 10^5 K でエネルギーは約 10 eV であり，ビッグバンの約 3000 年後に起った．

このエネルギーは，水素の電離エネルギー 13.6 eV に近い．これは，水素原子がバリオン物質に主要な成分であるので重要な数である．もし温度が水素原子を電離できるほど十分高ければ，宇宙は電磁波に対して不透明なプラズマで満たされている．いったん水素が中性化するほど十分冷えたら，宇宙に残った光

子は散乱される確率が小さく自由に空間を動くことができる．この脱結合（再結合ともよばれる）の瞬間は，宇宙マイクロ波背景放射がつくられた時期を定義する．ごく少数の水素原子が電離されたときでさえ，光子をとめるのに十分な水素原子核（陽子）があるので，実際には脱結合は 13.6 eV よりも低いエネルギーで起る．脱結合は，宇宙が物質優勢期の 1 eV よりも少し低いエネルギーで起る．このときの赤方偏移は約 2000 で，時刻はビッグバンから約 40 万年後である．

宇宙マイクロ波背景放射の観測は，それが温度 $T = 2.725\,\mathrm{K}$ をもったほぼ完ぺきな黒体放射であることを明らかにした．しかし，同時に厳密な一様性からのずれである微小だが重要な厳密な温度揺らぎをもつことを示した．そしてそれは銀河団や銀河形成の種である．この温度揺らぎは図 12.5 に示した．温度の揺らぎは平均値から 10^{-5} 程度で，それは同じサイズの物質分布の非一様性に起因している．その揺らぎは非常に小さいようにみえるが，数値シミュレーションは現在われわれがみるすべての構造をつくるのに十分であることを示している．物質の主要な成分は暗黒物質であるが放射と直接相互作用しないので，図 12.5 にはみえていない．ここでみえているのは，バリオン物質密度の揺らぎで

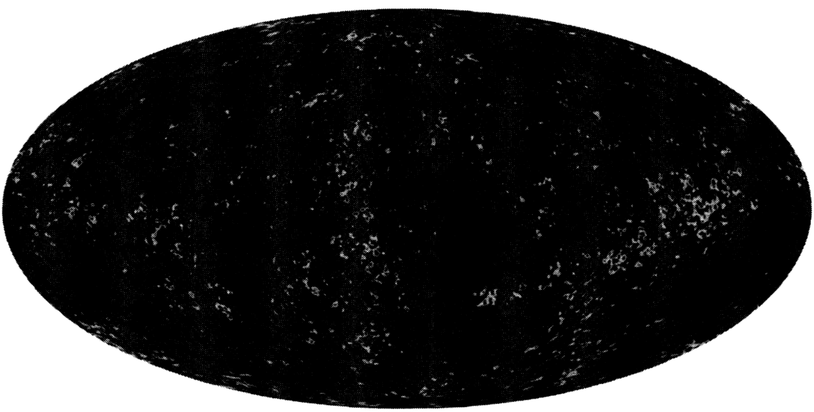


図 12.5 WMAP 衛星（Spaergel ら, 2003）による宇宙マイクロ波背景の小スケール温度揺らぎ．揺らぎの大きさは，$\pm 200\,\mu\mathrm{K}$．図は，WMAP プロジェクトと NASA による．

ある．シミュレーションは，暗黒物質粒子のランダムな速度が小さい場合にのみ，揺らぎの成長が十分速く成長し，バリオンを引きつけ，そこから銀河ができることを示している．したがって物質は**冷たく**なければならず，この銀河形成のモデルを**冷たい暗黒物質モデル**とよぶ．標準的な宇宙モデルは，ΛCDM（宇宙定数をもった冷たい暗黒物質）とよばれる．

われわれの宇宙のパラメーター——宇宙定数，暗黒物質とバリオン物質の割合など——は，宇宙マイクロ波背景放射の温度揺らぎにその情報を刻んでいる．揺らぎはすべてのスケールで起るが，違ったスケールで違う大きさをもっている．揺らぎの角度スペクトルは宇宙論パラメーターについての豊富な情報を含んでいて，それから図 12.4 に示された制限が得られる．

暗黒物質と銀河形成：脱結合後の宇宙　脱結合の時間からさらに先に進んで，物理学者は初期の揺らぎから銀河や銀河団の進化をシミュレートしてきた．暗黒物質の密度揺らぎは，脱結合の前からゆっくりと成長した．しかし脱結合以前にはバリオン物質は，光子と平衡にあるので暗黒物質の揺らぎについていけなかった．いったんバリオン物質が中性原子になると，暗黒物質がつくった重力ポテンシャルの中に落ち込み始める．

暗黒物質と違ってバリオン物質はポテンシャルの底に集中化できて，バリオン物質の揺らぎはすぐに暗黒物質の揺らぎよりも大きくなる．その理由はバリオン物質が電荷をもっているからである：原子がポテンシャルの中に落ち込むにつれ，それらはお互いに衝突し，もっている電子を高いエネルギー準位に励起する．密度は十分低く，励起された電子は余分なエネルギーを放出して再び基底状態に落ちる．脱結合は起っているので，これは一方通行的にバリオンガスからエネルギーを引き出し，その結果，バリオン物質は暗黒物質のポテンシャルの中にどんどん落下し塊をつくることができる．エネルギーを放射することによる正味の効果は，ポテンシャル井戸により深く落ちるにつれバリオン物質をより高温のものにするにもかかわらず，天文学者はこのプロセスを**冷却化**とよぶ!

暗黒物質自身は電荷をもっていないので，そのような振幅の大きな揺らぎをつくることはできず，下でみるように現在の銀河のまわりに広がった“ハロー”をつくる．スーパーコンピューターを使った大規模なシミュレーションは，バリ

オンガスの塊は，最終的には銀河の構成要素となる太陽質量の数百万倍程度の塊へと凝縮していき，それらが合体して銀河となる．したがって宇宙のイメージは銀河が離れ離れに存在しているようにみえるが，事実はわれわれが現在みるほとんどの天体は何百回以上もの合体からつくられたのである．

合体は今でも進行中である：天文学者は銀河系のわれわれとは反対側で銀河系の中に組み込まれつつある太陽質量の数百万倍もの質量を発見している．巨大な球状星団オメガケンタウリは，太古の昔に銀河系に飲み込まれた小さな銀河の中心部分であるかもしれない．11.4 節で述べたように，天文学者はその中心に巨大ブラックホールを見つけている．南半球から容易にみることができるマゼラン雲は，銀河系への合体途上である．

2012 年にはヨーロッパ宇宙機関 (Europian Space Agency) がかつてないよい精度で 10 億個の位置と固有運動を測る天文衛星 GAIA を打ち上げる予定である．GAIA の多くの目的の一つは，銀河系の速度場の地図をつくることである．その理由は，太古の合体が他とは違った運動をする星の "**流れ**" としてまだ残っていると考えられるからである．

この合体構造の成長のどこかの段階で，ガスの密度が十分高くなり第一世代の星が生れる．それらは種族 III の星とよばれ，現在みる星とはまったく違っている．それからできるガスは水素とヘリウムだけからできていて，この世代の星によってつくられる重元素は存在しない．そのようなガスからできる星は大質量であることが知られている．太陽質量の 100 倍から 1000 倍の質量の星は，非常に高温になり急速に進化し，重元素をつくり，その外層のほとんどを吹き飛ばし，できた元素のほとんどを強い星風で重元素のほとんどを周りの空間に運ぶ．そしてその後に多くのブラックホールを残すことがもっともらしい．これらの星によって放射された紫外線は，脱結合以降中性だった宇宙の水素のほとんどを再電離するだろう．これは赤方偏移 10〜20 の間に起り，宇宙の再電離とよばれる．これは銀河が最初に光を発する時期でもある．もしその時期に観測者がいたら現在そうするように膨張宇宙を最初に光学的にみることができるだろう．

再電離と最初の星による重元素生成の後，宇宙の膨張は銀河同士をより引き離し，銀河は何世代もの星の形成をくり返し，保育園の観を呈し，そのたびに

重元素が増えてくる．現在約 50 億歳の太陽は赤方偏移が 0.3 と 0.4 の間に生れた．

この階層的構造形成シナリオの一つのパズルは，ほとんどすべての銀河の中心に巨大ブラックホールがあることである．それらがポテンシャル井戸の中にバリオン物質が集積していったように巨大なガス雲の重力崩壊で直接形成されたのか，あるいは種族 III の星が残した中間質量のブラックホールの成長と合体によって後にできたのかは，まだわかっていない．銀河の進化が合体によって支配されているという事実は，（前章で述べた）LISA 重力波天文台によって大量のブラックホール合体が観測されることを示唆している．

物理学者はどんな種類の粒子（あるいは，ブラックホールのようなより大きな質量の天体）が暗黒物質をつくっているかを知らず，また暗黒物質は電磁波をまったく放射しないが，それを間接的に観測することはできる．一つの方法は渦巻き銀河の回転曲線である：渦巻き銀河の円盤の外側を周回しているガスや星の軌道速度は，みえている星々のつくる重力によって期待される速度よりもはるかに速い．実際，観測はほとんどの渦巻き銀河で銀河の全質量は，みえている銀河の端をはるかに超えて中心からの距離に比例して増加していることを示唆している．これはその中で銀河が生れた暗黒物質の塊の痕跡である．暗黒物質の間接的な証拠を得るもう一つの方法は，重力レンズを用いることである．天文学者は，前章で議論したように図 11.8 のような多くの多重像を観測している．両方の方法は，重力を使って暗黒物質の“重さ”を測っている．

初期宇宙：基礎物理学と宇宙論　放射と物質の密度が等しい時期からさらに過去にもどると，放射優勢の宇宙になる．ビッグバンから 200 秒後までさかのぼると，温度が中性子と陽子の質量の差である約 50 keV になる．これは陽子と中性子の間の核反応が平衡に達する温度である．このエネルギー以上では，すべてのバリオンが自由になる．宇宙がこの温度から冷えると，より重たい元素ができる：主に ^{4}He であるが，若干の ^{3}He, Li, B ができる．現在われわれが観測できるヘリウムとリチウムはこの時期に形成されたものである：星の内部の反応は，それらをつくるよりは破壊する傾向になる．それらの元素の最終的な比は，その時期の宇宙膨張の速さに非常に敏感である．核反応の詳細な計算から，光子と素粒子実験から知られている 3 種類のニュートリノ以外には，軽

いあるいは質量をもたない粒子は宇宙に大量に存在しないことを示すことができる．もしほかに何かあるとすると，その重力は宇宙膨張を減速させる．その場合，現在観測されているハッブル膨張の速度を得るには，過去に元素合成の計算が許す以上の速度で膨張していなければならなかっただろう．もし余分に知られていない粒子があるとしたら，それは現在，$\Omega_\gamma \sim 10^{-5}$ という光子のエネルギー密度よりもはるかに小さなエネルギー密度をもたなければならない．したがって，ビッグバンからの重力波は，この元素合成からの制限を満たさなければならない．

この議論ではわれわれはすでにビッグバンの 200 秒後であり，十分よく理解されている物理学の範囲内である．ビッグバン 1 秒後では温度は約 500 keV となり，これはほぼ電子の質量である．したがってこのとき電子と陽電子が大量に存在し，対消滅や対生成をくり返している．これよりはるかに前では電子の静止質量は無視できて，電子と陽電子の数とエネルギー密度は光子のそれらと同じ程度になる．宇宙が膨張してこの 500 keV から冷えていくと，電子と陽電子は消滅するが，対生成が起ることはない．2，3 秒後にはほとんどすべての陽電子は消えてしまい，10^9 個の光子に対してほぼ 1 個の電子が残る．この 10^9 という比は宇宙のエントロピーとよばれ，非秩序の目安である．

この消滅期の後にいったいぜんたいなぜ電子が残るのだろうか？　換言すれば，なぜ惑星や人をつくることになる物質が残るのだろうか？　数値シミュレーションと組み合せた広範な観測は，宇宙のどこにも隠れた行方不明の反物質，反星，反銀河は存在しないことが確信をもって確立されている．大量の反物質は存在しないのである．明らかに平衡にあるプラズマ中で電子と陽電子は同じ数つくられていないのである．同じことは，陽子と電子が光子と平衡にあったより数百 MeV という温度の宇宙初期（ビックバンからたったの 10 マイクロ秒）にも起っている：陽子のほうがなぜか反陽子よりもわずかに多く，その比は電子と陽電子の比と同じであり，プラズマは全体として中性になっている．これは素粒子物理学の謎の一つである．物理学の根本法則の中に何かが，電子を陽電子より少しだけより好みしている．**自然は物質と反物質の非対称性をもっている．**

ビッグバンから 10^{-5} 秒後では陽子も中性子も存在せず，バリオンの構成要素であるクォークとグルーオンのプラズマである．素粒子論にも従えば，クォー

クは“閉じ込め”られていて，バリオンから離れて自由になることはない．しかし十分高温，高密度では，陽子同士が重なり，クォークは閉じ込められてはいるものの自由粒子のようにふるまう．

さらに10 TeVという高温度にまで話を進めることができる．このエネルギーは現在の加速器で到達できる最高エネルギーであり，物理はよく理解されていない．ジュネーブにあるCERNのLarge Hadoron Collider (LHC)は，ヒグス粒子を探し超対称性の証拠を見つけるための実験を始めている．このどちらも基礎物理学の深遠な問題を解決するために理論的に予言されたものである．特に超対称性は，素粒子論の範囲内で観測された範囲内の宇宙定数の値を予言するのに都合がよいという利点をもっている．もし超対称性が発見されたら，暗黒エネルギーが現在の素粒子論の枠組みに組み入れることができるという考えを推し進めることになるだろう．10 TeVでビッグバンのたった10^{-4}秒後にすぎない．そのエネルギーでの物理はよく理解されていないが，この時期に起ることが後の時刻に起きた今までに述べたことを変えてしまうことはありそうもない．

ここで一つ大事なことが残っている：銀河形成を引き起す暗黒物質の密度揺らぎをつくる物理メカニズムがどこにも議論されていない．その揺らぎは宇宙マイクロ波背景放射の中に観測され，究極的に宇宙の進化に導くすべてのプロセスの引き金を引くために必要である．しかしビッグバンの10^{-14}秒後でさえ，それは初期条件にすぎない：その揺らぎは，宇宙マイクロ波背景放射にみられるよりもはるかに小さな振幅ですでに存在していた．なぜなら宇宙が膨張するにつれ揺らぎは成長するからであるが，揺らぎは存在していたからである．どのように揺らぎができたのかは，既知の物理では何の説明もなかった．この問題に対する答が，インフレーションシナリオにある．後でこの問題にもどろう．

しかし密度揺らぎは，初期宇宙の説明できない唯一のことではない．出発点からわれわれは観測にもとづいて一様性と等方性を仮定してきた．脱結合期に密度揺らぎの微小な非一様性は受け入れたが，それは不可避であった：われわれの一様性の仮定は銀河や惑星が形成される小さなスケールでは成り立たない．大きなスケールでは，なぜ宇宙はこれほどスムーズなのかと問う必要がある．標準的なビッグバン理論ではスムーズ化するどんな物理過程も存在しないので，

これは特に説明が難しい．何らかの説明が必要なのである．

宇宙初期のヘリウム量を考えてみよう．その量は宇宙がビッグバンから約 5 分後に決る．われわれが天球の正反対の二つの方向に望遠鏡を向けると，それぞれ遠方のクェーサーや銀河がみえるが，それらはわれわれとどれも似たような元素組成をもっているようにみえる．しかしそれぞれの方向の天体はお互いから非常に遠方にあって，連絡を取り合うことはできない：それらは標準的な宇宙モデルにおけるお互いの粒子地平線の外側にある．これを "説明" する一つの方法は，単にビッグバンの初期条件が至るところ同じであると仮定することである．しかしお互いの領域間が離れているようにみえても，非常に初期にそれらの間で情報をやりとりできる何らかの物理過程が見つかれば，より満足できるだろう．インフレーションは，そのようなメカニズムを与える．インフレーションの基本的なアイデア (Starobinsky 1980, Guth 1981, Sato 1981, Linde 1982) は，ビッグバンから 10^{-35} 秒後のようなごく初期に一時的に宇宙は現在よりもはるかに大きな正の宇宙定数に支配されていたというものである：それはある時期に現れ，後で述べる理由で再び消えてしまった．宇宙が宇宙定数によって支配されている間は，物質も曲率も重要ではなく，宇宙は単純な法則で膨張していた．

$$H^2 = \frac{8}{3}\pi\rho_\Lambda \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\dot{R}}{R} = \frac{1}{\tau_\Lambda} \tag{12.64}$$

これは次の成長時間をもった指数関数則である．

$$\tau_\Lambda = \left(\frac{3}{8\pi\rho_\Lambda}\right)^{1/2} \tag{12.65}$$

もし指数関数的膨張（インフレーション）が，$e^{20\sim30}$ 倍になるまで続けば，非常に小さなサイズの領域が現在観測可能な宇宙全体になるほど十分に膨らむことがでる．この微小な領域はインフレーションが始まる前に何らかの物理的メカニズムで一様にすることができる．というのは領域が小さいのでごく短時間でも情報が全体に伝わることができるからである．そしてインフレーションが始まると，それが膨張してわれわれの宇宙の初期条件ができ上がる．

これが現在われわれがみている一様性の説明である：宇宙のあらゆる領域が，インフレーションが始まる前の微小領域からできているのである．インフレーションはまた宇宙マイクロ波背景放射の温度揺らぎも説明する．この説明には

インフレーションのメカニズムについてより詳細まで踏み込まなければならない．現在の宇宙定数を計算する試みは，前章でホーキング放射を説明したときに用いた量子場の真空のエネルギーに焦点を当てている．真空のエネルギーはローレンツ変換に対して不変なので，この目的には都合がよい：量子論の真空状態に，特定の方向性は存在すべきでないからである．これは真空に付随したストレス–エネルギーテンソルはローレンツ不変でなければならないことを意味する．$\binom{0}{2}$ タイプのローレンツ不変な対称テンソル場はメトリックテンソル自身である．したがって暗黒エネルギーの真空エネルギーによる説明は，自動的に宇宙定数のようなメトリックテンソルに比例するものとなる．

TeV スケールを超える非常に高エネルギーでの相互作用のふるまいのモデルでは，真空の性質が変化する相転移が予想される．大きな真空のエネルギーが宇宙定数の形をとり，インフレーションを引き起す．これは動的なプロセスで，相変化が起ったときに始まり，そのエネルギーが最終的に光子や他の素粒子となる実際のエネルギーとして解放されたときに終る．したがって宇宙は限られた時間の間だけインフレーションを起す．さてインフレーションのはじめには通常の真空の揺らぎが存在する．驚くべきことに指数関数的膨張は，非線形振動子が振幅を増加させるようにその揺らぎを増幅して，量子スケールの微小な密度揺らぎをより大きな古典的揺らぎにしてしまう．

このモデルにもとづいて計算を行うと，揺らぎの振幅は適当な値となり，そのスペクトルは宇宙マイクロ波背景放射から推測されるものと一致する．そして物理的な仮定は基本物理学のいろいろな相互用の統一という現在的な観点と矛盾していない．しかしインフレーションは，素粒子間の力を統一する完全な理論ができるまでは，あるいは観測によってモデルの中の場とポテンシャルを解明できるまでは，"理論" ではなく "モデル" にとどまるだろう．しかしながらインフレーションは，強力で信じるに足るパラダイムである．それは物理学者が初期宇宙についての最も深遠な疑問を考えるときの枠組となっている*．

---

*訳注：　現在のインフレーション理論では，インフレーションと真空の相転移とは関係がないとされる．インフレーションを引き起すのはインフラトンとよばれるスカラー粒子がもつポテンシャルエネルギーで，それは宇宙定数的にふるまうとされる．なおインフラトンの正体は現時点では不明で，そのポテンシャルの形はインフレーションを起すように決められているが，それによっていくつものモデルがある．

一般相対論を超えて　インフレーションは，素粒子間の相互作用を支配する法則が初期宇宙で実現される高エネルギーにおけるふるまいを仮定していて標準的な物理学を超えている．しかし重力理論は変更していない：古典的な一般相対論の枠組で議論される．しかしながら，前に注意したように古典論は最終的には量子的な記述で置き換えなければならず，その研究は現代物理学の主要な活動の一つである．

首尾一貫した理論はまだできていないが，新たな観測の可能性，新たな説明を与えるいくつかの興味深いアイデアが生れている．その一つは，ループ量子重力理論で，電磁気力のような他の力は無視して時空そのものを直接量子化しようとする試みである．この理論では，プランク・スケールのような微小スケールで時空の多様体としての性質は破たんし，より小さなスケールの構造としてからみあったループが現れる．この理論にはいくつかの異なったアプローチとそれぞれの微小構造があるが，いずれも時空はより複雑なトポロジーをもった何かをより大きなスケールで平均したものであるという点は共通である．それらのアイデアは数学的に自然な仕方で出てくる．ループ量子重力の最近の成果は，ビッグバン特異点を解消したことである．時間をさかのぼると宇宙はビッグバンを通り抜けることができて，古典的な収縮宇宙につながることを示したのである．

研究している物理学者の数からいえばより活発なのは，量子重力への弦理論的アプローチである．その目的は重力も含めたすべての相互作用の統一であり，したがって理論ははじめから電磁気力や弱い力，強い力を含んでいる．弦理論は，11 次元時空でのみ無限大のエネルギーを取り除くための人為的な操作をしないという意味で，首尾一貫しているようにみえる．われわれはそのうちの 4 次元に住んでいるので，ほかの余分な次元について何らかの処置を必要がある．

最初の仮定は，余分の空間次元は小さいままだとする：各点にくっついた余分の空間はプランクサイズの 7 次元球で，われわれの 4 次元宇宙からプランク長よりも小さなものだけを励起する可能性がある．これを観測するのは容易ではない．しかし余剰次元のいくつかの方向は大きいかもしれない．この場合，われわれの 4 次元宇宙はこの 5 次元，あるいはより高次元環境における 4 次元的な面にすぎない．この面は，**ブレーン**とよばれる．ブレーンは，“メンブレー

ン（膜)” という言葉からきている．ブレーン上の弦理論は特殊な性質をもっている：重力以外の力は，ブレーンに閉じ込められていて重力だけが余剰次元方向にも伝わることができる．この性質は，ブレーンのまわりの空間を特徴づける長さのスケールに相当するスケールでニュートン重力の逆二乗則を修正する．逆二乗則の実験から，このスケールは1ミリメートル程度よりも小さくなければならないことはわかっている．しかしミリメートルからプランクスケールまでは大きな隔たりがあり，新しい物理がその間のどこかに発見されるのを待っているのかもしれない（Maarten 2004）．

新しい物理はいろいろな形をとりうるだろう．ブレーン同士の衝突が，ビッグバンを引き起すのかもしれない．近傍のブレーンは影の物質からできた星や銀河が存在する平行宇宙で，重力によってのみ通信できるのかもしれない．影の物質，あるいはビッグバンでのブレーンに関連した初期条件による余分の重力波があるかもしれない．

これらのアイデアは，サイエンスフィクションのように聞こえるだろうが，しっかりとした理論モデルにもとづいている．理論モデルは弦理論の方程式を大幅に簡単化し，それらの奇妙な効果を得るために適当なパラメーターをとって導かれている．したがってそれらは予言でも馬鹿げた推測とも見なすべきではない．完全な量子重力理論が与えるかもしれない革命的な物理学のある種の兆候と見なすべきである．高精度の実験，あるいは観測結果，重力波，あるいは宇宙論からのヒントは正しい理論への方向を示す鍵を与えるだろう．

12.5　文　献

宇宙論に関する文献は膨大である．本文の中でいくつかの結果の主な文献をあげたので，ここではこの分野の推薦できる参考書をあげよう．

標準的な宇宙論は Weinberg (1972) に詳しく扱われている．一般相対論における宇宙モデルは，等方性の仮定を外すとより複雑になるが，ビッグバンがあるとか，開いているとか閉じているといった全体的な特徴は変らない．Ryan と Shepley (1975) を参照せよ．宇宙論のよく配慮された導入は，Heidmann (1980) にある．

古典として今も価値を失わない物理的宇宙論の初期の議論は，Peebles (1980)，Liang と Sachs (1975)，Balian ら (1980) にある．より現代的な議論は，Liddle (2003) を参照せよ．

現在の重要な研究分野として非一様宇宙がある．MacCallum (1979) を参照せよ．理論的な宇宙論と密接に関連したものに特異点理論がある：Geroch と Horowitz (1979)，Tipler ら (1980) を参照せよ．また宇宙論における時間の非対称性についての Penrose (1979) による興味深い解説も参照せよ．

物理的宇宙論についてより深く学びたければ，Mukhanov (2005) の素晴らしい教科書を参照せよ．"なぜ" 宇宙が現在の性質をもっているかの違った観点として，人間原理についての Barrow と Tipler (1986) の本がある．

研究者によって書かれた一般向けの宇宙論の記事として，Einstein Online website: http://www.einstein-online.info/がある．

12.6 練　習　問　題

1　二次元球面のメトリックを使って，図 12.1 のところで述べていること，つまり球が膨張すると，任意の二点間の距離の増大する割合は（球上で測定して）その相互の距離に比例することを証明せよ．

2　天文学者の使う単位，パーセクは視差が 1 秒となる太陽から星までの距離として定義される．（星の視差は，地球が太陽のまわりを公転するとき，地球から測った星の位置の変化の最大値の半分を角度で表したものである．）地球軌道の半径を $1\,\mathrm{AU} = 10^{11}\,\mathrm{m}$ として，1 パーセクの長さがいくらかを計算せよ．

3　ニュートン宇宙論．

(a) ニュートンの重力の法則を宇宙論に適用する．$\nabla^2\Phi = 4\pi\rho$ の $\rho =$ 一定 に対する一般解がデカルト座標で 2 次の多項式であるが，必ずしも等方的である必要はないことを示せ．

(b) もし宇宙が $\rho =$ 一定 の領域を含み，その外側で真空とする．すると境界が球でなければ重力場は等方的ではないことを示せ．重力場は中心も含めて領域内部で球対称から大きくずれる．

(c) そのようなニュートン的宇宙では，境界が粒子地平線のはるかかなたにあったとしても局所的な観測によって境界の形を決めることができることを示せ．

4　式 (12.3) で，すべての i と j について $h_{ij}(t_1) \neq f(t_1, t_0)h_{ij}(t_0)$ だとすれば，銀

河間の距離は非等方的に増大することを示せ．ハッブルの法則は

$$v^i = H^i{}_j x^j \qquad (12.66)$$

のように表され，行列 $H^i{}_j$ は単位行列に比例していない．

5　銀河が $x^i =$ 一定の直線に沿って運動していて，局所的な宇宙が一様だと観測するとすると，式 (12.5) の g_{0i} が消えなければならないことを示せ．

6　(a) 式 (12.8) に至る過程，つまり式 (10.15)～(10.17) で Φ をゼロとおくことによって，今問題とする三次元空間の G_{ij} が求められることを示せ．

(b) 式 (12.9) と (12.10) を導け．

7　式 (12.11) で $A = 0$ でなければ，式 (12.7) で与えられるメトリックは $r = 0$ で局所的に平坦でなくなることを示せ．

8　(a) 式 (12.19) を導く座標変換を求めよ．

(b) ミンコフスキー時空における双曲面 $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 =$ 一定 > 0 の幾何学は適当な座標系で式 (12.19) で与えられたものと同じであることを示せ．

(c) ミンコフスキー空間のローレンツ変換を用いて，$k = -1$ 宇宙が一様で等方的であることを示せ．

9　(a) 式 (12.13) のメトリックの中で，動径方向のヌル測地線を伝播する光子は，$R(t)$ に反比例するエネルギー $-p_0$ をもつことを示せ．

(b) このことを使って，時刻 t_e に放射された光子が，時刻 t_r に宇宙論的な基準系に対して静止している観測者によって観測されたとすると，その赤方偏移は

$$1 + z = R(t_r)/R(t_e) \qquad (12.67)$$

であることを示せ．

10　式 (12.24) から，近傍（光がとどくまでにかかる時間が小さい）天体の速度と宇宙論的な赤方偏移が，後退速度 v をもった物体に対して期待されるような $z = v$ であることを示せ．

11　(a) 式 (12.29) を示し，それから式 (12.30) を導け．

(b) 本文中で示した式 (12.31) に至るステップを埋めよ．

12　式 (12.31) から式 (12.42) を導け．また式 (12.40) から式 (12.44) を導け．

13　ふつう天文学者は固有の光度や流束を使わない．そのかわりに絶対等級と見かけの等級を使う．星の見かけの（輻射）等級は，標準の流束 F_s に対する観測される流束 F の相対値

$$m = -2.5 \log_{10}(F/F_s) \qquad (12.68)$$

で定義される．ここで，$F_s = 3 \times 10^{-8}\,\mathrm{J{\cdot}m^{-2}{\cdot}}s^{-2}$ は夜空で最も明るい星からの光で地球での可視光の流束のだいたいの値である．絶対等級とは，天体が 10 pc の距離にあったとしたときの見かけの等級のことである．つまり

$$M = -2.5\ \log_{10}[L/4\pi(10\,\mathrm{pc})^2 F_s] \tag{12.69}$$

である．式 (12.42) と式 (12.27) を用いて，式 (12.34) を天文学者が使う次の式に書き直せ．

$$m - M = 5\ \log_{10}(z/10\,\mathrm{pc}H_0) + 1.09(1 - q_0)z \tag{12.70}$$

天文学者は，これを赤方偏移–等級関係とよぶ．

14　(a) ロバートソン–ウォーカー・メトリック (12.13) に対して，すべてのクリストッフェル記号 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ を計算せよ．特にそのゼロでない成分が以下のようになることを示せ．

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0{}_{jk} = \frac{\dot R}{R} g_{jk}, \quad \Gamma^j{}_{0k} = \frac{\dot R}{R}\delta^j_k, \quad \Gamma^r{}_{rr} = \frac{kr}{1 - kr_2} \\
&\Gamma^r{}_{\theta\theta} = -r(1 - kr^2), \quad \Gamma^r{}_{\phi\phi} = -r(1 - kr^2)\sin^2\theta \\
&\Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^\phi{}_{r\phi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\theta{}_{\phi\phi} = \sin\theta\,\cos\theta, \quad \Gamma^\phi{}_{\theta\phi} = \cot\theta
\end{aligned} \tag{12.71}$$

(b) クリストッフェル記号を使って宇宙論的流体のストレス–エネルギーテンソルの発散の時間成分が次のようになることを示せ．

$$T^{0\alpha}{}_{;\alpha} = \dot\rho + 3(\rho + p)\frac{\dot R}{R} \tag{12.72}$$

(c) この方程式に R^3 を掛けて，式 (12.46) を導け．

15　式 (12.49) から，放射が温度 T の黒体放射のスペクトルをもつとすれば，T は R に反比例することを示せ．

16　練習問題 14 のクリストッフェル記号を用いて，式 (12.50) を示せ．

17　式 (12.46) と式 (12.54) の時間成分を用いて，$\ddot R$ に対する式 (12.55) を導け．$p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ の関係を使え．

18　この章では，宇宙定数の負の圧力（張力）が宇宙を加速する原因であることをみた．しかし，これは通常の物理学と矛盾しないのであろうか?　張力は外向きではなく，内向きに引っ張るのではないだろうか?　宇宙の任意の一部に対する正味の圧力はゼロになることを示して，この見かけ上の矛盾を解せよ．4.6 節の議論を参照せよ．

19　宇宙が物質優勢で宇宙定数がゼロであることを仮定して，式 (12.54) で k が無視できるような十分初期では，スケール因子が $R(t) \propto t^{2/3}$ のようにふるまうことを示せ．

20　宇宙が物質優勢であると仮定して，静的な宇宙となる ρ_Λ の値を求める．

(a) 現在，宇宙は物質優勢なので，$\rho_m(t) = \rho_0[R_0/R(t)]^3$ とおく．ここで添字 0 は，われわれが探している静的な解の量であることを表す．"エネルギー" 方程式 (12.54) を時間で微分して，物質優勢宇宙を支配する力学方程式

$$\ddot{R} = \tfrac{8}{3}\pi\rho_\Lambda R - \tfrac{4}{3}\pi\rho_0 R_0^3 R^{-2} \tag{12.73}$$

を求めよ．左辺を 0 とおくことで解が得られる．

$$\rho_\Lambda = \tfrac{1}{2}\rho_0$$

アインシュタインの静的宇宙では，宇宙定数のエネルギー密度は物質のエネルギー密度の半分でなければならない．

(b) 上の ρ_m の表式を式 (12.54) の右辺に代入し，静的宇宙に対してその微分がゼロになるエネルギーのような表現を求めよ．上で求めた ρ_Λ の条件が実際にその微分をゼロにすることを確かめよ．

(c) 式 (12.54) の時間に関する 2 階微分を計算して，静的な解のとき，それが正となることを示せ．このことは，'ポテンシャル' が最少で，アインシュタインの静的な解が安定であることを示している．

21　負の宇宙定数をもった膨張宇宙の過去と未来について考察せよ．図 11.1 のような図を書いて行ってみよ．図 12.4 も参照せよ．

22　(この練習問題の一部はコンピューターかプログラム可能な電卓を使える人のためのものである．) 宇宙について，もっと現実的な状態方程式を次のようにして求めよう．

(a) 現在，物質密度が $\rho_m = m \times 10^{27}\,\mathrm{kg \cdot s^{-3}}$ (m は 1 の程度の量) で，宇宙輻射は温度 2.7 K の黒体であると仮定する．ρ_r を輻射のエネルギー密度として，比の値 $\varepsilon = \rho_r/\rho_m$ を求めよ．バリオン 1 個あたりの光子の数が約 $\varepsilon m_p C^2/kT$ であることを示せ．

(b) $\varepsilon(t)$ と $m(t)$ を使って，エネルギー保存則 $T^{0\mu}{}_{,\mu} = 0$ の一般的な形を導け．

(c) この式と式 (12.27) を現在から始めて，過去に向かって数値的に解け．ここで，現在 $\dot{R}/R = 75\,\mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$ で，物質と輻射の間でのエネルギーのやりとりはないものと仮定する．$m = 0.3$，1.0，3.0 のときに計算を行え．輻射の温度が $E_i/25.7\,k$ に

なったところで，計算を終了する．ここで E_i は水素のイオン化エネルギー (13.6 eV) である．この値は，大ざっぱにいってすべての水素をイオン化するのに十分な光子のある温度である．$kT = E_i/25.7$ のときには，E_i より大きなエネルギーをもつのは 2×10^{-9} の割合の光子であり，これは水素原子 1 個あたり 1 個の光子を与えるだけの割合となっている．各 m に対して，R_0 を現在のスケールファクターとして，その時期の $R(t)/R_0$ の値を求めよ．この結果を説明せよ．この時期の t の値はいくらか?

(d) 物質の圧力が輻射圧に比べてまだ無視できるかどうかをしらべよ．(そのとき，物質の温度が必要になるが，物質はイオン化されていて輻射と強く相互作用するので，輻射の温度に等しい．)

(e) 今度は，輻射と物質がその温度を等しくするようにエネルギーのやりとりをしていくと仮定して，遊離の時期から過去に向かって，方程式を積分していけ．おのおのの場合，$R = 0$ となるビッグバンはどれだけ前の時刻に起ったか?

23 宇宙マイクロ波背景放射の温度が現在 2.7 K で，脱結合時に温度 $E_i/20\,\mathrm{k}$ をもっていたと仮定して，脱結合時の赤方偏移を計算せよ．ここで，$E_i = 13.6\,\mathrm{eV}$ は水素をイオン化するのに必要なエネルギーである．(練習問題 22 (c) を参照)

24 ハッブル定数が $75\,\mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$ であるとすると，$k = +1$ の宇宙での現在の密度として最小の値はいくらか?

25 物理法則の不確実性のために，宇宙論についての確実な結論を引きだしえなくなる時期を次のようにして求めよ．

(a) 式 (12.27) と式 (12.32) から，輻射優勢の初期宇宙では k が無視できて，温度 T が

$$T = \beta t^{-1/2}, \quad \beta = (45\,\hbar^3/32\,\pi^3)^{1/4}\,k^{-1}$$

となることを導け．

(b) 現在までに知られている素粒子物理の知識は $kT > 10^3\,\mathrm{GeV}$ で不確実になると仮定して，物理学を信用できる最初の時刻 t を求めよ．

(c) 量子重力はたぶん光子のエネルギー kT が十分大きくなって，1 波長 $(\lambda = h/kT)$ より小さなブラックホールを形成するときに重要となってくる．この条件から $kT \sim h^{1/2}$ であることを示せ．これは**プランク温度**である．どの時刻 t でこのことが重要になってくるか?

付　録
線形代数のまとめ

読者の便宜のため，本書で必要な線形代数のいくつかの点をまとめておくが，このすべてが読者にとってはじめてのことでないことを期待する．

ベクトル空間　　元の集合 $V = \{A, B, \cdots\}$ が実数上の**ベクトル空間**をなすとは，（a，b を実数として）次の公理を満たすとき，そしてそのときに限る．

(1)　V は $+$ 演算で可換群であり $(A+B = B+A \in V)$，その恒等元は，0 である $(A+0 = A)$．

(2)　ベクトルに実数を掛けることは別のベクトルをつくる操作であり，これは

（i）ベクトルの加法について分配的である；$a(A+B) = a(A) + a(B)$

（ii）実数の加法について分配的である；$(a+b)(A) = a(A) + b(A)$

（iii）実数の掛算について結合的である；$(ab)(A) = a(b(A))$

（iv）実数の恒等元に矛盾しない；$1(A) = A$

この定義は，複素数あるいは任意の体上のベクトル空間に一般化されるが，ここではその必要はない．

ベクトルの集合 $\{A, B, \cdots\}$ が**線形独立**であるとは，次のようなゼロでない実数 $\{a, b, \cdots, f\}$ が存在しないとき，そのときに限りいう．

$$aA + bB + \cdots + fF = 0$$

ベクトル空間の次元とは，とりうる**線形独立**なベクトルの最大数をいう．ベクトル空間の基底とは，n をその空間の次元としたとき，任意の線形独立なベクトルの

集合 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ のことである．任意の B に対して，集合 $\{B, A_1, \cdots, A_n\}$ は線形従属であるから，B は基底ベクトルの線形結合として書くことができる．

$$B = b_1 A_1 + b_2 A_2 + \cdots + b_n A_n$$

数の集合 $\{b_1, \cdots, b_n\}$ は B の $\{A_1, \cdots, A_n\}$ に関する成分とよばれる．

ベクトル空間上には**内積**が定義される．それは，任意のベクトルの対，A, B に，実数 $A \cdot B$ を対応させる規則であり，次の性質をもつ．

(1)　$A \cdot B = B \cdot A$

(2)　$(aA + bB) \cdot C = a(A \cdot C) + b(B \cdot C)$

(1) より，写像 $(A, B) \to (A \cdot B)$ は対称であり，(2) からその写像は双一次である．内積は，すべての $A \neq 0$ に対して $A \cdot A > 0$ のとき，正定値とよばれる．この場合，ベクトル A の**ノルム**が $|A| \equiv (A \cdot A)^{1/2}$ として定義される．相対論では，不正定値である内積が取り扱われる．すなわち $A \cdot A$ はあるベクトルに対しては正，他のベクトルに対しては負となる．この場合，しばしばノルムあるいは大きさは $|A| \equiv |A \cdot A|^{1/2}$ として定義される．二つのベクトル A と B が直交するとは，$A \cdot B = 0$ になるとき，そしてそのときに限っていう．

$i \neq j$ のとき，$A_i \cdot A_j = 0$，すべての k に対して $|A_k| = 1$ であるような**正規直交**している基底ベクトルの集合 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ を選ぶと便利なことが多い．しかし，これはもちろん必ずしも必要ではない．直交していない基底に不慣れな読者は，次のことを試してみよ．二次元のユークリッド平面で，デカルト（直交）座標 x，y とそれに付随するデカルト（直交）基底ベクトル e_x，e_y がある．$A = 5e_x + e_y$，$B = 3e_y$ としてベクトル A，B を定義する．A，B を非直交基底 $\{e_1 = e_x,\ e_2 = e_y - e_x\}$ の線形結合で表してみよ．e_1 と e_x は同じであるが，A と B の第 1 成分と x 成分は同じではないことに注意する．

行　列　　行列とは数のある種の集りである．ここでは正方行列のみを扱う．たとえば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad や \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -6 & 3 & 18 \\ 10^5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行列の**次元**とは，その列（あるいは行）の数のことである．行列の要素を A_{ij}

と表す．ここでは，i は行を，j は列を示す．たとえば 2×2 行列では

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

列ベクトル W とは，数 W_i の集合であり，たとえば二次元では $\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}$ となる．(列ベクトル全体は通常の仕方でベクトル空間をつくる．) 次の規則により列ベクトルと行列の掛算から，別の列ベクトルがつくられる．$V = \mathbf{A} \cdot W$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}W_1 + A_{12}W_2 \\ A_{21}W_1 + A_{22}W_2 \end{pmatrix}$$

添字記法では

$$V_i = \sum_{j=1}^{2} A_{ij} W_j$$

となる．n 次元での行列とベクトルに対してこれは次のように一般化される．

$$V_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} W_j$$

和は $\mathbf{A}$ の**第 2** の添字について行われることに注意せよ．

行列の集合は次の加法と実数の掛算により，それ自体でベクトル空間をつくる．

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \Rightarrow C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$
$$a\mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow B_{ij} = aA_{ij}$$

$n \times n$ 行列では，このベクトル空間の次元は n^2 である．次のような自然な内積がこの空間上で定義される．

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{ij} A_{ij} B_{ij}$$

この内積が正定値であることは容易にわかる．われわれの目的にとって内積よりも重要なことは，**行列の乗法**である．(乗法をもつベクトル空間は，代数とよばれる．したがってわれわれは行列代数を扱うことになる．) 2×2 行列では積は次のように定義される．

$$\mathbf{AB}=\mathbf{C}\Rightarrow\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{pmatrix}$$

添字記法では

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{2}A_{ik}B_{kj}$$

となる．$n\times n$ 行列への一般化は明らかに

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj}$$

足し合される添字は A の第 2 の添字と B の第 1 の添字である．この乗法は結合的であるが，可換ではない．恒等元は，その要素がクロネッカーのデルタ δ_{ij}（$i=j$ なら $\delta_{ij}=1$，その他は $\delta_{ij}=0$）であるような行列である．

2×2 行列の**行列式**は

$$\det\mathbf{A}=\det\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$$
$$=A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}$$

任意の $n\times n$ 行列 $\mathbf{B}$ とある要素 B_{lm}（l と m は固定する）が与えられたとき，$\mathbf{B}$ から第 l 行と第 m 列を除くことによって定義された $(n-1)\times(n-1)$ 行列を $\mathbf{S}_{lm}$ とよび，$\mathbf{S}_{lm}$ の行列式を D_{lm} とよぶ．たとえば $\mathbf{B}$ が 3×3 行列

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12} & B_{13}\\ B_{21} & B_{22} & B_{23}\\ B_{31} & B_{32} & B_{33}\end{pmatrix}$$

なら，部分行列 $\mathbf{S}_{12}$ は次の 2×2 行列である．

$$\mathbf{S}_{12} = \begin{pmatrix} B_{21} & B_{23} \\ B_{31} & B_{33} \end{pmatrix}$$

その行列式は

$$D_{12} = B_{21}B_{33} - B_{23}B_{31}$$

B の行列式は，次のように定義される

$$\det(\mathbf{B}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} B_{ij} D_{ij} \quad (i \text{ は任意})$$

この表現では，i を固定し，j に関してのみ和をとる．その結果は，どの i を選んだかにはよらない．このことから，たとえば 3×3 行列の行列式は 2×2 行列の行列式から，4×4 行列の行列式は 3×3 行列の行列式から定義される．

行列の乗法が定義されるから，その演算に関するある行列の逆（これはふつう，単に逆行列とよばれる）が定義される．

$$(\mathbf{B}^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ji} / \det(\mathbf{B})$$

この逆元は $\det(\mathrm{B}) \neq 0$ のとき，そのときに限り定義される．

練習問題のヒントと解答

1 章

1 $3.7 \times 10^{-24}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}}$；$3.5 \times 10^{-43}\,\mathrm{kg{\cdot}m}$；$10^{-7}$；$10^{-4}\,\mathrm{kg}$；$1.1 \times 10^{-12}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$；$10^{3}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$；$3.7 \times 10^{-15}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$

2 $3 \times 10^{6}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$；$9 \times 10^{35}\,\mathrm{N{\cdot}m^{-2}}$；$3.3 \times 10^{9}\,\mathrm{s}$；$9 \times 10^{16}\mathrm{J{\cdot}m^{-3}}$；$9 \times 10^{17}\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$

6 すべての項を書き下してみよ．

7 $M_{00} = \mu^2 - \alpha^2$，$M_{01} = \mu\nu - \alpha\beta$，$M_{11} = \nu^2 - \beta^2$，$M_{22} = a^2$，$M_{33} = b^2$，
$M_{02} = M_{03} = M_{12} = M_{13} = M_{23} = 0$

8 (c) Δx^i のいくつかの特別な値を用いよ．たとえば $\Delta x = 1$，$\Delta y = 0$，$\Delta z = 0$ から $M_{11} = -M_{00}$ が導かれる．

10 ヌル的，空間的，時間的，ヌル的

13 相対性原理によれば，(われわれが実際に時間座標を目盛るのに用いるような，既知の距離を光が横切るのに要する時間にもとづいたような) ある時計に対して時間の遅れが適用されるなら，(パイ中間子の寿命のような) 他のあらゆる時計に対しても時間の遅れが適用されることになる．

16 (a) 図 1.14 で，事象 $\mathscr{B}$ に対する比 $\bar{t}/t$ を求める．(これらは，$\mathscr{A}$ からの時間座標の差である．) $\mathscr{O}$ における $\mathscr{B}$ の座標は (t, vt)．式 (1.12) の第 1 行から $\bar{t} = t(1 - v^2)^{1/2}$ が導かれる．

17 (a) $12\,\mathrm{m}$；(b) $1.25 \times 10^{-8}\,\mathrm{s} = 3.75\,\mathrm{m}$，$211\,\mathrm{m}^2$，空間的；(c) $9\,\mathrm{m}$，$20\,\mathrm{m}$；(d) 誤り：空間的に離れた事象の図には，一意的な時間の順序づけはできない．(e) 戸が閉ったのを一人の観測者がみたとすれば，どの観測者がみても戸は閉じていなければならない．棒を伝わる衝撃波の速度が有限 ($< c$) であることは，棒が剛体としてふるまわ

ないことを意味する．

18 (b) $\tanh[N\tanh^{-1}(0.9)] \approx 1-2(19)^{-N/2}$

2 章

1 (a) -4；(b) 7, 1, 26, 17；(c) (b) に同じ．(d) -15, 27, 30, -2；(e) $A^0B_0=0$, $A^2B_3=0$, $A^3B_1=12$ など；(f) -4；(g) (e) のうち添字が $(1,2,3)$ のみのもの

2 (c) γ と α がフリー，μ と λ がダミーで 16 個の方程式.

10 $\vec{A}$ に対しておのおの基底ベクトルを選ぶと，式 (2.13) の四つの方程式が得られる.

12 (b) $(35/6, -37/6, 3, 5)$

14 (a) z 方向に $-(0.75/1.25)=-0.6$

15 (a) $(\gamma, \gamma v, 0, 0)$；(b) $(\gamma, \gamma v^x, \gamma v^y, \gamma v^z)$ ここで $\gamma = (1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})^{-1/2}$；(c) $v^x = U^x/U^0 = 0.5$ など

18 (a) $\vec{a}\cdot\vec{a}>0$, $\vec{b}\cdot\vec{b}>0$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ とすると，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b} > 0$

(b) $\vec{a}$ が時間的なら，$\vec{a}\to(a,0,0,0)$ となる系を用いよ．

19 (b) $v=\alpha t(1+\alpha^2t^2)^{-1/2}$, $x=\alpha^{-1}[(1+\alpha^2t^2)^{1/2}-1]$, $\alpha=1.1\times10^{-16}\,\mathrm{m}^{-1}$, $t=2.0\times10^{17}\,\mathrm{m}=6.7\times10^8\,\mathrm{s}=21$ 年

(c) $v=\tanh(\alpha\tau)$, 10 年

22 (a) 4 kg, 3.7 kg, $0.25(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y)$；(b) $(3,-1/2,1,0)$ kg, 3 kg, 2.8 kg, $-(1/6)\boldsymbol{e}_x+(1/3)\boldsymbol{e}_y$, $0.2\,\boldsymbol{e}_y$.

23 $|\boldsymbol{v}|^2=2/3$

24 CM 系で考えよ．

25 (a) $\vec{p}$ のローレンツ変換

27 静止質量の比は $1+3.3\times10^{-16}$ なので，低温のほう．

33 $E_{\max}=8\times10^5\,m_{\mathrm{p}}$, γ 線以上のエネルギー

3 章

4 (b) $\tilde{p}\to(-1/4, -3/8, 15/8, -23/8)$；(d) 線形独立

6 (a) $\tilde{p}$ として，$\{\vec{e}_\alpha\}$ の双対基底の要素 $\tilde{\omega}^0$ をとって考えよ．(b) $(1,0,0,1)$

9 $\tilde{\mathrm{d}}T(\mathscr{P})\to(-15,-15)$；$\tilde{\mathrm{d}}T(\mathscr{Q})\to(0,0)$

10 (a) x^β に関する偏微分は，$\alpha\neq\beta$ なるすべての x^α を固定している．したがって $\alpha\neq\beta$ なら，$\partial x^\alpha/\partial x^\beta=0$．もちろん $x^\alpha=x^\beta$ なら $\partial x^\alpha/\partial x^\beta=1$

12 (a) 定義より $\vec{V}$ が S に接するならば $\tilde{n}(\vec{V})=0$. したがって $\vec{V}$ が接ベクトルでなければ $\tilde{n}(\vec{V})\neq 0$.

(b) $\vec{V}$ と $\vec{W}$ が S の同じ側を向いていれば, $\vec{T}$ を S の接ベクトルとしたとき $\vec{W}=\alpha\vec{V}+\vec{T}$ となるような**正の数** α が存在する. よって $\tilde{n}(\vec{W})=\alpha\tilde{n}(\vec{V})$ であり, ともに同じ符号をもつ.

(c) デカルト基底上で, $\tilde{n}$ の成分はある β を使って $(0,0,\beta)$ である. したがって, どんな $\tilde{n}$ も別の垂直一形式の定数倍となる.

16 (e) 四次元で 10 と 6

18 (b) $\vec{q}\rightarrow(-1,-1,1,1)$

20 (a) 行列でいえば, $\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}A^{\beta}$ は 行列 $\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}$ と列ベクトル A^{β} の積であり, $\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}}P_{\alpha}$ は $\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}}$ の**転置**行列と列ベクトル P_{α} の積である. $\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}}$ は $\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}$ の逆行列だから, $\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}}$ がその逆行列の転置に等しいなら, 両者は同じ変換である.

21 (a) $t=0$ と $t=1$ の面に付随したベクトルは**内向き**である.

24 (b) 意味がない.

25 $\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}}$ と $\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}$ がお互いの逆行列であるという性質を用いよ.

26 (a) $A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}=-A^{\beta\alpha}B_{\alpha\beta}=-A^{\beta\alpha}B_{\beta\alpha}=-A^{\mu\nu}B_{\mu\nu}=-A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}$. したがって $2A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}=0$. 式の変形で, 順に反対称性, 対称性, ダミー添字の名前のつけ替えを用いている.

28 $\vec{U}$ の任意性を用いよ.

30 (a) $\vec{D}\cdot\vec{D}=-x^2+25t^2x^2+2t^2\neq 1$ なので, $\vec{D}$ は四元速度場ではない.

(f) $5t$

(h) (e) から $-5t$

(i) ρ のベクトル勾配は成分 $\{\rho^{,\alpha}\}=(-2t,2x,-2y,0)$ をもつ.

(j) $\nabla_{\vec{U}}\vec{D}\rightarrow[t^2,5t^3+5x(1+t^2),\sqrt{2}(1+t^2),0]$

33 (d) $O(3)$ の任意の元 (A) を与えたとき, 次の 4×4 行列 (Λ) をつくる.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & (A) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

これが $L(4)$ の元で, このような二つの行列の積がまた同じ型になり, したがってそれらは部分群をつくることを示せ. これらは（二つの系の相対速度が 0 であるような）純粋な空間軸のまわりの回転を表す. 式 (1.12) のような変換は純粋ブースト（空間

軸はそろっていて，相対速度がゼロでない）である．最も一般的なローレンツ変換はブーストと回転をともに含んでいる．

34 (c) $g_{uu} = g_{vv} = 0$，$g_{uv} = -1/2$，$g_{uy} = g_{uz} = g_{yz} = 0$，$g_{yy} = g_{zz} = 1$

(e) $\tilde{\mathrm{d}}u = \tilde{\mathrm{d}}t - \tilde{\mathrm{d}}x$，$\tilde{\mathrm{d}}v = \tilde{\mathrm{d}}t + \tilde{\mathrm{d}}x$，$\mathbf{g}(\vec{e}_u, \quad) = -\tilde{\mathrm{d}}v/2$，$\mathbf{g}(\vec{e}_v, \quad) = -\tilde{\mathrm{d}}u/2$，$\{\vec{e}_u, \vec{e}_v\}$ の双対基底，$\{\tilde{\mathrm{d}}u, \tilde{\mathrm{d}}v\}$ は，メトリックによって写像された一形式の集合に等しくないことに注意せよ．

4 章

2　この流束に寄与している粒子のすべてが，x 方向に動いている必要はない．さらに非直交座標 $(t, x, y' \equiv x + y, z)$ への変換を考えてみよ．$x =$ 一定の面は変化しないので，それを横切る流束は変化しない．しかし t，y'，z を一定にする "x 方向" は，以前の $\vec{e}_x + \vec{e}_y$ 方向である．変化していない流束を，この新しい x 方向への流束と見なせるかどうか考えてみよ．このあいまいな用語は，直交性ということを暗に仮定している．

3　(a) ガリレイ的な物理では，$\boldsymbol{p}$ は系を変えると変った．しかし相対論では $\vec{p}$ は変らず，その成分だけが変化する．

(b) ガリレイ的な物理で四次元ベクトルを $(m, \boldsymbol{p})$ と定義すると，ガリレイ変換によってこれは $(m, \boldsymbol{p} - m\boldsymbol{v})$ に変る．ここで $\boldsymbol{v}$ は二つの系の相対速度である．これは相対論的な式 (2.21) で，v^2 のオーダーの項を無視した近似になっている．

4　要求される密度は $\vec{U} \to (1, 0, 0, 0)$ となる系で，定義から N^0 である．この系では $\vec{N} \cdot \vec{U} = -N^0$

8　(a) その座標が，たとえば p と T であるような二次元空間を考える．その中のどの点も，その p と T をもつ流体の平衡状態を表している．このような空間で式 (4.25) の $\mathrm{d}\rho$ は単に $\langle \tilde{\mathrm{d}}\rho, \vec{\Delta} \rangle$ となる．ここで $\vec{\Delta}$ は古い状態から新しい状態，すなわち式 (4.25) に表されている状態の変化をつなぐベクトルである．式 (4.25) が任意の $\vec{\Delta}$ に対して成り立つことを要求するので，これは一形式としても成り立たなければならない．Schutz (1980*b*) をみよ．

(b) $\tilde{\Delta}q = \tilde{\mathrm{d}}q$ なら $T\partial S/\partial x^i = \partial q/\partial x^i$，ここで x^i は p あるいは T である．恒等式 $\partial^2 q/\partial T \partial p = \partial^2 q/\partial p \partial T$ は $(\partial T/\partial p)(\partial S/\partial T) = \partial S/\partial p$ を意味するが，これは，一般の場合に成り立つものではない．

11　(a) "回転" の定義．2.9 節の練習問題 20 (b) をみよ．

(b) 任意の直交行列 O に対して M が $O^{\mathrm{T}}MO = M$ なる性質をもつとする．x^3 軸まわりの回転という特別な場合を考えよう．このとき，$O_{11} = \cos\theta$，$O_{12} = \sin\theta$，

$O_{21} = -\sin\theta$, $O_{22} = \cos\theta$, $O_{33} = 1$．他の成分はすべてゼロ．すると任意の θ に対する $O^{\mathrm{T}}MO = M$ から，$M_{13} = M_{23} = M_{31} = M_{32} = 0$，$M_{11} = M_{22}$，$M_{21} = -M_{12}$ が導かれる．次に x 軸まわりの回転から，$M_{12} = M_{21} = 0$，$M_{33} = M_{22}$ が導かれる．したがって M は I に比例する．

13 $U_\alpha = \eta_{\alpha\gamma}U^\gamma$；$\eta_{\alpha\gamma}$ が定数だから $\eta_{\alpha\gamma,\beta} = 0$．したがって $U^\alpha{}_{,\beta}U^\gamma\eta_{\alpha\gamma} = U^\gamma{}_{,\beta}U^\alpha\eta_{\gamma\alpha}$（ラベル換え）$= U^\gamma{}_{,\beta}U^\alpha\eta_{\alpha\gamma}$（$\eta$ の対称性）

14 $\vec{U} \xrightarrow[\text{MCRF}]{} (1,0,0,0)$ だから，U_α を掛け，α に関して和をとることにより，MCR 系でのゼロ成分が取り出される．

16 一つの要素の MCR 系が，その近傍の要素の MCR 系と一致すべき理由は何もない．

20 (b) F^0 は単位体積あたりのエネルギー生成率，F^i は力の第 i 成分．F^α は力の概念の相対論への自己矛盾のない一般化である．

21 (a) $T^{\alpha\beta} = \rho_0 U^\alpha U^\beta$，$U^\alpha \to \gamma(1,\beta,0,0)$，$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$

(b) リング状の任意の点で，粒子は速度 ωa をもつ．位置 (x,y) で，$U^\alpha \to \gamma(1,-\omega y,\omega x,0)$，$\gamma = (1-\omega^2a^2)^{-1/2}$．慣性系ではその個数密度は，$N[2\pi^2(\delta a)^2]^{-1}$ であり，これは n をその静止系での個数密度としたとき，nU^0 に等しい．したがって $n = N[2\pi^2\gamma a(\delta a)^2]^{-1}$ であり，$T^{\alpha\beta} = mnU^\alpha U^\beta$ である．

(c) (b) に，$\omega \to -\omega$ とした (b) を加える．たとえば $T^{0x} = 0$，$T^{xx} = 2mn\omega^2y^2\gamma^2$

22 方向に優位性がないということは，T^{ij} が回転に対して不変であることを意味する．したがって練習問題 11 より，ある p があって $T^{ij} = p\delta^{ij}$ と書ける．MCR 系では $T^{0i} = 0$ だから，式 (4.36) は成立する．明らかに $\rho = \gamma nm$，$\gamma = (1-v^2)^{-1/2}$．たとえば，T^{zz} への各粒子の寄与は，それが表す運動量流束である．(θ,ϕ) 方向に速度 v をもつ一つの粒子に対して，それは $z =$ 一定の面を $v\cos\theta$ の速度で横切るから $m\gamma v\cos\theta$ が運動量の z 成分となる．単位体積あたり n 個の粒子があり，それらがランダムな速度をもっているとすれば $T^{zz} = n(m\gamma v)(v) \times$ (単位球上の $\cos^2\theta$の平均値 $= 1/3$) となる．したがって $T^{zz} = p = \gamma nmv^2/3$．こうして $p/\rho = v^2/3 \to 1/3$ $(v \to 1)$．（この極限で，各光子のエネルギー $m\gamma$ は有限にとどまる．）

24 (c) $R/x = [(1-v)/(1+v)]^{1/2}$

25 (h) $E^{\bar{x}} = E^x$；$E^y\boldsymbol{e}_y + E^z\boldsymbol{e}_z$ を $\boldsymbol{E}_\perp$，すなわち $\boldsymbol{v}$ に垂直な $\boldsymbol{E}$ の部分とする．同様に $\boldsymbol{E}'_\perp = E^{\bar{y}}\boldsymbol{e}_{\bar{y}} + E^{\bar{z}}\boldsymbol{e}_{\bar{z}}$ とすると，$\mathbf{E}'_\perp = \gamma(\boldsymbol{E}_\perp + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$

5 章

3 (b) (i) 原点 $x = y = 0$ 以外ではよいふるまいをする．これはふつうの極座標で

ある.

(ii) $x<0$ に対しては定義されず、$x=0$ で発散し，$x>0$ でよいふるまいをする．これは (x,y) の右半分を (ξ,η) の全平面に写像する．

(iii) 原点と無限遠以外ではよいふるまいをする．これは単位円の内と外の平面の入れ換えである．

4　曲線の傾きを計算せよ．

5　(a) と (b) は同じ経路をもつ．$x^2+y^2=1$

7　$\Lambda^{2'}{}_1=-y/r^2$; $\Lambda^1{}_{2'}=-y$

8　(a) $V^r=r^2(\cos^3\theta+\sin^3\theta)+6r(\sin\theta\cos\theta)$，$W^\theta=(\cos\theta-\sin\theta)/r$

(b) $(\tilde{\mathrm{d}}f)_r=2r(1+\sin 2\theta)$

(c) $(\tilde{W})_\theta=r(\cos\theta-\sin\theta)$

11　(b) 行列を用いてもできるが，変換の方程式を直接展開するほうが誤りが少ない．$\nabla\vec{v}$ の r–r 成分は

$$\begin{aligned}\Lambda^{1'}{}_\alpha\Lambda^\beta{}_{1'}V^\alpha{}_{,\beta}&=\Lambda^{1'}{}_1\Lambda^1{}_{1'}V^1{}_{,1}-\Lambda^{1'}{}_2\Lambda^1{}_{1'}V^2{}_{,1}+\Lambda^{1'}{}_1\Lambda^2{}_{1'}V^1{}_{,2}+\Lambda^{1'}{}_2\Lambda^2{}_{1'}V^2{}_{,2}\\&=2r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)+6\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

(c) (b) と同じ結果を与える．

$V^r{}_{;r}\equiv V^{1'}{}_{;1'}$ は上のとおり

$$\begin{aligned}V^r{}_{;\theta}&=2r^2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)+3r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\V^\theta{}_{;r}&=2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)+3(\cos^2\theta-\sin^2\theta)/r\\V^\theta{}_{;\theta}&=2r\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)-6\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

(d) $2(x+y)$

(e) $2r(\sin\theta+\cos\theta)$，(d) に同じ．

12　(c) これらの関数は練習問題 11(c) の解答に次のように関係している．$p_{r;r}=V^r{}_{;r}$，$p_{r;\theta}=V^r{}_{;\theta}$，$p_{\theta;r}=r^2V^\theta{}_{;r}$，$p_{\theta;\theta}=r^2V^\theta{}_{;\theta}$.

この一形式場に対しては，たまたま $p_{\theta;r}=p_{r;\theta}$ が成り立った．これは一般には成立せず，ここでは $\tilde{p}$ がある関数の勾配なので成り立ったのである．

14　$A^{r\theta}{}_{;\theta}=r(1+\cos\theta-\tan\theta)$; $A^{rr}{}_{;r}=2r$

15　1 階の微分に対しては $V^\theta{}_{;\theta}=1/r$ のみがゼロでない．2 階微分ではゼロでない成分は $V^\theta{}_{;r;\theta}=-1/r^2$，$V^r{}_{;\theta;\theta}=-1$，$V^\theta{}_{;\theta;r}=-1/r^2$

17　$\partial\vec{e}_{\mu'}/\partial x^{\nu'}=[\partial(\Lambda^\alpha{}_{\mu'}\vec{e}_\alpha)/\partial x^\beta]\Lambda^\beta{}_{\nu'}=\Lambda^\alpha{}_{\mu'}\Lambda^\beta{}_{\nu'}\partial\vec{e}_\alpha/\partial x^\beta+\Lambda^\alpha{}_{\mu',\beta}\Lambda^\beta{}_{\nu'}\vec{e}_\alpha\Rightarrow$

$\Gamma^{\lambda'}{}_{\mu'\nu'} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}\Lambda^{\lambda'}{}_{\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} + \Lambda^{\alpha}{}_{\mu',\beta}\Lambda^{\beta}{}_{\nu'}\Lambda^{\lambda'}{}_{\alpha}$

20 $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = 1/2g^{\nu\mu}(g_{\mu\alpha,\beta} + g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\mu} + c_{\alpha\mu\beta} + c_{\beta\mu\alpha} - c_{\mu\alpha\beta})$

21 (a) ベクトル $(\mathrm{d}t/\mathrm{d}\lambda, \mathrm{d}x/\mathrm{d}\lambda)$ と $(\mathrm{d}t/\mathrm{d}a, \mathrm{d}x/\mathrm{d}a)$ を計算し，それらが直交していることを示せ．

(b) 任意の a と λ に対して，x と t は制限 $|x| > |t|$ を満たす．直線 $\{x > 0, t = \pm x\}$ は $\lambda =$ 一定の双曲線で $a \to 0^+$ とした極限であるが，λ のどんな有限の値に対しても，$a \to 0^+$ の極限は原点 $x = t = 0$ となる．たとえば $x = t = 1$ にとどくためには $\lambda = \ln(2/a)$ とおく．すると $a \to 0$ のとき $\lambda \to \infty$ となる．

(c) $g_{\lambda\lambda} = -a^2$，$g_{aa} = 1$，$g_{a\lambda} = 0$，$\Gamma^{\lambda}{}_{a\lambda} = 1/a$，$\Gamma^{a}{}_{\lambda\lambda} = a$，他のすべてのクリストッフェル記号はゼロ．式 (5.3)，(5.30)，(5.44) の間の密接な関係に注意せよ．また $g_{\lambda\lambda}$（メトリックの時間–時間成分）がヌル線 $|x| = |t|$ 上でゼロとなることにも注意せよ．その他の性質はブラックホールを学ぶとき考える．

22 式 (5.68) を用いよ．

6 章

1 (a) 多様体．特異点は系による．

(b) 多様体．$r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ を定義すると，写像 $\{X = (x/r)\tan(\pi r/2), Y = (y/r)\tan(\pi r/2)\}$ は，単位円の内部 $(r < 1)$ が多様体としては全平面（x，y が任意）と区別できないことを示している．この写像は距離をゆがめるが，メトリックは多様体の定義には含まれないから問題ない．

(c) 多様体ではない，離散的な集合である．

(d) これは単位円と座標軸からなっている．(1,0) のような五つの交点を除けば至るところ一次元多様体の構造をもつ．

4 (a) (γ', μ') の対称性は $n(n+1)/2 = 10$ 個の独立なペア (γ', μ') が存在することを意味する．α は四つの値を独立にとれるから，全部で 40 個の係数がある．

(b) $(\lambda', \gamma', \mu')$ の対称的な組の数は $n(n+1)(n+2)/6 = 20$ であり，α に対する四つの値を掛け，80 個が得られる．

(c) おのおのが 10 個の独立な組合せをもつ二つの対称的なペアがあるから，100 個となる．

6 $g^{\alpha\beta}g_{\beta\mu,\alpha} = g^{\beta\alpha}g_{\beta\mu,\alpha}$（メトリックの対称性）$= g^{\alpha\beta}g_{\alpha\mu,\beta}$（ダミー添字の書き換え）$= g^{\alpha\beta}g_{\mu\alpha,\beta}$（メトリックの対称性）．これと括弧の中の第 2 項が打ち消し合う．

9 二次元ユークリッド空間の極座標に対し，$g = r^2\sin^2\theta$．三次元では $g = r^4\sin^2\theta$．

これらの場合には $g>0$ であることに注意せよ．したがって式 (6.39) から導かれる式 (6.40) や (6.42) のような公式では $-g$ を g に置き換える．

10 ベクトルは，それが動くさいに，三角形の一辺となす角を一定に保つ．一つの角を回るとき，新しい辺となす角は，古い辺となす角よりも，その角の内角だけ大きくなる．三つの角でのこのような変化を足し合せると結果が得られる．

15 λ によってパラメーターづけられた空間的曲線 $\{x^\alpha(\lambda)\}$ で，$x^\alpha(a)$ から $x^\alpha(b)$ まで動くことを考える．その長さは $\int_a^b [g_{\alpha\beta}(\mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}\lambda)(\mathrm{d}x^\beta/\mathrm{d}\lambda)]^{1/2} d\lambda$ である．この積分が与えられた曲線に沿って一定であるように λ を選んだものと仮定する．この曲線を $\delta x^\alpha(a)=\delta x^\alpha(b)=0$ であるような $\{x^\alpha(\lambda)+\delta x^\alpha(\lambda)\}$ へ変化させる．そのとき長さの 1 次の変化は，部分積分して $\int_a^b [g_{\alpha\beta,\gamma}U^\alpha U^\beta/2-\mathrm{d}(g_{\gamma\alpha}U^\alpha)/\mathrm{d}\lambda]\delta x^\gamma \mathrm{d}\lambda$ となる．ここで $U^\alpha \equiv \mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}\lambda$．測地線に対し角括弧中の項がゼロとなる．

18 (b) おのおののペア $\alpha\beta$，$\mu\nu$ は反対称なので，ゼロでない成分はおのおの 6 個の独立な組合せである．おのおののペアはそれらの 6 個の中から独立に選べるが，ペアどうしの交換に関して対称でなければならない．

(c) 式 (6.69) から式 (6.70) を $R_{\alpha[\beta\mu\nu]}=0$ と書き換えることができる．反対称性より β と μ と ν のとり方には $n(n-1)(n-2)/6=4$ しか独立な組合せはない．原則的には α は独立であるが，もし α が β，μ，ν のどれか一つに等しいとすると，式 (6.70) は式 (6.69) の一つに帰着してしまう．したがって式 (6.70) は，たとえば α の値のみによって決定されるたかだか 4 個の方程式である．しかしながら式 (6.69) から式 (6.70) を $R_{\beta[\alpha\mu\nu]}=0$ と書き換えられるから，もし以前にたとえば $\alpha=1$，$\beta=2$ と選んでいたとすると，その方程式は $\alpha=2$，$\beta=1$ としたものに同等となる．したがって α のすべての値に対して同じ方程式になってしまう．

25 式 (6.69) と式 (6.70) を用いよ．

29 $R_{\theta\phi\theta\phi}=\sin^2\theta$

32 3.10 節の練習問題 34 と比べよ．

35 ゼロでない代数的に独立なクリストッフェル記号は

$$\Gamma^t{}_{tr}=-\Phi',\ \Gamma^r{}_{tt}=-\Phi'\exp(2\Phi-2\Lambda),\ \Gamma^r{}_{rr}=\Lambda',\ \Gamma^r{}_{\theta\theta}=-r\exp(-2\Lambda)$$

$$\Gamma^r{}_{\phi\phi}=-r\sin^2\phi\exp(-2\Lambda),\ \Gamma^\theta{}_{r\theta}=\Gamma^\phi{}_{r\phi}=r^{-1},\ \Gamma^\theta{}_{\phi\phi}=-\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^\phi{}_{\theta\phi}=\cot\theta$$

ここでプライムは r 微分である．（この結果を練習問題 29 で計算したクリストッフェル記号と比べてみよ．）練習問題 18 の解答に説明したように $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ を計算するさいには，ペア（$\alpha\beta$）と（$\mu\nu$）に着目しておのおのから独立な六つの組合せ（tr，$t\theta$，$t\phi$，

$r\theta$, $r\phi$, $\theta\phi$) を選ぶ．$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$ だから $R_{r\phi\theta\phi}$ を計算したら，$R_{\theta\phi r\phi}$ は計算する必要はない．こうして 21 個の独立な成分が得られる．再び練習問題 18 から四つの異なった添字をもつ成分，たとえば $R_{tr\theta\phi}$ の一つは他から得られる．したがって以下の 20 個の代数的に独立な成分がある．

$$R_{trtr} = [\Phi'' - (\Phi')^2 - \Phi'\Lambda']\exp(2\Phi), \quad R_{trt\theta} = R_{trt\phi} = R_{trr\theta} = R_{trr\phi} = 0$$

$$R_{t\theta t\theta} = -r\Phi'\exp(2\Phi - 2\Lambda), \quad R_{t\theta t\phi} = R_{t\theta r\theta} = R_{t\theta r\phi} = R_{t\theta\theta\phi} = 0$$

$$R_{t\phi t\phi} = -r\Phi'\sin^2\theta\exp(2\Phi - 2\Lambda), \quad R_{t\phi r\theta} = R_{t\phi r\phi} = R_{t\phi\theta\phi} = 0$$

$$R_{r\theta r\theta} = r\Lambda', \quad R_{r\theta r\phi} = R_{r\theta\theta\phi} = 0, \quad R_{r\phi r\phi} = r\sin^2\theta\Lambda'$$

$$R_{r\phi\theta\phi} = 0, \quad R_{\theta\phi\theta\phi} = r^{-2}\sin^2\theta[1 - \exp(-2\Lambda)]$$

メトリックの球対称性と時間に依存しないことからいくつかの成分がゼロになることがわかる．またこれと練習問題 29 の解答とを比べ，その違いを説明してみよ．

36 $\phi = 0$ とした系はすでに慣性系だから，$L^{\alpha}{}_{\beta}$ を ϕ のオーダーとして，$x^{\alpha'} = (\delta^{\alpha}_{\beta} + L^{\alpha}{}_{\beta})x^{\beta}$ の形の座標変換を探す．5.9 節の練習問題 17 の解答から $\Gamma^{\lambda'}{}_{\mu'\nu'}$ が与えられるが，これは P でゼロとなる．$\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} + L^{\alpha}{}_{\beta} + L^{\alpha}{}_{\mu,\beta}x^{\mu}$ から，P で $L^{\alpha}{}_{(\beta,\nu)} = 1/2\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu}$．反対称部分 $L^{\alpha}{}_{[\beta,\nu]}$ は決らず，これがオーダー ϕ のローレンツ変換を表す．一つの慣性系だけを探しているので，$L^{\alpha}{}_{[\beta,\nu]} = 0$ とおいてよい．（7.6 節の練習問題 3 でのように）P での $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu}$ を計算すれば，その新しい座標が与えられる．特に，方程式 $x^{i'} = 0$ は新しい系の原点の運動を与える．その加速度は，$\mathrm{d}^2x^i/\mathrm{d}t^2 = -\Gamma^{i}{}_{tt} = -\phi_{,i}$ となる．次章で ϕ をニュートンの重力ポテンシャルに同定することにより，この加速度が等価原理を表すという解釈を与える．

37 (b) 座標の範囲を次のように制限しなければならない：$0 < \chi < \pi$，$0 < \theta < \pi$，$0 < \phi < 2\pi$，そのとき体積は $2\pi^2 r^2$ となる．

7 章

1 静止している流体を考えると，局所慣性系で $U^i = 0$, $U^0 = 1$．すると $\partial n/\partial t = R$ から式 (7.3) は曲率による粒子の生成（あるいは消滅）を意味する．

2 $g^{00} = -(1 - 2\phi)$，$g^{ij} = \delta^{ij}(1 + 2\phi)$

3 $\Gamma^{0}{}_{00} = \dot\phi$，$\Gamma^{0}{}_{0i} = \phi_{,i}$，$\Gamma^{0}{}_{ij} = -\dot\phi\delta_{ij}$，$\Gamma^{i}{}_{00} = \phi_{,i}$，$\Gamma^{i}{}_{0j} = -\dot\phi\delta_{ij}$，$\Gamma^{i}{}_{jk} = \delta_{jk}\phi_{,i} - \delta_{ij}\phi_{,k} - \delta_{ik}\phi_{,j}$

9 (a) $R_{0i0j} = \phi_{,i,j} + \delta_{ij}\phi_{,0,0}$，$R_{0ijk} = \phi_{,0,j}\delta_{ik} - \phi_{,0,k}\delta_{ij}$，$R_{ijkl} = \delta_{ik}\phi_{,j,l} + \delta_{jl}\phi_{,i,k} - \delta_{il}\phi_{,j,k} - \delta_{jk}\phi_{,i,l}$

(b) ニュートン物理での“加速度”は $-\phi_{,i}$ である．したがって ξ^j だけ離れている近接した粒子間の加速度の差は，$-\xi^j\phi_{,ij}$

10 (b) ローレンツ基底では次のベクトル場がキリング場である．

$\vec{e_t}$，$\vec{e_x}$，$\vec{e_y}$，$\vec{e_z}$，$x\vec{e_y}-y\vec{e_x}$，$y\vec{e_z}-z\vec{e_y}$，$z\vec{e_x}-x\vec{e_z}$，$t\vec{e_x}+x\vec{e_t}$，$t\vec{e_y}+y\vec{e_t}$，$t\vec{e_z}+z\vec{e_t}$

式 (7.45) の解の任意の定数係数の線形結合はまた式 (7.45) の解だから，他のローレンツ系での同様のキリング場は上から得られる．

8　章

2 (c) (i) $7.425\times10^{-11}\,\mathrm{m}^{-2}$，(ii) $8.261\times10^{-12}\,\mathrm{m}^{-2}$，(iii) $1.090\times10^{-16}\,\mathrm{m}^{-1}$，(iv) 2.756×10^{-12}

(d) $m_{\mathrm{PL}}=2.176\times10^{-8}\,\mathrm{kg}$；$t_{\mathrm{PL}}=5.390\times10^{-44}\,\mathrm{s}$．典型的な素粒子の寿命は $10^{-24}\,\mathrm{s}$ 以上である．既知の最も重い粒子の質量は，$10^{-29}\,\mathrm{kg}$ 以下である．

3 (a) (i) -2.122×10^{-6}, (ii) -9.873×10^{-9}, (iii) -6.961×10^{-10}, (iv) 9.936×10^{-5}

17 (a) $M=Rv^2=(c^3/2\pi P^2)\sim1.3\,\mathrm{km}\sim1M_\odot$，(b) $100\,\mathrm{km}\sim68M_\odot$

18 (a) $|\Lambda|\lesssim4\times10^{-35}\mathrm{m}^{-2}$

19 (a) $T^{00}=\rho$, $T^{01}=-\rho\Omega x^2$, $T^{02}=\rho\Omega x^1$, $T^{03}=0$. T^{ij} 成分は与えられている情報からは完全には決定されないが，それらは ρv^iv^j，すなわち $\rho\Omega^2R^2$ のオーダーである．

(b) $\nabla^2\bar{h}^{00}=-16\pi\rho$ だから，$\bar{h}^{00}$ はニュートン・ポテンシャルの 4 倍にマイナスをつけたものである．$\bar{h}^{00}=4M/r$. $\bar{h}^{0i}$ に対しては $\bar{h}^{0i}=-4\rho\Omega\int y^2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{-1}\mathrm{d}^3y$. 二項展開 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{-1}=r^{-1}[1+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}/r^2+O(R/r)^2]$ を求める．対称性より $\int y^i\mathrm{d}^3y=0$, $\int y^iy^j\mathrm{d}^3y=0\ (i\neq j)$, $\int y^1y^1\mathrm{d}^3y=\int y^2y^2\mathrm{d}^3y=\int y^3y^3\mathrm{d}^3y=(4\pi/15)R^2$．これから $\bar{h}^{01}=-(16\pi/15)\rho R^5\Omega x^2/r^3$．角運動量 J を用いると，$\bar{h}^{01}=-2Jx^2/r^3,\bar{h}^{02}=2Jx^1/r^3,\bar{h}^{03}=0$．これらはすべて r^{-2} のように小さくなり，r^{-3} のオーダーまで正しい．$\nabla^2f=g$ という方程式のより詳細な研究によれば，上式は実際に厳密に成り立つ．すなわち，すべての高次の項がゼロになることが示される．T^{ij} が小さいので，$\bar{h}^{ij}$ 成分は $\bar{h}^{00}$，$\bar{h}^{0i}$ に比べて小さい．したがって式 (8.31) が $h^{\mu\nu}$ を与え，メトリックは次のようになる．

$$g_{00}=-1+\frac{2M}{r}+O(\Omega^2R^2),\quad g_{01}=\frac{2Jx^2}{r^3}+O(\Omega^3R^3)$$
$$g_{02}=-\frac{2Jx^1}{r^3}+O(\Omega^3R^3),\quad g_{03}=0$$

$$g_{ij} = \delta_{ij}(1 + \frac{2M}{r}) + O(\Omega^2 R^2)$$

これを式 (7.8) と比べてみよ．標準的な球座標では，g_{00} は同じ，$g_{0r} = g_{0\theta} = 0, g_{0\phi} = -2J/r$．線要素の空間部分は

$$\mathrm{d}l^2 = [1 + 2M/r - O(\Omega^2 R^2)](\mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2).$$

(c) そのような粒子は，$p_0 \equiv -E$，$p_\phi \equiv L$ (E，L は定数)，$p^r = p^\theta = 0$ とした測地線の方程式に従う．このオーダーまでで，規格化条件 $\vec{p} \cdot \vec{p} = -m^2$ から $E = m(1 - M/r + L^2/2m^2 r)$ が導かれ，これはニュートン理論と（静止質量を除いて）一致する．最低次までの測地線の方程式の r 成分から $L = m(Mr)^{1/2}$ が導かれるが，これもニュートン理論と一致する．一周期 $\Delta\phi = 2\pi$ は時間 $\Delta t = (\mathrm{d}t/\mathrm{d}\phi)\Delta\phi$ を要する．$\mathrm{d}t/\mathrm{d}\phi = (\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau)/(\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\tau) = U^0/U^\phi = p^0/p^\phi$ であり，これは E，L とメトリックで表される．直接的な計算から

$$(\Delta t)_{\mathrm{prograde}} - (\Delta t)_{\mathrm{retrograde}} = -8\pi J/M$$

という r に依存しない答が導かれる．原理的にはこれから物体の角運動量を，そのまわりを回る粒子の軌道をしらべることによって測定することができる．

(d) 0.16 ms

9 章

7　式 (9.22) の解は初期位置と U^a によって一意的に決定される．関数 $U^a = \delta^a_0$ はすべての時間で [式 (9.23) のおかげで] 式 (9.22) を満足し，したがって，それは $U^a = \delta^a_0$ なる初期データに対する一意的な解である．

8　感じない．

9　光のビームに対して，$\mathrm{d}s^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{d}t/\mathrm{d}x = (g_{xx}/|g_{tt}|)^{1/2} \approx 1 + 1/2h^{\mathrm{TT}}_{xx}(t)$．したがって $\Delta t \approx (2 + \langle h^{\mathrm{TT}}_{xx}\rangle)\varepsilon$．ここで $\langle h^{\mathrm{TT}}_{xx}\rangle$ は光子の飛行時間にわたる h^{TT}_{xx} の何らかの平均値．$\langle h^{\mathrm{TT}}_{xx}\rangle$ は時間とともに変り，ε は変らないから，自由粒子はその直線の粒子に相対的な加速度をみることができる．

10　(a) たとえば，$R_{tyxz} = -(1/2)\omega^2 h_{yz}$；(b) $\xi_t = -(1/2)B(x-t)^2$，$\xi_i = 0$．

21　波の TT 座標系で，波の進行方向を z 軸に，楕円の主軸を x，y 軸に選び，さらに 2 質点をつなぐ方向を単位ベクトル $\vec{s}$ の方向をとる．ここで，単位ベクトルはふつうの球座標で，$\vec{s} \to (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ である．次に，式 (9.42) において，h^{TT}_{xx} を $h^{\mathrm{TT}}_{ss} \equiv s^a s^\beta h^{\mathrm{TT}}_{a\beta} = \sin^2\theta(\cos 2\phi + \mathrm{i}a\sin 2\phi)h^{\mathrm{TT}}_{xx}$ で置き換える．$\theta = 0$，つま

り質点の並びが波の伝播方向なら，質点を動かそうとする力は働かない．(問題 12 と比較せよ．)

27 $I^{ij}=\sum_A m_{(A)}x^i_{(A)}x^j_{(A)}$

31 (a) $(4\pi/3)\delta^{ij}\int \rho r^4 \mathrm{d}r, 0$；(b) (a) の結果 $+Ma^ia^j$，$M(a^ia^j-\delta^{ij}a^2/3)$；(c) $I^{xx}=a^2M/5$，$I^{yy}=b^2M/5$，$I^{zz}=c^2M/5$，$\bar{I}^{xx}=(2a^2-b^2-c^2)M/15$，$\bar{I}^{yy}=(2b^2-a^2-c^2)M/15$，$\bar{I}^{zz}=(2c^2-a^2-b^2)M/15$，その他はゼロ．

(d)
$$
\begin{aligned}
I^{xx} &= [a^2\cos^2\omega t+b^2\sin^2\omega t)M/5\\
I_{yy} &= (b^2\cos^2\omega t+a^2\sin^2\omega t)M/5, \quad I^{zz}=c^2M/5\\
I^{xy} &= \cos\omega t\sin\omega t(a^2-b^2)M/5\\
\bar{I}^{xx} &= [a^2(3\cos^2\omega t-1)+b^2(3\sin^2\omega t-1)-c^2]M/15\\
\bar{I}^{yy} &= [b^2(3\cos^2\omega t-1)+a^2(3\sin^2\omega t-1)-c^2]M/15\\
\bar{I}^{zz} &= (2c^2-a^2-b^2)M/15, \quad \bar{I}^{xy}=I^{xy}
\end{aligned}
$$

その他はゼロ．

(e) $I^{xx}=2ma^2=I^{yy}$，その他はゼロ；$\bar{I}^{xx}=2ma^2/3=\bar{I}^{yy}$，$\bar{I}^{zz}=-4ma^2/3$，その他はゼロ．

(f) (e) と同じ

(g) $I^{xx}=2m(A^2\cos^2\omega t+Al_0\cos\omega t+l_0^2/4)$，その他はゼロ；$\bar{I}^{xx}=2I^{xx}/3$，$\bar{I}^{yy}=-I^{xx}/3=\bar{I}^{zz}$，その他はゼロ．

(h) $I^{xx}=(m+M)(A^2\cos^2\omega t+Al_0\cos\omega t+l_0^2/4)$，その他はゼロ；$\bar{I}^{xx}=2I^{xx}/3$，$\bar{I}^{yy}=-\bar{I}^{xx}/3=\bar{I}^{zz}$，ここで $\mu=mM/(m+M)$ は換算質量で，$\omega^2=k/\mu$ である．

35 (a)，(b)，(c) および (e) では輻射はない．(f) では**四重極**輻射は出てこない．(d) 最初に問題 31 の $\bar{I}_{ij}$ の時間依存性を複素数で，たとえば $\bar{I}^{xx}=(1/10)M(a^2-b^2)\exp(-2\mathrm{i}\omega t)$ のように書き直しておく．次に式 (9.75)〜(9.77) を使って，$\Omega=2\omega$ とし，適当な添字をとって計算する．x 軸方向に

$$\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{zz}=-\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{yy}=-(2/5)M\omega^2(a^2-b^2)\exp[-2\mathrm{i}\omega(t-r)]/r, \quad \bar{h}^{\mathrm{TT}}_{zy}=0$$

y 軸方向に

$$\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{zz}=-\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xx}=(2/5)M\omega^2(a^2-b^2)\exp[-2\mathrm{i}\omega(t-r)]/r, \quad \bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xz}=0$$

z 軸方向に

$$\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xx} = -\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{yy} = -(4/5)M\omega^2(a^2-b^2)\exp[-2\mathrm{i}\omega(t-r)]/r, \quad \bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xy} = \mathrm{i}\,\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xx}$$

となる．このことから，輻射は赤道面内で直線偏光しており，z 軸方向で円偏光していることがわかる．物体が軸対称，つまり $a=b$ ならば，輻射はないことに注意．

(h) y 軸上で

$$\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{zz} = -(m+M)\omega^2\{2A^2\exp[-2\mathrm{i}\omega(t-r)] + Al_0\exp[-\mathrm{i}\omega(t-r)]\}/r = -\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{yy}$$
$$\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xy} = 0$$

x 軸上では輻射はない．

36 一般性を失うことなく，波が x–y 平面内を伝播しているとする．すると，

$$P_{xx} = \sin^2\theta, \quad P_{yy} = \cos^2\theta, \quad P_{zz} = 1, \quad P_{xy} = -\sin\theta\cos\theta$$

その他はゼロ．行列の掛算により，

$$\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xx} = f\sin^2\theta, \quad \bar{h}^{\mathrm{TT}}_{yy} = f\cos^2\theta, \quad \bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xy} = -f\sin\theta\cos\theta, \quad \bar{h}^{\mathrm{TT}}_{zz} = -f$$

その他はゼロ．ここで，

$$f = m\omega^2\sin^2\theta\{2A^2\exp[-2\mathrm{i}\omega(t-r)] + Al_0\exp[-\mathrm{i}\omega(t-r)]\}/r$$

である．l^i を $(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ とすると，$\vec{l}$ と $\vec{e}_z$ は波の伝播方向に垂直で，互いに直交したベクトルである．$\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{ll} \equiv l^i l^j \bar{h}^{\mathrm{TT}}_{ij} = f$ であることがわかる．$\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{zz} = -f$ であることを考えると，波は x–y 平面内の楕円の主軸に関して 100%直線偏光していて，$\vec{e}_z$ に平行であることがわかる．45° 回転された成分は存在しない．

38 波が x–y 平面内で，z 軸と角度 θ をなして伝播しているとする．$\vec{e}_y$ と $\vec{l} \to (\cos\theta, 0, -\sin\theta)$ は偏光面内で直交しているとする．すると，$\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{yy} = (1-\sin^2\theta/2)f$，$\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{ly} \equiv l^i\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{iy} = -\mathrm{i}\cos\theta f$，$\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{ll} \equiv l^i l^j \bar{h}^{\mathrm{TT}}_{ij} = -\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{yy}$ となる．ここで $f = 2ml_0^2\omega^2\exp[-2\mathrm{i}\omega(t-r)]/r$ である．問題 15 (b) から，波は主軸が $\vec{l}$ と $\vec{e}_y$ の方向であるような楕円偏光をしていることがわかる．円偏光の割合は $|\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{ly}/\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{yy}|^2$ で，赤道面でゼロ，極軸方向で 100%となる．

39 (a) $P^2 = -\pi^2(M+m)^2\mu^3/2E^3$，$e^2 = 1+2EL^2/(M+m)^2\mu^3$，$a = -mM/2E$ ($E<0$ であることに注意)，ここで，$\mu = mM/(m+M)$ である．

40 式 (9.94) と同様に，R^{-1} は r^{-1} として外に出し，$(t-R)$ は $(t-r)$ について展開する．式 (9.95) とそれから導かれる結果は成り立っている．最初の項は，式 (9.96) で，それより高次の項は $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)^n\int\rho y_j y_k\cdots y_l y_m \mathrm{d}^3y$ に比例する．ここで，$\ldots$ は y_j

の n 個の積である．ρ が球対称分布なら，積分すると，$\delta_{jk}\cdots\delta_{lm}$ という形およびそれらの添字を入れ換えたものがでてくる（問題 45 参照）．TT 射影ではトレースは消えるから，これらの項は完全にゼロとなる．

10　章

5　このような変換によって，すべての量は不変に保たれなくてはならない．しかし，$t \to -t$ のとき $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t \to -\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ となる．こうした量が消えるときのみ，不変に保たれる．

8　(a) 問題 5 と同じような考え方を使え．

10　(b) $\exp\Phi = 0.999997$，0.760；$z = 3\times10^{-6}$，0.315

15　$\rho = \rho_c + \rho_1 r^2$，$p = p_c(1+\rho_1\Gamma_c/\rho_c r^2)$，$m = 4\pi r^3\rho_c/3 + 4\pi r^5\rho_1/5$ となる．ここで，$\rho_1 = -2\pi\rho_c(\rho_c+p_c)(\rho_c+3p_c)/(3\Gamma_c p_c)$ である．最初の補正項の 2 次の項を無視することによって生じる誤差を考えよ．つまり補正項が 3%より小さくなるような r を選べばよくて，$r^2 \le |\rho_c/30\rho_1\Gamma_c|$ となる．

19　(a) $1.12\times10^{42}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}$；(b) $1.4\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$，大きくなる．50%；(c) 2.6×10^{-4}；(d) 5×10^9 ガウス

11　章

7　(a) 式 (11.21) を $\mathrm{d}s^2 = g_{00}\mathrm{d}t^2 + g_{\phi\phi}\mathrm{d}\phi^2$ に使って，$\tau = 20\pi\sqrt{7}M$ が得られる．

(b) 座標時間間隔と同じで式 (11.22)；$20\pi\sqrt{10}M$

(c) (b) において，$\mathrm{d}s^2 = g_{00}\mathrm{d}t^2$ を時間について積分せよ．$40\pi\sqrt{2}M$

(d) 6.4 ms；最も内側の安定軌道．

(e) $40/\sqrt{2}$ 年，M によらない．

9　(a) 転回点は $r = 12.5\,M$ と $5.47\,M$ にある．（$\tilde{L}$ が大きいと粒子は $6M$ より**内側**を通って戻って来ることができることに注意せよ．）この 2 点間を動く間に，軌道は $\Delta\phi = 7.4$ ラジアン変化する．軌道を 1 周すると，$\Delta\phi = 14.8$ ラジアンで近日点の移動は 8.5 ラジアンである．近似式 (11.34) からは，2.3 ラジアンがでてくる．このことより，円軌道からのずれの大きな場合には，ずっと大きな近日点移動を与えることがわかる．

10　(a) $(\tilde{E}/\tilde{L})^2 = [1 + 36M^2/\tilde{L}^2 + (1-12M^2/\tilde{L}^2)^{3/2}]/(54M^2)$

14　1 周期あたりと 1 年あたりの値を，それぞれ秒角で表すと，金星で (0.052, 0.085)，地球で (0.038, 0.038)，火星で (0.025, 0.013)

22 約 $10^5\,M_\odot$

25 潮汐力を M/R^2 のオーダーまで求めよ．$R_{\mathrm{T}} \sim (M_{\mathrm{H}}/\rho)^{1/3}$ となる．約 $10^6\,M_\odot$

34 (a) $(2-\sqrt{2})M$；(b) $E \leq m_1 + m_2 - \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \approx m_1(1-(1/2)m_1/m_2)$

12 章

22 (a) 黒体輻射に対して，$\rho_r = a_{\mathrm{s}} T^4/c^2$ である．ここで，$a_{\mathrm{s}} = 7.56 \times 10^{-16}\,\mathrm{J{\cdot}m^{-3}{\cdot}deg^{-4}}$ はステファン定数である．これから，$\varepsilon = 4.5 \times 10^{-4}\,m$ となり，またバリオンに対する光子の数は約 $2\,m \times 10^9$ となる．

文 献

Abraham, R. & Marsden, J. E. (1978) *Foundations of Mechanics*, 2nd edn (Benjamin/Cummings, Reading, Mass.).

Adler, R., Bazin, M., & Schiffer, M. (1975) *Introduction to General Relativity*, 2nd edn (McGraw-Hill, New York).

Alcubierre, M. (2008) *Introduction to 3+1 Numerical Relativity* (Oxford University Press, Oxford).

Allen, S. W., Schmidt, R. W., & Fabian, A. C. (2002) *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **334**, L11.

Andersson, N., Kokkotas, K.D., & Schutz, B.F. (1999) *Astrophys. J.*, **510**, 846–853.

Andréasson, H. (2005) 'The Einstein–Vlasov system/kinetic theory', *Living Rev. Relativity*, **8**, 2. URL: `http://www.livingreviews.org/lrr-2005-2`

Ansorg, M. (2005) *Phys. Rev.*, **D72**, 024019.

Armstrong, J. W. (2006) 'Low-frequency gravitational wave searches using spacecraft doppler Tracking', *Living Rev. Relativity*, **9**, 1. URL: `http://www.livingreviews.org/lrr-2006-1`

Arzeliès, H. (1966) *Relativistic Kinematics* (Pergamon Press, London). Translation of a 1955 French edn.

Ashby, N. (2003) 'Relativity in the global positioning system', *Living Rev. Relativity*, **6**, 1. URL: `http://www.livingreviews.org/lrr-2003-1`

Ashtekar, A. & Bojowald, M. (2006) *Class. Q. Grav.*, **23**, 391.

Balian, R., Audouze, J., & Schramm, D. N. (1980) *Physical Cosmology.* Proceedings of 1979 Les Houches summer school (North-Holland, Amsterdam).

Barrow, J. & Tipler, F. (1986) *The Anthropic Cosmological Principle* (Oxford University Press, Oxford).

Bekenstein, J. D. (1973) *Phys. Rev. D*, **7**, 2333–2346.

Bekenstein, J. D. (1974) *Phys. Rev. D*, **9**, 3292–3300.

Berger, B. K. (2002) 'Numerical approaches to spacetime singularities', *Living Rev. Relativity*, **5**, 1. URL: `http://www.livingreviews.org/lrr-2002-1`

Beyer, H. R. (2001) *Comm. Math. Phys.*, **221**, 659–676.

Birrell, N. D. & Davies, P. C. W. (1984) *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge).

Bishop, R. L. & Goldberg, S. I. (1981) *Tensor Analysis on Manifolds* (Dover, New York).
Blair, D. (1991) *The Detection of Gravitational Waves* (Cambridge University Press, Cambridge).
Blanchet, L. (2006) 'Gravitational radiation from post-Newtonian sources and inspiralling compact binaries', *Living Rev. Relativity*, **9**, 4. URL: `http://www.livingreviews.org/lrr-2006-4`
Blandford, R. D. & Znajek, R. L. (1977) *Mon. Not. Roy. astr. Soc.*, **179** 433–456.
Bohm, D. (2008) *The Special Theory of Relativity*, new edition with preface by J. Barrow (Routledge, New York).
Bojowald, M. (2005) 'Loop quantum cosmology', *Living Rev. Relativity*, **8**, 11. URL: `http://www.livingreviews.org/lrr-2005-11`
Bona, C. & Palenzuela-Luque, C. (2005) *Elements of Numerical Relativity* (Springer, Berlin).
Boriakoff, V., Ferguson, D. C., Haugan, M. P., Terzian, Y., & Teukolsky, S. A. (1982) *Astrophys. J.*, **261**, L101.
Bourne, D. E. & Kendall, P. C. (1992) *Vector Analysis and Cartesian Tensors* 3rd edn (CRC Press, New York).
Brenneman, L. & Reynolds, C. (2006) *Astrophys. J.*, **652** 1028.
Buchdahl, H. A. (1959) *Phys. Rev.*, **116**, 1027.
Buchdahl, H. A. (1981) *Seventeen Simple Lectures on General Relativity Theory* (Wiley, New York).
Butterworth, E. M. & Ipser, J. R. (1976) *Astrophys. J.*, **204**, 200.
Campanelli, M., Lousto, C. O., Zlochower, Y., & Merritt, D. (2007) *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 231102.
Carroll, S. (2003) *Spacetime and Geometry* (Benjamin Cummings, Reading, Mass.).
Cartan, E. (1923) *Ann. Ecole Norm. Sup.*, **40**, 325.
Carter, B. (1969) *J. Math. Phys.*, **10**, 70.
Carter, B. (1973) In DeWitt, B. & De Witt, C. (eds.). *Black Holes* (Gordon and Breach, New York).
Carter, B. (1979) 'The general theory of the mechanical, electromagnetic, and thermodynamic properties of black holes'. In Hawking & Israel (1979), p. 294.
Caves, C. M., Thorne, K. S., Drever, R. W. P., Sandberg, V. D., & Zimmerman, M. (1980) *Rev. Mod. Phys.*, **52**, 341.
Chandrasekhar, S. (1957) *Stellar Structure* (Dover, New York).
Chandrasekhar, S. (1980) In Wayman, P., *Highlights of Astronomy* (Reidel, Dordrecht). Proceedings of the 1979 IAU meeting in Montreal, p. 45.
Chandrasekhar, S. (1983) *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford University Press, Oxford).
Chandrasekhar, S. (1987) *Truth and Beauty* (University of Chicago Press, Chicago).
Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C., & Dillard-Bleick, M. (1977) *Analysis, Manifolds, and Physics* (North-Holland, Amsterdam).
Choquet-Bruhat, Y. & York, J. W. (1980) 'The Cauchy problem'. In Held (1980a), p. 99.
Ciufolini, I., Pavlis, E. C., & Peron, R. (2006) *New Astronomy*, **11**, 527–550.
Comins, N. & Schutz, B. F. (1978) *Proc. Roy. Soc. A*, **364**, 211.

Cook, G. (2000) 'Initial Data for Numerical Relativity', *Living Rev. Relativity*, **3**, 5. URL: `http://www.livingreviews.org/lrr-2000-5`

Cordes, J. M., Kramer, M., Lazio, T. J. W., et al. (2004) *New Astr. Rev.*, **48**, 1413–1438.

Damour, T. (1987) 'The problem of motion in Newtonian and Einsteinian gravity', in S. Hawking and W. Israel (eds.), *300 Years of Gravitation* (Cambridge University Press, Cambridge), 128–198.

Damour, T. & Dervelle, N. (1986) *Ann. Inst. Henri Poincare* **44**, 263–292.

DeWitt, B. S. (1979) 'Quantum gravity: the new synthesis'. In Hawking & Israel (1979), p. 680.

Dicke, R. H. (1964) In Dewitt, B. & Dewitt, C. *Relativity, Groups and Topology* (Gordon and Breach, New York). Lectures at the 1963 Les Houches summer school.

Dixon, W. G. (1978) *Special Relativity: The Foundation of Macroscopic Physics* (Cambridge University Press, Cambridge).

Ehlers, J., and Kundt, W. (1962), in Witten, L., ed., *Gravitation: An Introduction to Current Research* (Wiley, New York), pp. 49–101.

Fermi, E. (1956) *Thermodynamics* (Dover, New York).

Filippenko, A. (2008) *Dark Energy and Supernovae* (Princeton University Press, Princeton).

French, A. P. (1968) *Special Relativity* (W. W. Norton, New York).

Friedman, J. L. (1978) *Commun. Math. Phys.*, **63**, 243.

Friedman, J. L. & Schutz, B. F. (1978) *Astrophys. J.*, **222**, 281.

Futamase, T. (1983) *Phys. Rev. D*, **28**, 2373.

Futamase, T. & Itoh, Y. (2007), *Living Rev. Relativity*, **10**, 2. URL: `http://www.livingreviews.org/lrr-2007-2`

Futamase, T. & Schutz, B. F. (1983) *Phys. Rev. D*, **28**, 2363.

Genzel, R. & Karas, V. (2007) in V. Karas and G. Matt (eds.) *Black Holes* (Cambridge University Press, Cambridge), pp. 173–180.

Geroch, R. (1978) *General Relativity from A to B* (University of Chicago Press).

Geroch, R. & Horowitz, G. T. (1979) 'Global structure of spacetimes'. In Hawking & Israel (1979), p. 212.

Glendenning, N. K. (2007) *Special and General Relativity: With Applications to White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes* (Springer, New York).

Gron, O. & Hervik, S. (2007) *Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology* (Springer, New York).

Guth, A. (1981) *Phys. Rev. D*, **23**, 347.

Hagedorn, R. (1963) *Relativistic Kinematics* (Benjamin, New York).

Hansen, C. J., Kawaler, S. D., & Trimble, V. (2004) *Stellar Interiors – Physical Principles, Structure, and Evolution* (Springer, New York).

Harrison, B. K., Thorne, K. S., Wakano, M., & Wheeler, J. A. (1965) *Gravitation Theory and Gravitational Collapse* (University of Chicago Press, Chicago).

Hartle, J. B. (2003) *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity* (Benjamin Cummings, Reading, Mass.).

Hawking, S. W. (1972) *Commun. Math. Phys.*, **25**, 152.

Hawking, S. W. (1975) *Commun. Math. Phys.*, **43**, 199.

Hawking, S. W. & Ellis, G. F. R. (1973) *The Large-Scale Structure of Space–Time* (Cambridge University Press, Cambridge).

Hawking, S. W. & Israel, W. (1979) *General Relativity: An Einstein Centenary*

Survey (Cambridge University Press, Cambridge).
Heidmann, J. (1980) *Relativistic Cosmology* (Springer, Berlin).
Held, A. (1980a) *General Relativity and Gravitation* (Plenum, London), vol. 1.
Held, A. (1980b) *General Relativity and Gravitation* (Plenum, London), vol. 2.
Hermann, R. (1968) *Differential Geometry and the Calculus of Variations* (Academic Press, New York).
Hicks, N. J. (1965) *Notes on Differential Geometry* (D. Van Nostrand, New York).
Heusler, M. (1998) 'Stationary black holes: uniqueness and beyond', *Living Rev. Relativity*, **1**, 6. URL: `http://www.livingreviews.org/lrr-1998-6`
Hobson, M. P., Efstathiou, G. P., & Lasenby, A. N. (2006) *General Relativity: An Introduction for Physicists* (Cambridge University Press, Cambridge).
Hoffmann, B. (1983) *Relativity and Its Roots* (Dover, New York).
Höflich, P., Kumar, P., & Wheeler, J. C. (2004) *Cosmic Explosions in Three Dimensions: Asymmetries in Supernovae and Gamma-Ray Bursts* (Cambridge University Press, Cambridge).
Hough, J. L. and Rowan, S. (2000) 'Gravitational wave detection by interferometry (ground and space)', *Living Rev. Relativity*, **3**, 3. URL: `http://www.livingreviews.org/lrr-2000-3`
Hulse, R. A. and Taylor, J. H. (1975) 'Discovery of a pulsar in a binary system', *Astrophys. J.*, **195**, L51–L53.
Isham, C. J. (1999) *Modern Differential Geometry for Physicists* (World Scientific, Singapore).
Israel, W. & Stewart, J. (1980) 'Progress in relativistic thermodynamics and electrodynamics of continuous media'. In Held (1980), p. 491.
Jackson, J. D. (1975) *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York).
Kilmister, C. W. (1970) *Special Theory of Relativity* (Pergamon, Oxford).
Knop, R.A. *et al.* (2003) *Astrophys. J.*, **598**, 102.
Kobayashi, S. & Nomizu, K. (1963) *Foundations of Differential Geometry* (Interscience, New York), vol. I.
Kobayashi, S. & Nomizu, K. (1969) *Foundations of Differential Geometry* (Interscience, New York), vol II.
Kokkotas, K. D. & Schmidt, B. (1999) 'Quasi-normal modes of stars and black holes', *Living Rev. Relativity*, **2**, 2. URL: `http://www.livingreviews.org/lrr-1999-2`
Komossa, S., Zhou, H., & Lu, H. (2008) 'A recoiling supermassive black hole in the quasar SDSS J092712.65+294344.0?', *Astrophys. J. Lett.*, **678**, L81–L84.
Kramer, M. *et al.* (2006) *Science*, **314**, 97–102.
Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. (1959) *Fluid Mechanics* (Pergamon, Oxford).
Landau, L. D. & Lifshitz, E.M. (1962) *The Classical Theory of Fields* (Pergamon, Oxford).
Lattimer, J. M. & Prakash, M. (2000) 'Nuclear matter and its role in supernovae, neutron stars and compact object binary mergers', *Phys. Rep.*, **333** 121–146.
Liang, E. P. T. & Sachs, R. K. (1980) 'Cosmology'. In Held (1980b), p. 329.
Liddle, A. (2003) *An Introduction to Modern Cosmology*, 2nd. edn (Wiley, New York).
Lightman, A. P., Press, W. H., Price, R. H., & Teukolsky, S. A. (1975) *Problem Book in Relativity and Gravitation* (Princeton University Press, Princeton).
Linde, A. (1982) *Phys. Lett.*, **108B**, 389.

Lorimer, D. R. (2008) 'Binary and millisecond pulsars', *Living Rev. Relativity*, **11**, 8. URL: `http://www.livingreviews.org/lrr-2008-8`

Lorimer, D. R. & Kramer, M. (2004) *Handbook of Pulsar Astronomy* (Cambridge University Press, Cambridge).

Lovelock, D. & Rund, H. (1990) *Tensors, Differential Forms, and Variational Principles* (Dover, New York).

Lyne, A.G. & Smith, F. G. (1998) *Pulsar Astronomy* (Cambridge University Press, Cambridge).

Maartens, R. (2004) 'Brane–world gravity', *Living Rev. Relativity*, **7**, 7. URL: `http://www.livingreviews.org/lrr-2004-7`

MacCallum, M. A. H. (1979) 'Anisotropic and inhomogeneous relativistic cosmologies'. In Hawking & Israel (1979), p. 533.

Mathews, J. & Walker, R. L. (1965) *Mathematical Methods of Physics* (Benjamin, New York).

McCrea, W. H. (1979), *Q. J. Roy. Astron. Soc.*, **20**, 251.

Marder, L. (1971) *Time and the Space-Traveller* (George Allen & Unwin, London).

Mermin, N. D. (1989) *Space and Time in Special Relativity* (Waveland Press, Illinois).

Merritt, D. and Milosavljevic, M. (2005) 'Massive black hole binary evolution', *Living Rev. Relativity*, **8**, 8. URL: `http://www.livingreviews.org/lrr-2005-8`

Miller, M. C. & Colbert, E. J. M. (2004) *Int. J. Mod. Phys.*, **D13**, 1–64.

Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. (1973) *Gravitation* (Freeman, San Francisco).

Møller, C. (1972) *The Theory of Relativity* (Clarendon Press, Oxford).

Mukhanov, V. (2005) *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge University Press, Cambridge).

Pais, A. (1982) *'Subtle is the Lord ... ', The Science and the Life of Albert Einstein* (Oxford University Press, Oxford).

Peebles, P. J. E. (1980) *Large Scale Structure of the Universe* (Princeton University Press, Princeton).

Penrose, R. (1969), *Rev. Nuovo Cimento* **1**, 252.

Penrose, R. (1979) In Hawking & Israel (1979), 581.

Penzias, A. A. (1979) *Rev. Mod. Phys.*, **51**, 425.

Perlick, V. (2004) 'Gravitational lensing from a spacetime perspective', *Living Rev. Relativity*, **7**, 9. URL: `http://www.livingreviews.org/lrr-2004-9`

Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., Knop, R.A., Nugent, P., Castro, P.G., Deustua, S., Fabbro, S., Goobar, A., Groom, D., Hook, I.M., Kim, A.G., Kim, M.Y., Lee, J.C., Nunes, N.J., Pain, R., Pennypacker, C.R., Quimby, R., Lidman, C., Ellis, R.S., Irwin, M., McMahon, R.G., Ruiz-Lapuente, P., Walton, N., Schaefer, B., Boyle, B.J., Filippenko, A.V., Matheson, T., Fruchter, A.S., Panagia, N., Newberg, H.J.M., and Couch, W.J., (1999), *Astrophys. J.*, **517**, 565–586.

Peters, P. C. (1964) *Phys. Rev.*, **B 136**, 1224.

Pound, R. V. & Rebka, G. A. (1960) *Phys. Rev. Lett.*, **4**, 337.

Pound, R. V. & Snider, J. L. (1965) *Phys. Rev.*, **B 140**, 788.

Price, R. H. (1972a) *Phys. Rev. D*, **5**, 2419.

Price, R. H. (1972b) *Phys. Rev. D*, **5**, 2439.

Rendall, A. D. (2005) 'Theorems on existence and global dynamics for the Einstein equations', *Living Rev. Relativity*, **8**, 6. URL: `http://www.livingreviews.org/lrr-2005-6`

Renn, J. ed. (2007) *The Genesis of General Relativity: Sources and Interpretations* (Springer, 4 vols).

Riess, A.G., Filippenko, A.V., Challis, P., Clocchiatti, A., Diercks, A., Garnavich, P.M., Gilliland, R.L., Hogan, C.J., Jha, S., Kirshner, R.P., Leibundgut, B., Phillips, M.M., Reiss, D., Schmidt, B.P., Schommer, R.A., Smith, R.C., Spyromilio, J., Stubbs, C., Suntzeff, N.B., and Tonry, J. (1998) *Astron. J.*, **116**, 1009–1038.

Rindler, W. (1991) *Introduction to Special Relativity*, 2nd edn. (Oxford University Press, Oxford).

Rindler, W. (2006) *Relativity: Special, General, Cosmological*, 2nd edn. (Oxford University Press, Oxford).

Robinson, D. C. (1975) *Phys. Rev. Lett.*, **34**, 905.

Rovelli, C. (2004) *Quantum Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge).

Ryan, M. P. & Shepley, L. C. (1975) *Homogeneous Relativistic Cosmologies* (Princeton University Press, Princeton).

Saulson, P. (1994) *Funamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors* (World Scientific, Singapore).

Schild, A. (1967) In Ehlers, J. (ed.), *Relativity Theory and Astrophysics: I. Relativity and Cosmology* (American Math. Soc., Providence, R.I.).

Schneider, P. (2006) *Extragalactic Astronomy and Cosmology* (Springer-Verlag, Berlin).

Schneider, P., Ehlers, J., Falco, E. (1992) *Gravitational Lenses* (Springer-Verlag, Berlin).

Schouten, J. A. (1990) *Tensor Analysis for Physicists* (Dover, New York).

Schrödinger, E. (1950) *Space-Time Structure* (Cambridge University Press, Cambridge).

Schutz, B. F. (1980a) *Phys. Rev.*, **D 22**, 249.

Schutz, B. F. (1980b) *Geometrical Methods of Mathematical Physics* (Cambridge University Press, Cambridge).

Schutz, B. F. (1984) *Am. J. Phys.*, **52**, 412.

Schutz, B. F. (1986) *Nature*, **323**, 310–311.

Schutz, B. F. (2003) *Gravity from the Ground Up* (Cambridge University Press, Cambridge).

Schutz, B. F. & Ricci, F. (2001) in I. Ciufolini, *et al.* (eds.) *Gravitational Waves* (Inst. of Phys., Bristol), pp. 11–83.

Schwarz, P. M. & Schwarz, J. H. (2004) *Special Relativity: From Einstein to Strings* (Cambridge University Press, Cambridge).

Shapiro, I. I. (1980) 'Experimental tests of the general theory of relativity'. In Held (1980b), p. 469.

Shapiro, S. L. & Teukolsky, S. A. (1983) *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars* (Wiley, New York).

Smarr, L. L. (ed.) (1979) *Sources of Gravitational Radiation* (Cambridge University Press, Cambridge).

Spergel, D. N. *et al* (2003) *Astrophys. J. Suppl.*, **148** 175.

Spivak, M. (1979) *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, (Publish or Perish, Boston), vols. 1–5.

Stairs, I. H. (2003) 'Testing general relativity with pulsar timing', *Living Rev. Relativity*, **6**, 5. URL: `http://www.livingreviews.org/lrr-2003-5`
Starobinsky, A. (1980) *Phys. Lett.*, **91B**, 99.
Stephani, H. (2004) *Relativity: An Introduction to Special and General Relativity*, 3rd edn (Cambridge University Press, Cambridge).
Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, C., and Herlt, E. (2003), *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, 2nd edn (Cambridge University Press, Cambridge).
Stergioulas, N. (2003) 'Rotating Stars in Relativity', *Living Rev. Relativity* **6**, 3. URL: `http://www.livingreviews.org/lrr-2003-3`
Synge, J. L. (1960) *Relativity: The General Theory* (North-Holland, Amsterdam).
Synge, J. L. (1965) *Relativity: The Special Theory* (North-Holland, Amsterdam).
Tayler, R. J. (1994) *The Stars: their Structure and Evolution*, 2nd edn (Cambridge University Press, Cambridge).
Taylor, E. F. & Wheeler, J. A. (1966) *Spacetime Physics* (Freeman, San Francisco).
Taylor, J. H. & Weisberg, J. M. (1982) *Astrophys. J.*, **253**, 908.
Terletskii, Y. P. (1968) *Paradoxes in the Theory of Relativity* (Plenum, New York).
Teukolsky, S. A. (1972) *Phys. Rev. Lett.*, **29**, 114.
Thiemann, T. (2007) *Modern Canonical Quantum General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge).
Thorne, K. S., Caves, C. M., Sandberg, V. D., & Zimmerman, M. (1979) 'The quantum limit for gravitational-wave detectors and methods of circumventing it'. In Smarr (1979), p. 49.
Tipler, F. J., Clarke, C. J. S., & Ellis, G. F. R. (1980), 'Singularities and horizons – a review article'. In Held (1980b), p. 97.
Wald, R. M. (1984) *General Relativity* (Chicago University Press, Chicago).
Wald, R. M. (1994) *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics* (Chicago University Press, Chicago).
Wambsganss, J. (1998) 'Gravitational lensing in astronomy', *Living Rev. Relativity*, **1**, 12. URL: `http://www.livingreviews.org/lrr-1998-12`
Ward, W. R. (1970) *Astrophys. J.*, **162**, 345.
Weber, J. (1961) *General Relativity and Gravitational Waves* (Interscience, New York).
Weinberg, S. (1972) *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York).
Weisberg, J. M. & Taylor, J. H. (2005), in F. A. Rasio and I. H. Stairs (eds.), *Binary Radio Pulsars* (Astr. Soc. Pacific, San Francisco), pp. 25–32.
Whiting, B. F. (1989) *J. Math. Phys.*, **30**, 1301–1305.
Wiedemann, H. (2007) *Particle Accelerator Physics*, 3rd edn (Springer, Berlin).
Will, C. M. (1974) *Astrophys. J.*, **191**, 521.
Will, C. M. (1975) *Astrophys. J.*, **196**, 41.
Will, C. M. (1993) *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, 2nd edn. (Cambridge University Press, Cambridge).
Will, C. M. (2006) 'The confrontation between general relativity and experiment', *Living Rev. Relativity*, **9**, 3. URL: `http://www.livingreviews.org/lrr-2006-3`

Williams, L. P. (1968) *Relativity Theory: Its Origins and Impact on Modern Thought* (Wiley, New York).
Wilson, R. W. (1979) *Rev. Mod. Phys.*, **51**, 433.
Woodhouse, N. M. J. (2003) *Special Relativity* (Springer, London).
Woodhouse, N. M. J. (2007) *General Relativity* (Springer, London).
Woosley, S. E. & Bloom, J. S. (2006) 'The Supernova Gamma-Ray Burst Connection', *Ann. Rev. Astron. Astroph.*, **44** 507–556.
Yano, K. (1955) *The Theory of Lie Derivatives and its Applications* (North-Holland, Amsterdam).
Yao, W.-M. *et al.* (2006) *J. Phys. G.*, **33**, 1. This is kept up to date on the Particle Data website, `http://pdg.lbl.gov/2006/reviews/contents_sports.html`
Zel'dovich, Ya. B. & Novikov, I. D. (1971) In Thorne, K. S & Arnett, W. D. (eds.), *Stars and Relativity (Relativistic Astrophysics Vol. I)* (University of Chicago Press, Chicago).

訳者あとがき

本書は Bernard Schutz 著，A First Course in General Relativity, Second Edition (Cambridge University Press, 2009) の全訳である．日本語版としては，初版から変更された部分と加筆された部分を新たに翻訳し，それ以外の部分は旧版の翻訳を使用した．そのさい，旧版にあった明らかな間違いや誤植は訂正した．

著者がまえがきに書いているように，原著第 1 版が出版されてから四半世紀がたち，日本語の翻訳が出版されてからも 22 年が経過した．天体物理学において，その四半世紀における観測の進展は目ざましいものであった．特に，本書第 2 版で加筆・変更がなされている，コンパクト天体と宇宙論は，一般相対論の強い重力場が実現されている場である．その意味で，今回の改訂第 2 版は，アインシュタインの一般相対論を勉強したい人にとって，基礎理論としての一般相対論を学ぶことができるだけでなく，一般相対論が現在の天体物理学の中で，どのような天体や現象と結びついているかを知ることのできる適切な教科書になっている．

著者は，本書の第 3 版が書かれるときには，量子重力を含めた理論の進展がなされているであろうとの，希望的な推測をしている．理論に進展があるのは間違いないであろうが，25 年前には予想できなかったような観測結果が現在までに得られてきたことを考えると，本書第 3 版が出版されるときには，理論面だけでなく観測面でもさらなる進展がもたらされている可能性がある．

そうした状況において，訳者が願うことは，次のことである．一般相対論を

勉強しようと本書を手にする若き人々が，一般相対論を本書で身につけ，重力波やブラックホールや宇宙論の研究をさらに押し進め，著者の Schutz 教授や訳者のわれわれ二人が想像もできなかったような素晴らしい理論を生み出したり，観測面ではこれまでに誰も思いつかなかったようなアイデアを取り入れた観測装置をつくり上げ，理論を裏づける精度の高い観測結果を得ることによって，天体や宇宙の解明に大きく寄与してほしいということである．そうした未来の研究には既存の研究者のでる幕はなく，これから研究者になる若い人たちが主役となるのである．本書がそのような研究者を生み出すきっかけになってくれることを期待したい．

一般相対論誕生から 95 年目の秋に

江里口　良治

索　　引

欧数字

あ　行

か　行

さ　行

た　行

な　行

は　行

訳者の略歴

江里口良治　東京大学大学院総合文化研究科教授，理学博士．昭和48年東京大学理学部物理学科卒業．昭和53年同大学大学院理学系研究科（天文学課程）博士課程修了．昭和58〜59年マックス・プランク天体物理学研究所研究員．

二間瀬敏史　東北大学大学院理学研究科教授，Ph. D. 昭和52年京都大学理学部宇宙物理学科卒業．昭和54年同大学大学院工学研究科修士課程修了．昭和56年英国ウェールズ大学ユニバーシティ・カレッジ・カーディフ博士課程修了．マックス・プランク天体物理学研究所研究員，ユニバーシティ・カレッジ・カーディフ研究員，アメリカ・ワシントン大学研究員を経て，昭和63年，弘前大学理学部助教授，平成3年同教授を経て平成7年から現職．

第2版
シュッツ 相対論入門　ハードカバー版

平成22年11月30日　発　行

訳　者　江里口　良治
　　　　二間瀬　敏史

発行者　小城　武彦

発行所　丸善株式会社

出版事業部
〒140-0002 東京都品川区東品川四丁目13番14号
編集：電話(03)6367-6033／FAX(03)6367-6156
営業：電話(03)6367-6038／FAX(03)6367-6158
http://pub.maruzen.co.jp/

組版印刷・三美印刷株式会社／製本・株式会社 松岳社

ISBN 978-4-621-08309-3 C 3042　Printed in Japan